Skript zu den Vorlesungen Analysis 1 und 2 für ITET und RW

F. Ziltener

30. September 2026

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis **i**

0 Ausblick auf die Vorlesungen *Analysis 1 und 2* **3**
0.1 Ausblick auf *Analysis 1*: Konvergenz, gewöhnliche Differentialgleichungen 3
0.2 Ausblick auf die Vorlesung Analysis 2: Satz von Gauss, Anwendungen in der Strömungslehre und Elektrostatik 8

1 Grundlagen: Logik, Menge, Quantor, Funktion **13**
1.1 Mathematik 14
1.2 Logik: Aussage, Satz, Axiom, Beweis 15
1.3 Mengenlehre: Menge, Mengenoperationen, de-morgansche Gesetze . . . 31
1.4 Quantor 39
1.5 Die Konzepte *Begriff* und *Definition* 41
1.6 Funktion: Injektivität, Surjektivität, Bijektivität, Umkehrfunktion, Verknüpfung von Funktionen 47

2 Zahlen **57**
2.1 Natürliche, ganze und rationale Zahl 57
2.2 Reelle Zahl, Dedekind-Schnitt, Youngsche Ungleichung 59
2.3 Supremum und Infimum, Vollständigkeit der reellen Zahlen 70
2.4 Komplexe Zahl, cis-Funktion 76

3 Folge und Reihe **85**
3.1 Zenons Paradoxon, Folge, Konvergenz, Grenzwert 85
3.2 Konvergenzkriterien: Monotonie, Summe, Produkt, Quotient, Ordnung; Eulersche Zahl 92
3.3 Limes superior und inferior, Komponenten- und Cauchy-Kriterium für Konvergenz 98
3.4 Reihe: Konvergenzkriterien, Potenzreihe 105
3.5 Reihe: absolute Konvergenz, Umordnung, Cauchy-Produkt 116
3.6 Exponential- und trigonometrische Funktionen, Eulersche Formel . . . 122

4 Stetigkeit, Topologie **127**
4.1 Stetigkeit . . . 127
4.2 Topologie, Offen-, Abgeschlossenheit, Rand, Konvergenz einer Funktion, Kompaktheit . . . 134
4.3 Topologische Charakterisierungen der Stetigkeit . . . 149
4.4 Zwischenwertsatz, Stetigkeit der Umkehrfunktion, Logarithmus . . . 152
4.5 Punktweise und gleichmässige Konvergenz . . . 165

5 Differentialrechnung auf $\mathbb{R}$ **173**
5.1 Differenzierbarkeit, Ableitung, Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit . 173
5.2 Summen-, Produkt-, Quotienten- und Kettenregel für Ableitung . . . 183
5.3 Mittelwertsatz, Regel von Bernoulli-de l'Hospital, Umkehrsatz . . . 188
5.4 Trigonometrische, Arkus-, Hyperbel- und Areafunktionen . . . 203
5.5 Höhere (stetige) Differenzierbarkeit, höhere Ableitungen . . . 213
5.6 Satz von Taylor, lokale Extrema . . . 219

6 Integration auf $\mathbb{R}$ **235**
6.1 Bestimmtes Riemann-Integral: Definition und Beispiele . . . 235
6.2 Eigenschaften der Riemann-Integration, Integral mit vertauschten Grenzen . . . 242
6.3 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Stammfunktion . . . 247
6.4 Unbestimmte Integration, Umkehrung des Ableitens . . . 253
6.5 Partielle Integration, Anwendung: Darstellung von $\frac{\pi}{2}$ als Wallissches Produkt . . . 260
6.6 Substitutionsregel, Trennung der Veränderlichen, Partialbruchzerlegung 268
6.7 Integral einer rationalen Funktion, Partialbruchzerlegung . . . 276
6.8 Strategien für das Integrieren, symbolische Integration, Grenzen davon, ... 285
6.9 Integration und gleichmässiger Limes, gliedweise Integration einer Potenzreihe . . . 316
6.10 Uneigentliches Riemann-Integral, Anwendung: Arbeit des elektrischen Feldes . . . 321

7 Gewöhnliche Differentialgleichungen, Anwendungen in der Mechanik und Elektrotechnik **329**
7.1 Definition einer GDG, Anfangswertproblem, Beispiele . . . 329
7.2 Linearität und Homogenität einer GDG, Lösungsraum, charakteristisches Polynom einer GDG . . . 337
7.3 Homogene GDG zweiter Ordnung, freier gedämpfter harmonischer Oszillator . . . 345
7.4 Inhomogene GDG, elektrischer Schwingkreis mit Wechselspannungsquelle 349

7.5 System gewöhnlicher Differentialgleichungen, Anfangswertproblem . . . 355

8 Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$, Vektorfeld, Konservativität 371
8.1 Partielle und totale Differenzierbarkeit und Ableitung, Jacobi-Matrix . 371
8.2 Kettenregel, Differentiationsregeln, Richtungsableitung, Gradient, stetige Differenzierbarkeit 382
8.3 Potential, Wegintegral, Konservativität 392
8.4 Charakterisierung der Konservativität mittels Ableitungen, Integrabilitätsbedingung, Rotation 404
8.5 Partielle Ableitungen höherer Ordnung, Taylorformel, lokale Extremalstelle, Hesse-Matrix 412

9 Umkehrsatz, implizite Funktionen, Untermannigfaltigkeit, Tangentialraum 431
9.1 C^k-Diffeomorphismus, Umkehrsatz 431
9.2 Der Satz über implizite Funktionen 437
9.3 Untermannigfaltigkeit des Koordinatenraums, Dimension 446
9.4 Immersion, Einbettung, Submersion, Charakterisierung einer Untermannigfaltigkeit 449
9.5 Satz vom regulären Wert 453
9.6 Tangentialraum an eine Untermannigfaltigkeit 455
9.7 Tangentialabbildung 461
9.8 Kritischer Punkt auf einer Untermannigfaltigkeit 465

10 Integration im $\mathbb{R}^n$, Satz von Fubini über wiederholte Integration, Jordan-Mass, Substitutionsregel für mehrdimensionale Integrale 469
10.1 Riemann-Integral 470
10.2 Eigenschaften des Riemann-Integrals 476
10.3 Satz von Fubini, wiederholte Integration 479
10.4 Jordan-Mass 482
10.5 Substitutionsregel, Transformationssatz 485

11 Die Sätze von Green, Stokes und Gauß, Anwendungen in der Elektrodynamik 495
11.1 Kurvenintegral, Orientierung einer Kurve, C^k-Gebiet 496
11.2 Satz von Green 503
11.3 Untermannigfaltigkeit mit Rand, Koorientierung einer Hyperfläche . . . 505
11.4 Integral einer Funktion über eine Untermannigfaltigkeit 512
11.5 Integral über parametrisierbare Untermannigfaltigkeit, Fluss eines Vektorfeldes durch Hyperfläche 518
11.6 Satz von Stokes, faradaysches Induktionsgesetz der Elektrodynamik . . 524
11.7 Satz von Gauß, Gaußsches Gesetz der Elektrostatik 529

12 Ausblick auf Analysis 3: partielle Differentialgleichungen, Elektrodynamik **537**
12.1 Einleitung 537
12.2 Partielle und gewöhnliche Differentialgleichung 538
12.3 Laplace-, Wellen-, Wärmeleitungsgleichung, ... 542
12.4 Systeme von PDG, Maxwell-Gleichungen 545
12.5 Ein paar allgemeine Bemerkungen 548
12.6 Linearität einer PDG, Superpositionsprinzip 548
12.7 Typen linearer PDG zweiter Ordnung: elliptisch, hyperbolisch, parabolisch 551
12.8 Anfangs- und Randbedingungen anhand der Beispiele der Wärmeleitungs- und Wellengleichungen 558
12.9 Lösungsmethode der Trennung der Variablen, Anwendung auf Wärmeleitungsgleichung 560

Literaturverzeichnis **567**

Vorwort

Im Herbstsemester 2026 und im Frühjahrssemester 2027 halte ich an der ETH Zürich die Vorlesungen *Analysis 1 und 2* für Studentinnen und Studenten der Studiengänge ITET und RW. Dieses Skript ergänzt die folgende Literatur für dieses Fach:

Chr. Blatter, *Ingenieur-Analysis 1 und 2*, zweite Auflage, 1996.

Das Skript basiert hauptsächlich auf den folgenden Quellen:

M. Struwe, *Analysis für Informatik*, Skript, 5. November 2010.

J. J. Duistermaat und J. A. C. Kolk, *Multidimensional Real Analysis I and II*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 87, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

Ich hoffe, dass Ihnen mein Skript beim Verständnis des Stoffes helfen werden. Rückmeldungen sind willkommen! Bitte schicken Sie diese an fabian.ziltener@math.ethz.ch .

Fabian Ziltener, ETH Zürich

Kapitel 0

Ausblick auf die Vorlesungen *Analysis 1 und 2*

0.1 Ausblick auf *Analysis 1*: Konvergenz, gewöhnliche Differentialgleichungen

Ich beginne die Vorlesung *Analysis 1* mit einem **Ausblick** auf den Stoff dieser Vorlesung. Da ich in kurzer Zeit viele Ihnen unbekannte Themen ansprechen werde, kann ich es mir gut vorstellen, dass Sie einiges, was ich jetzt erzählen werde, nicht gleich verstehen werden. Das ist nicht schlimm, da wir die Themen später ausführlich behandeln werden.

Was ist Analysis?

Erinnerung ans Gymnasium: Analysis ist die Theorie der Ableitungen und Integrale von Funktionen. Zusammen mit der linearen Algebra bildet sie die Grundlage für die Natur- und Ingenieurwissenschaften.

Wir betrachten eine reellwertige Funktion f einer reellen Variablen. Die Ableitung von f an einer Stelle x ist die Steigung der Tangente an den Graphen von f durch den Punkt $(x, f(x))$. Wir schreiben diese Ableitung als

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x).$$

Das Integral von f über ein Intervall $[a, b]$ ist der Inhalt der Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen von f. Differentiation, also das Nehmen einer Ableitung, und Integration hängen über den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung miteinander zusammen. Dieser Satz besagt unter anderem, dass die Ableitung des



Abbildung 0.1: Isaac Newton, 1643 - 1727, englischer Mathematiker und Physiker.



Abbildung 0.2: Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646 - 1716, deutscher Mathematiker und Philosoph.

Integrals einer Funktion die ursprüngliche Funktion ist.[1] Dieser Satz wurde von Isaac Newton und Gottfried Wilhelm Leibniz gefunden. (Siehe Abbildungen 0.1 und 0.2.) Damit legten sie den Grundstein für die Analysis.

In der Vorlesung Analysis 1 werden wir die Begriffe einer Ableitung und eines Integrals noch einmal präzise definieren und behandeln. Dazu verwenden wir den Begriff der *Konvergenz einer Funktion in einem Punkt*. Dieser Begriff ist mit dem Begriff der *Konvergenz einer reellen Zahlenfolge* verwandt. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge und A eine reelle Zahl. Intuitiv konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen A, falls sich a_n immer mehr A nähert, je grösser n wird. Um das zu präzisieren, definieren wir, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen A konvergiert,

falls es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zahl n_0 gibt so,

dass für jedes $n \geq n_0$ gilt, dass

$$|a_n - A| \leq \varepsilon.$$

$|a_n - A|$ können wir dabei als den Fehler der Näherung sehen und ε als eine obere Schranke an diesen Fehler. Wir halten diese Schranke ein, falls $n \geq n_0$, also genügend gross ist.

In der obigen Definition der Konvergenz einer Folge kommen der *Existenzquantor "es gibt"* und der *Allquantor "für alle" = "für jedes"* vor. *Quantoren* sind *logische Operatoren*. Um Konvergenz definieren zu können, werden wir die Vorlesung Analysis 1 daher mit Logik beginnen.

[1] Wir betrachten das Integral hierbei als eine Funktion der oberen Integrationsgrenze.

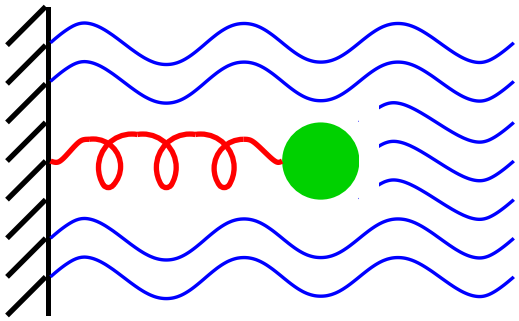


Abbildung 0.3: Federschwinger in einer zähen Flüssigkeit

Am Ende der Vorlesung werden wir *gewöhnliche Differentialgleichungen* behandeln. Grob gesagt, ist eine gewöhnliche Differentialgleichung (GDG) eine Gleichung für eine gesuchte Funktion einer reellen Veränderlichen, in der die Funktion und ihre Ableitungen auftreten. Solche Gleichungen beschreiben zahlreiche naturwissenschaftliche Gesetze. Dabei spielt die gesuchte Funktion zum Beispiel die Rolle einer physikalischen oder chemischen Grösse, die von der Zeit abhängt. Das gilt zum Beispiel für die GDG

$$f'' + a_1 f' + a_0 f = 0 \tag{1}$$

für eine reellwertige Funktion f einer reellen Variable. (Hierbei sind a_0 und a_1 reelle Zahlen.) Diese GDG beschreibt zum Beispiel die Bewegung eines freien[2] kugelförmigen Federschwingers (=Federpendel), der in einer zähen Flüssigkeit liegt und daher durch viskose Reibung gedämpft wird. Siehe Abbildung 0.3. f spielt dabei die Rolle der Auslenkung des Federschwingers aus der Ruhelage als eine Funktion der Zeit t. Wir gebrauchen jetzt die in der Physik übliche Notation $x = f$ für diese Auslenkung und $\dot{x} = x' = f'$ für ihre Ableitung nach der Zeit t. Die GDG (1) wird dann zur GDG

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0. \tag{2}$$

Wir leiten diese GDG mittels Gesetzen der Mechanik und der Strömungslehre her. Dazu schreiben wir:

$\mathbf{F}_0$:= Rückstellkraft der Feder[3]

$\mathbf{F}_R$:= durch die Viskosität der Flüssigkeit verursachte Reibungskraft

$\mathbf{F}$:= gesamte auf den Körper einwirkende Kraft

k := Federkonstante

c := Dämpfungskonstante

[2] Frei bedeutet, dass es keine äussere Anregungskraft gibt.

[3] "$A := B$" bedeutet, dass wir A als B definieren.

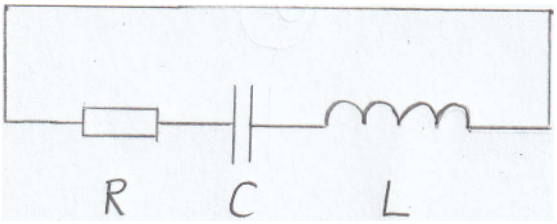


Abbildung 0.4: Freier gedämpfter elektrischer Schwingkreis.

$m :=$ Masse des Körpers

Es gelten folgende Gesetze der Mechanik und der Strömungslehre:

- Hookesches Gesetz:
$$\mathbf{F}_0 = -kx$$
- Stokessches Reibungsgesetz:
$$\mathbf{F}_R = -c\dot{x}$$
- zweites Newtonsches Gesetz:
$$\mathbf{F} = m\ddot{x}.$$

Diese Gesetze werden in den Vorlesungen *Technische Mechanik* (ITET, 1. Semester), *Physik I* (RW, 1. Semester) und *Fluiddynamik I* (RW, 4. Semester, Grundlagenfach) behandelt. Durch Kombinieren dieser Gesetze erhalten wir

$$\begin{aligned} m\ddot{x} = \mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_R = -kx - c\dot{x}, \\ \text{also} \quad \ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Damit haben wir die GDG (2) mit $a_0 = \frac{k}{m}$ und $a_1 = \frac{c}{m}$ hergeleitet. In dieser Vorlesung werden wir eine Formel für die allgemeine Lösung dieser GDG kennenlernen. (Siehe Proposition 7.9 in Abschnitt 7.2.) Somit können wir mit Hilfe von Analysis 1 also die Bewegung des Federschwingers beschreiben.

Betrachten wir nun ein Beispiel aus der Elektrotechnik, nämlich den *freien gedämpften elektrischen Schwingkreis*. Dieser besteht aus einem Widerstand, einem Kondensator und einer Spule, die hintereinandergeschaltet sind, wobei die Enden miteinander verbunden sind. Siehe Abbildung 0.4.

Problem (freie Schwingung)**.** *Beschreibe die Schwingung der Ladung Q des Kondensators!*

Bemerkung. Diejenigen von Ihnen, die ITET studieren, lernen elektrische Schaltungen im laufenden Semester in der Vorlesung *Netzwerke und Schaltungen I* kennen. Sie werden sie noch gründlicher im nächsten Semester in der Vorlesung *Netzwerke und Schaltungen II* untersuchen. In jener Vorlesung wird der obige Schwingkreis ausführlich behandelt.

Wir schreiben:

- $R :=$ elektrischer Widerstand des Widerstands (Bauelement)
- $C :=$ Kapazität des Kondensators
- $L :=$ Induktivität der Spule

Aus Gesetzen der Elektrotechnik folgt, dass die Ladung Q die Gleichung

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \frac{1}{CL}Q = 0 \tag{4}$$

erfüllt. (Siehe *Netzwerke und Schaltungen II.*) Das ist wieder die GDG (1), dieses Mal mit $f = Q$, $a_1 = \frac{R}{L}$ und $a_0 = \frac{1}{CL}$.

Wie erwähnt, werden wir die allgemeine Lösung dieser ODE bestimmen. (Siehe Proposition 7.9 in Abschnitt 7.2.) Dadurch wird der freie gedämpfte elektrische Schwingkreis beschrieben.

Bemerkung. [Federschwinger und elektrischer Schwingkreis] Die gewöhnlichen Differentialgleichungen (3,4), die den Federschwinger und den elektrischen Schwingkreis beschreiben, haben die gleiche Form. Diese völlig unterschiedlichen physikalischen Systeme können also mit Hilfe der gleichen Mathematik beschrieben werden. Das ist typisch für die Mathematik. Eine Stärke der Mathematik und insbesondere der Analysis besteht nämlich darin, einen Formalismus bereitzustellen, der ganz unterschiedliche physikalische Phänomene beschreibt.

Bemerkung. [Relevanz der Analysis 1 für Ihr Studium] Wie Sie sehen können, ist die Vorlesung *Analysis 1* zum Beispiel für die ITET-Vorlesungen *Technische Mechanik*, *Netzwerke und Schaltungen I und II* und die RW-Vorlesungen *Physik I* und *Fluiddynamik I und II* relevant.

0.2 Ausblick auf *Analysis 2*: partielle Ableitungen, Satz von Gauss, Anwendungen dieses Satzes in der Strömungslehre und Elektrostatik

Ich beginne die Vorlesung *Analysis 2* mit einem **Ausblick** auf den Stoff dieser Vorlesung sowie einem kurzen Ausblick auf Analysis 3. Da ich in kurzer Zeit viele verschiedene Themen ansprechen werde, kann ich es mir gut vorstellen, dass Sie einiges, was ich jetzt erzählen werde, nicht gleich verstehen werden. Das ist nicht schlimm, da wir die Themen später ausführlich behandeln werden.

Wiederholung von Analysis 1: Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, Ableitung, Integral

Jetzt: $\mathbb{R}^n := \{x = (x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$

Wir betrachten $f = (f_1, \ldots, f_l) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ $(n, p \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\})$. Ein Beispiel aus der Physik ist die Dichte einer Grösse (zum Beispiel der Masse oder Ladung). Die Dichte (zu einem festen Zeitpunkt) ist eine Funktion $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. ($\rho(x)$ ist die Dichte an der Stelle $x \in \mathbb{R}^3$.)

Wir betrachten nun den Fall $n = l$. Dann können wir f als ein *Vektorfeld* auffassen, also als eine Abbildung, die jedem Punkt im Raum $\mathbb{R}^n$ einen Vektor in $\mathbb{R}^n$ zuordnet. Ein Beispiel eines Vektorfeldes aus der Physik ist elektrische Feld, das wir als eine Funktion $f = \mathbf{E} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ auffassen können. Hierbei ist $\mathbf{E}(x)$ die elektrische Feldstärke am Ort $x \in \mathbb{R}^3$.

In dieser Vorlesung werden wir Definitionen und Sätze, die Sie aus Analysis 1 für Funktionen einer Variable kennen, auf Funktionen mehrerer Variablen verallgemeinern. Beispiele dafür sind die Definition der Ableitung und des Integrals, die Kettenregel, die Substitutionsregel und der Umkehrsatz.

Darüber hinaus werden wir Sätze kennenlernen, die keine Entsprechung in der Analysis 1 haben. Dazu gehören der Satz von der impliziten Funktion, der Bedingungen angibt, unter denen wir die Lösung y der Gleichung $f(x, y) = 0$ lokal als eine Funktion von x auffassen können. In physikalischen Anwendungen sind x und y physikalische Grössen und die Gleichung $f(x, y) = 0$ ein physikalisches Gesetz. Der Satz von der impliziten Funktion besagt dann, dass wir die Grösse y als eine Funktion der Grösse x auffassen können.

Ein weiteres Resultat ohne Entsprechung in Analysis 1 ist die Lagrange-Multiplikatorregel. Mit Hilfe dieser Regel können wir das Maximum einer reellwertigen Funktion auf einem kompakten Gebiet in $\mathbb{R}^n$ bestimmen.

Den Begriff der Ableitung einer Funktion einer Variable aus Analysis 1 verallgemeinern wir in dieser Vorlesung zum Begriff einer partiellen Ableitung einer Funktion mehrerer Variablen. Wir definieren nämlich die *partielle Ableitung* einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *nach der i-ten Variable* x_i als die Funktion $\frac{\partial f}{\partial x_i} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ [4] gegeben durch

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) := \frac{d}{dy}\Big|_{y=x_i} f\big(\dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots\big).$$

Das ist die gewöhnliche Ableitung (wie in Analysis 1) der Funktion einer Variable, die wir aus f erhalten, indem wir alle Variablen ausser x_i festhalten. Wir nehmen diese gewöhnliche Ableitung an der vorgegebenen Stelle x_i.

Beispiel: Sei $j \in \{1, \dots, n\}$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) := x_j$. Wir haben

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \delta_{ji} := \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ein Ziel dieser Vorlesung ist es, den Satz von Gauß über die Divergenz eines Vektorfeldes zu behandeln. Die *Divergenz* eines Vektorfeldes $f = X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$\operatorname{div}(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_i}.$$

Beispiel: $X(x) := x$, d.h., $X_i(x) = x_i$. Dann haben wir

$$\operatorname{div}(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = n.$$

Sei jetzt $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Der *Satz von Gauß* besagt, dass

$$\int_U \operatorname{div}(X)\, dx = \int_{\partial U} X \cdot \nu \, dA. \tag{5}$$

In dieser Vorlesung werden wir die Objekte, die in dieser Gleichheit vorkommen, ausführlich behandeln. Um Ihnen jetzt schon eine Idee zu geben, was sie bedeuten, folgen ein paar kurze Erklärungen.

Kurze Erklärungen: Auf der linken Seite von (5) steht das mehrdimensionale Integral der Funktion $\operatorname{div}(X) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ über U. Mehrdimensionale Integrale verallgemeinern eindimensionale Integrale. Wir werden sie in dieser Vorlesung definieren. Auf der rechten Seite von (5) tritt das *äussere Einheitsnormalenvektorfeld* ν auf. Das ist die Funktion $\nu : \partial U \to \mathbb{R}^3$, die jedem Punkt $x \in \partial U$ den eindeutigen Vektor $\nu(x)$ zuordnet, der senkrecht auf dem Rand ∂U steht und nach aussen weist. Siehe Abbildung 0.5. Auf der rechten Seite von (5) steht das *Oberflächenintegral* der Funktion

[4] Das Zeichen ∂ ist ein geschwungenes d und wird "del" ausgesprochen, in Anlehnung an den griechischen Buchstaben δ (delta).

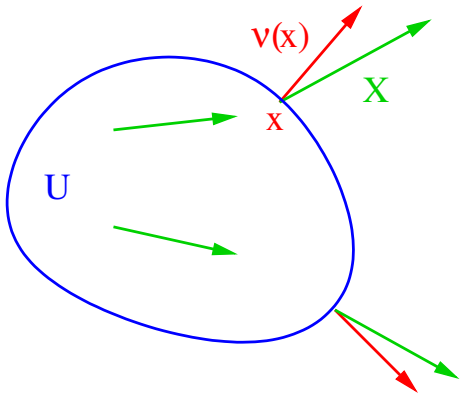


Abbildung 0.5: Die Objekte im Satz von Gauß: ein Gebiet U, Vektorfeld X und das äussere Einheitsnormalenvektorfeld ν auf dem Rand ∂U.

$f := X \cdot \nu$, die auf dem Rand ∂U des Gebietes U definiert ist. Im Fall $n = 3$ ist dA intuitiv der Flächeninhalt eines infinitesimalen Stücks der Fläche U, und das Integral $\int_{\partial U} f\, dA$ ist durch die unendliche Summe $\sum_{x \in \partial U} f(x) dA$ gegeben. Das ist analog zur intuitiven Interpretation des Integrals einer Funktion, die auf einem Intervall definiert ist. (dA ist analog zur Länge eines infinitesimalen Teilintervalls.) In dieser Vorlesung werden wir den Begriff des Oberflächenintegral präzise definieren.

Das Integral auf der rechten Seite von (5) heisst der *Fluss* von X durch ∂U. Anschaulich entspricht dieser Fluss der Menge eines Stoffes, die pro Zeitspanne aus dem Gebiet U herausfliesst, wenn $X = \rho v$, wobei $\rho(x)$ die Teilchenzahldichte[5] des Stoffes an der Stelle x und $v(x)$ die Geschwindigkeit des Stoffes an der Stelle x ist. Der Satz von Gauß stellt also eine Verbindung zwischen dem Stoffmengenfluss durch die Oberfläche des Gebietes und dem Integral der Divergenz von ρv über das Gebiet her.

Der Satz von Gauß wird in Anwendungen verwendet, um eine Verbindung zwischen der differentiellen und der integralen Form gewisser physikalischer Gesetze herzustellen. Zum Beispiel wird er in der Strömungslehre gebraucht, um die Erhaltung der Teilchenzahl aus der *Kontinuitätsgleichung*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0$$

herzuleiten. Erhaltung der Teilchenzahl ist die integrale Form eines physikalischen Gesetzes, und die Kontinuitätsgleichung ist die differentielle Form davon. (*Differentiell* bedeutet, dass es mittels partieller Ableitungen formuliert ist.) Strömungslehre wird in den Vorlesungen des Studienganges RW *Fluiddynamik I* (4. Semester, Grundlagenfach) und *Fluiddynamik II* (5. Semester, Vertiefungsgebiet) behandelt.

[5] Diese Grösse wird auch *Teilchendichte* genannt.

Als ein anderes Beispiel sagt das *Gaußsche Gesetz* der Elektrostatik, dass der Fluss des elektrischen Feldes $\mathbf{E}$ über den Rand eines Gebietes U proportional zur Ladung Q im Gebiet ist, genauer, dass

$$\int_{\partial U} \mathbf{E} \cdot \nu \, dA = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

wobei $\varepsilon_0 \approx 8.9 \cdot 10^{-12} \mathrm{kg}^{-1}\mathrm{m}^{-3}\mathrm{sec}^4\mathrm{A}^2$ die elektrische Feldkonstante ist. Dieses Gesetz kann mittels des Satzes von Gauß aus der *Maxwellgleichung*

$$\mathrm{div}(\mathbf{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

hergeleitet werden. Das Gaußsche Gesetz ist die integrale Form eines physikalischen Gesetzes, die obige Maxwellgleichung ist die differentielle Form davon. *Elektrostatik* ist das Teilgebiet der Physik, das ruhende elektrische Ladungen und zeitlich gleichbleibende elektrische Felder beschreibt. Sie ist Teil der *Elektrodynamik*, welche in der Vorlesung *Elektromagnetische Felder und Wellen* behandelt wird (ITET: 4. Semester, RW: Wahlfach, 6. Semester).

Ein weiteres Ziel der Vorlesung Analysis 2 ist es, den *Satz von Stokes* über die Rotation eines Vektorfeldes zu behandeln. Dieser Satz wird zum Beispiel in der Elektrodynamik gebraucht, um das faradaysche Induktionsgesetz aus einer der vier Maxwellgleichungen herzuleiten. Siehe die Vorlesung *Elektromagnetische Felder und Wellen.*

Die hier erwähnten Maxwellgleichungen und die Kontinuitätsgleichung sind *partielle Differentialgleichungen.* Grob gesagt, ist eine partielle Differentialgleichung (PDG) eine Gleichung für eine gesuchte Funktion, in der die Funktion und ihre partiellen Ableitungen (auch höherer Ordnung) auftreten. Solche Gleichungen beschreiben zahlreiche physikalische und chemische Gesetze. Dabei spielt die gesuchte Funktion die Rolle einer physikalischen oder chemischen Grösse, die vom Ort und manchmal von der Zeit abhängt.

Ein weiteres Beispiel für eine PDG ist die Wellengleichung, die unter anderem die Ausbreitung von Schallwellen und elektromagnetischen Wellen beschreibt. PDG werden in der Vorlesung *Analysis 3* behandelt. (Siehe nächstes Semester.) Diese Vorlesung baut auf der Vorlesung Analysis 2 auf.

Bemerkung. [Relevanz der Analysis 2 für Ihr Studium] Wie Sie sehen können, ist die Vorlesung *Analysis 2* zum Beispiel für die ITET-Vorlesung *Elektromagnetische Felder und Wellen* und die RW-Vorlesungen *Fluiddynamik I und II* relevant.

Wenn Sie jetzt nicht alles aus dieser Übersicht über Analysis 2 verstanden haben, ist das nicht schlimm. Wir werden die angerissenen Themen in dieser Vorlesung ausführlich behandeln.

Kapitel 1

Mathematik, Grundlagen: Logik, Menge, Quantor, Funktion

Dieses Kapitel entspricht [Bla96a, 1.1, 1.2, 2.1, 2.2] und [Stra, Kapitel 1]. Analysis ist ein Teilgebiet der Mathematik. Um zu genauer zu verstehen, was Analysis ist, werden wir daher zuerst in Abschnitt 1.1 klären, was Mathematik ist.

In der Logik werden *Aussagen* untersucht. Ein *Beweis* einer Aussage ist eine Herleitung der Aussage aus den *Axiomen*, d. h. Grundannahmen. Ein (mathematischer) *Satz* ist eine beweisbare Aussage. Mathematik besteht aus Sätzen. Logik bildet daher das Fundament der Mathematik und damit der Analysis.

Mittels *Verknüpfungen* wie zum Beispiel *und* entstehen aus Aussagen neue Aussagen.

Eine *Menge* ist eine ungeordnete Zusammenfassung verschiedener Objekte zu einem Ganzen. Alle praktisch relevanten mathematischen Objekte können als Mengen interpretiert werden. Mengen spielen daher eine zentrale Rolle in der Mathematik.

Der *Existenzquantor* ist der Ausdruck *es gibt*. Der *Allquantor* ist der Ausdruck *für alle = für jedes*. *Mathematische Begriffe, Definitionen* und Sätze werden mit Hilfe dieser Quantoren gebildet. (Wir haben dazu in Kapitel 0 schon als Beispiel die Definition der Konvergenz einer Folge gesehen.)

Wir betrachten jetzt zwei Mengen X und Y. Eine *Funktion* von X nach Y ist eine Vorschrift, die jedem Element x von X ein eindeutiges Element y von Y zuordnet. Analysis 1 handelt von Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, genauer, von deren Ableitungen und Integralen. Analysis 2 handelt von Funktionen $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^p$, wobei $\mathbb{R}^n$ den n-dimensionalen (Standard-)Raum bezeichnet. (Zum Beispiel ist $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ die Ebene und $\mathbb{R}^3$ der dreidimensionale Raum.)

1.1 Mathematik

Frage. *Was ist Mathematik?*

Antwort. *Mathematik ist die Wissenschaft, die Eigenschaften von mathematischen Strukturen mit Hilfe von Logik untersucht.*

Eine (*mathematische*) *Struktur* ist eine Grundmenge X [1] zusammen mit Operationen, Relationen (= Beziehungen) und allgemeineren *Konstrukten* auf X.

Beispiele 1.1. [Struktur] Folgendes sind mathematische Strukturen:

(i) $(\mathbb{Z}, +)$ [2] = die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen zusammen mit der *Operation* Addition $+$

(ii) $\big(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq\big)$ [3] = die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen zusammen mit den *Operationen* Addition $+$, Multiplikation $\cdot$ und der Ordnungs*relation* $\leq$

(iii) Konvergenz reeller Zahlenfolgen = die Menge $\mathbb{R}$ zusammen mit der Menge aller konvergenten reellen Zahlenfolgen

(Siehe Definition 3.2.)

(iv) Standard-Topologie auf $\mathbb{R}$ = die Menge $\mathbb{R}$ zusammen mit der Menge aller offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$

(Siehe Definition 4.12.)

(v) Ableiten

(vi) (un-)bestimmte Integration

In der Vorlesung *Analysis 1* werden wir alle diese mathematischen Strukturen untersuchen. (Ich erwarte *nicht*, dass Sie Topologie und die präzise Definition der anderen Strukturen schon kennen.)

Bemerkungen. [Theorie der Strukturen, Mathematik]

- Die Sichtweise, dass Mathematik die Theorie der mathematischen Strukturen ist, wurde durch Nicolas Bourbaki propagiert. *Nicolas Bourbaki* ist das Pseudonym eines Autorenkollektivs vorwiegend französischer Mathematiker, das seit 1934 an einem vielbändigen Lehrbuch der Mathematik arbeitet.

[1] Es gibt auch Strukturen mit mehreren Grundmengen.
[2] (x, y) bezeichnet das aus x und y bestehende geordnete Paar. Siehe Definition 1.16.
[3] $\big(x_1, \ldots, x_n\big)$ bezeichnet das aus $x_1, \ldots, x_n$ bestehende geordnete n-Tupel. Siehe Definition 1.16.

- Mathematik ist *nicht* eine Liste von Algorithmen zur Lösung mathematischer Probleme. Ein Algorithmus ist endliche Abfolge von eindeutigen Anweisungen, die von einer Maschine automatisch ausgeführt werden können. Algorithmen kommen in der Mathematik vor, machen aber nur einen kleinen Teil davon aus.

- Wir werden uns mit Algorithmen im Abschnitt 6.8.5 befassen. Dort werden wir sehen, dass sich gewisse mathematische Objekte nicht berechnen lassen, weder symbolisch noch numerisch. Das gilt zum Beispiel für fast alle reellen Zahlen. Es gibt konkrete nicht berechenbare Objekte, zum Beispiel sogar eine explizit definierte reelle Zahl H.

- Dass sich nicht alle mathematischen Objekte berechnen lassen, ist nicht schlimm. Wir können gewisse Aussagen auch über nicht berechenbare Objekte treffen. Zum Beispiel kann man zeigen, dass die nicht berechenbare Zahl H kleiner als 2 ist.

1.2 Logik: Aussage, Satz, Axiom, Beweis

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96b, 1.1] und [Stra, 1.1]. Er enthält eine kurze Einführung in die Logik. Das Thema wird ausführlicher in der Vorlesung *Diskrete Mathematik* für RW (1. Semester) behandelt.

In der Logik werden (mathematische) Aussagen untersucht. Eine Aussage ist eine Äusserung, die entweder wahr oder falsch ist.

Beispiel. Beispiele von Aussagen:

- "Der Mensch ist ein Lebewesen." (wahr)
- "Die Erde ist eine Scheibe." (falsch)
- "$1 + 1 = 2$" (wahr)
- "$0 < 0$" (falsch)

Beispiele von Äusserungen, die keine Aussagen sind:

- "Ist $1 + 1 = 2$?" (Frage)
- "Berechnen Sie $1 + 1$!" (Befehl)
- "Super!" (Ausruf)

Es gelten die folgenden Sätze:

Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch: Eine Aussage ist nicht sowohl wahr als auch falsch.

Satz vom ausgeschlossenen Dritten: Jede Aussage ist wahr oder falsch.

Bemerkung. Dieser Satz trägt auch den lateinischen Namen *tertium non datur*, *ein Drittes ist nicht gegeben*. Mit dem Dritten ist dabei ein dritter Wahrheitswert neben *wahr* und *falsch* gemeint.

Bemerkungen 1.2. [rückbezügliche Äusserung, Lügner-Paradox]

- Es gibt grammatikalisch korrekte Äusserungen im Indikativ, die keine mathematischen Aussagen sind. Beispiel:

  $P :=$"Dieser Satz ist falsch."

  Um das zu sehen, nehmen wir an, dass P eine Aussage wäre. Falls P wahr ist, dann ist der Satz, also P, falsch. Das steht im Gegensatz zum Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch.

  Falls P falsch ist, dann ist der Satz, also P, wahr. Das steht ebenfalls im Gegensatz zum Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch.

  In beiden Fällen erhalten wir also einen Widerspruch. Gemäss dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten decken die beiden Fälle alle Möglichkeiten ab. Wir erhalten also immer einen Widerspruch. Unsere Annahme, dass P eine Aussage ist, ist daher falsch.

- Das Problem mit der Äusserung "Dieser Satz ist falsch." ist, dass sie rückbezüglich ist, also sich auf sich selbst bezieht. Manche rückbezügliche Äusserungen sind also keine sinnvollen Aussagen.

- Eine Variante der obigen Äusserung ist die Behauptung eines Menschen: "Ich lüge gerade." "Dieser Satz ist falsch." heisst daher Lügner-Paradox. Die ähnliche Äusserung "Alle Kreter sind Lügner." wird dem antiken griechischen Philosophen Epimenides zugeschrieben, der ein Kreter war. (Sagte er damit die Wahrheit? Oder log er?)

Wir können Aussagen verneinen und miteinander verknüpfen. Sei A eine Aussage. Wir verwenden die folgenden Notationen:

Notation	Bedeutung	Bezeichnung
T	wahr = true	
F	falsch = false	
$\neg A$	nicht A = "A ist nicht wahr."	Negation

Beispiel. [Negation] Die Negation der Aussage "$0 < 1$" ist die Aussage "$\neg(0 < 1)$". Wir können diese Aussage auch schreiben als "Es ist nicht wahr, dass $0 < 1$". Sie ist äquivalent zur Aussage "$0 \geq 1$". (Siehe Definition 1.3.) Die beiden Aussagen sind aber nicht identisch.

Der *Wahrheitswert* der verneinten Aussage ist durch die folgende *Wahrheitstabelle* gegeben:

A	$\neg A$
T	F
F	T

Es seien jetzt A und B Aussagen. Wir schreiben $A \wedge B$ für die verknüpfte Aussage "A und B sind wahr." und verwenden die folgenden Notationen für weitere Verknüpfungen:

Notation	alternative Notation	Bedeutung	Bezeichnung
$A \wedge B$	A AND B	A und B	Konjunktion
$A \vee B$	A OR B	A oder B	inklusive Disjunktion
$A \dot{\vee} B$	A XOR B	entweder A oder B	exklusive Disjunktion
$A \Rightarrow B$	$A \rightarrow B$	wenn A, dann B	Implikation = Konditional
$A \Leftrightarrow B$	$A \leftrightarrow B$	genau dann A, wenn B	(materiale) Äquivalenz = Bikonditional

Die Wahrheitswerte dieser verknüpften Aussagen werden durch die folgende Wahrheitstafel gegeben:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \dot{\vee} B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
F	F	F	F	F	T	T
T	F	F	T	T	F	F
F	T	F	T	T	T	F
T	T	T	T	F	T	T

Aus der zweiten Zeile können wir zum Beispiel ablesen, dass $A \wedge B$ falsch ist, falls A wahr ist und B falsch ist.

Beispiele. [Verknüpfungen von Aussagen] Einige Beispiele von verknüpften Aussagen werden durch die folgende Tabelle gegeben. Die dritte Spalte gibt den Wahrheitswert der verknüpften Aussage an. In der letzten Spalte wird auf die Bemerkungen unten verwiesen.

Aussage	Aussage in natürlicher Sprache		
$0 < 1 \wedge 1 + 1 = 2$	Null ist kleiner als eins, und eins plus eins ist zwei.	T	
$0 < 1 \vee 1 + 1 = 2$	Null ist kleiner als eins, oder eins plus eins ist zwei.	T	(i)
$0 < 1 \dot{\vee} 1 + 1 = 2$	Entweder ist null kleiner als eins, oder eins plus eins ist zwei.	F	(ii)
$0 + 0 = 1 \Rightarrow 1 < 1$	Wenn null plus null gleich eins ist, dann ist eins kleiner als eins.	T	(iii)
$0 + 0 = 1 \Leftrightarrow 1 < 1$	Null plus null ist genau dann gleich 1, wenn eins kleiner als eins ist.	T	

Bemerkungen. [(entweder) oder, wenn]

(i) Falls A und B beide wahr sind, ist die verknüpfte Aussage "$A \vee B$" ("A oder B") wahr. (Das haben wir in der zweiten Zeile der Tabelle im obigen Beispiel verwendet.) $\vee$ ist also das *inklusive* Oder, das zulässt, dass beide der verknüpften Aussagen wahr sind.

(ii) Die Verknüpfung $\dot{\vee}$ ist das *exklusive* Oder (= entweder ... oder). Sie schliesst aus, dass beide der verknüpften Aussagen wahr sind.

(iii) Die Implikation "$A \Rightarrow B$" ist immer erfüllt, ausser, falls A wahr und B falsch ist. Insbesondere ist also "$A \Rightarrow B$" wahr, falls beide Aussagen A und B falsch sind. Falls das Ihnen seltsam erscheint, dann überzeugt Sie vielleicht folgendes Beispiel davon, dass diese Verwendung des Wortes *wenn* sinnvoll ist. Für jede ganze Zahl n betrachten wir die folgende Aussage:

$P(n)$:="$n > 0 \Rightarrow n + 1 > 0$"

Für welche n ist diese Aussage wahr?

Wie Sie wahrscheinlich richtig vermuten, ist die Aussage für alle n wahr, da ja $n + 1$ ebenfalls grösser als 0 ist, falls n grösser als 0 ist. Wir betrachten jetzt den Fall $n = 0$, also:

$P(0)$="$0 > 0 \Rightarrow 0 + 1 > 0$"

Wie wir uns soeben überlegt haben, ist diese Aussage wahr, obwohl ihr erster Teil, $0 > 0$, falsch ist. Wir betrachten jetzt den Fall $n = -1$, also:

$P(-1)$="$-1 > 0 \Rightarrow -1 + 1 > 0$"

Wie wir uns soeben überlegt haben, ist diese Aussage wahr, obwohl die einzelnen Teile, "$-1 > 0$" und "$-1 + 1 > 0$", beide falsch sind.

(iv) Die verknüpften Aussagen brauchen inhaltlich nicht zusammenzuhängen. Zum Beispiel ist die Aussage "Wenn der Mensch ein Lebewesen ist, dann ist eins plus eins gleich zwei." mathematisch sinnvoll und wahr. (Wie im letzten Punkt erklärt, ist die Aussage "Wenn die Erde eine Scheibe ist, dann ist null kleiner als null." ebenfalls mathematisch sinnvoll und wahr.)

Im Gegensatz dazu wird in der Alltagssprache mit *wenn* oft eine Kausalität ausgedrückt, zum Beispiel im Satz:

"Wenn es geregnet hat, dann ist die Strasse nass."

Bemerkung. [Digitaltechnik, Gatter] Logische Verknüpfungen spielen in der *Digitaltechnik* eine zentrale Rolle. Sie werden in elektrischen Schaltungen durch *Logikgatter* realisiert, die aus Transistoren aufgebaut sind. Siehe Übungsserie 1 (Wahrheitstafeln, logische Äquivalenz, Digitaltechnik, Gatter) und das Fach *Digitaltechnik* (ITET, 1. Semester). Aussagenlogik kann dazu verwendet werden, elektronische Bauteile zu sparen. (Siehe Übungsserie 1.)

Es seien P und Q zusammengesetze Aussagen.

Definition 1.3 (logische Äquivalenz)**.** *Wir nennen P und Q* logisch äquivalent *g. d. w. sie die gleichen Wahrheitstabellen besitzen. In diesem Fall schreiben wir*

$$P \equiv Q.$$

Bemerkung. [logische Äquivalenz] Das bedeutet, dass die Wahrheitswerte von P und Q gleich sind für jede Wahl von Wahrheitswerten der Aussagen, aus denen P und Q aufgebaut sind.

Beispiele. [logische Äquivalenz] Es gilt:

$$\begin{aligned} A \wedge B &\equiv B \wedge A \\ \neg(A \wedge B) &\equiv \neg A \vee \neg B \qquad \text{(de-morgansches Gesetz)} \\ A \wedge (B \vee C) &\equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \qquad \text{(Distributivgesetz für } \wedge \text{ und } \vee\text{)} \end{aligned} \tag{1.1}$$

(Siehe Übungsserie 1.)

Bemerkungen. [Äquivalenzumformung und logische Äquivalenz]

- $\neg$ bindet stärker als Disjunktion. Mit $\neg A \vee \neg B$ ist also $(\neg A) \vee (\neg B)$ gemeint.
- In der Schule haben Sie den Begriff einer Äquivalenzumformung von Gleichungen kennengelernt. Bei einer solchen Umformung ist die ursprüngliche Gleichung zur neuen Gleichung logisch äquivalent in folgendem Sinn. Wir sagen, dass zwei Gleichungen für eine Unbekannte x *logisch äquivalent* (*über den reellen Zahlen*) sind, falls jedes $x \in \mathbb{R}$ die eine Gleichung genau dann löst, falls es die andere Gleichung löst. Das bedeutet, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Wahrheitswerte der beiden Gleichungen gleich sind. Diese Art von logischer Äquivalenz ist analog zur logischen Äquivalenz für zusammengesetze Aussagen (Definition 1.3).

Eine *Äquivalenzumformung* ist ein Prozess, der eine Gleichung in eine logisch äquivalente Gleichung überführt.[4,5] Das bedeutet, dass die Lösungsmenge der Gleichung bei der Umformung gleich bleibt.

- Ein Beispiel einer Äquivalenzumformung ist die *beidseitige Addition*[6] von 1, d. h. der Prozess

$$A(x) = B(x) \qquad \mapsto \qquad A(x) + 1 = B(x) + 1.$$

  Eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ löst die Gleichung $A(x) = B(x)$ nämlich genau dann, wenn sie die Gleichung $A(x) + 1 = B(x) + 1$ löst.

- Ein *Nichtbeispiel* einer Äquivalenzumformung ist *beidseitiges Quadrieren*, da $x = -1$ die Gleichung $x = 1$ nicht löst, aber die quadrierte Gleichung $x^2 = 1^2$ löst, da $x^2 = (-1)^2 = 1^2$.

- Äquivalenzumformungen sind nützlich, um die Lösungsmenge einer Gleichung zu bestimmen. Betrachten wir zum Beispiel die Gleichung $2x + 1 = 7$. Mit Hilfe von Äquivalenzumformungen erhalten wir[7]:

$$\begin{aligned}
& 2x + 1 = 7 && | - 1 && \text{(beidseitige Subtraktion von 1)} \\
\equiv \quad & (2x + 1) - 1 = 7 - 1 && | \text{Vereinfachung} \\
\equiv \quad & 2x = 6 && | \cdot /2 \\
\equiv \quad & \frac{2x}{2} = \frac{6}{2} && | \text{Vereinfachung} \\
\equiv \quad & x = 3
\end{aligned}$$

  Die Lösungsmenge der Gleichung $2x + 1 = 7$ ist daher gegeben durch $\{3\}$.

Als ein allgemeines Beispiel sind eine Implikation und ihr Kontraponiertes logisch äquivalent. Um das zu erklären, seien A und B Aussagen.

Definition (Kontraponiertes)**.** *Wir definieren das zur Implikation $A \Rightarrow B$* Kontraponierte *(oder die* kontraponierte Aussage[8]*) als die Aussage*

$$\neg B \Rightarrow \neg A.$$

[4]Das erklärt den Namen *Äquivalenzumformung*.

[5]In manchen Schulbüchern wird zusätzlich verlangt, dass der Prozess umkehrbar ist. Es ist unklar, welchen Vorteil diese zusätzliche Bedingung bringt.

[6]d. h. Addition auf beiden Seiten der Gleichung

[7]$\equiv$ bedeutet logische Äquivalenz.

[8]Manchmal wird diese Aussage auch die *Kontraposition* genannt.

Die Implikation und ihr Kontraponiertes sind *logisch äquivalent*, d. h.

$$A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A.$$

Das bedeutet, dass die Implikation genau dann wahr ist, falls ihr Kontraponiertes wahr ist. (Siehe Serie 1.)

Beispiel. [Kontraponiertes] Das Kontraponierte der Implikation

P:="Wenn es geregnet hat, dann ist die Strasse nass."

ist die Aussage

Q:="Wenn die Strasse nicht nass ist, dann hat es nicht geregnet."

P ist wahr aufgrund von Physik. Da P und Q logisch äquivalent sind, ist Q daher auch wahr.

Bemerkung. [Implikation] Alternativ sprechen wir die Implikation $A \Rightarrow B$ auch aus als:

- "A impliziert B."
- "A ist hinreichend für B."
- "B ist notwendig für A."

Die Sprechweise "B ist notwendig für A." drückt Folgendes aus:

"Falls B nicht gilt, dann gilt A auch nicht.", d. h. "$\neg B \Rightarrow \neg A$" = Kontraponiertes der Implikation $A \Rightarrow B$

Wie wir uns überlegt haben, ist das logisch äquivalent zur Implikation $A \Rightarrow B$. Daher ist die Sprechweise "B ist notwendig für A." sinnvoll.

Bemerkungen. [Implikation und materiale und logische Äquivalenz]

- Die Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ ist genau dann wahr, wenn die Implikationen $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$ beide wahr sind, d. h.

  $$A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A).$$

  $A \Leftrightarrow B$ ist *nicht* logisch äquivalent zu $A \Rightarrow B$. Zum Beispiel ist die Implikation

  $$0 < 0 \Rightarrow 1 + 1 = 2$$

  wahr, die Äquivalenz

  $$0 < 0 \Leftrightarrow 1 + 1 = 2$$

  jedoch falsch, da die Implikation $1 + 1 = 2 \Rightarrow 0 < 0$ falsch ist.

- Im Alltag wird Implikation manchmal mit Äquivalenz verwechselt. Betrachten wir zum Beispiel die Aussage:

  P:="Wenn es geregnet hat, dann ist die Strasse nass."

  Diese Aussage ist wahr. (Das folgt aus Physik.) Wir nehmen jetzt an, dass gilt:

  "Es hat nicht geregnet."

  Ist dann die folgende Schlussfolgerung korrekt?

  "Die Strasse ist nicht nass."

  Nein! Die Strasse kann nämlich trotzdem nass sein, zum Beispiel, weil gerade eine Feuerwehrübung stattfand. Die Schlussfolgerung wäre korrekt, wenn statt der Implikation P die folgende *Äquivalenz* gälte:

  Q:="Es hat genau dann geregnet, wenn die Strasse nass ist."

  Diese Aussage ist nämlich logisch äquivalent zu:

  "Die Strasse ist genau dann nicht nass, wenn es nicht geregnet hat."

  Wenn Sie dachten, "Es hat nicht geregnet." impliziere "Die Strasse ist nicht nass.", dann haben Sie möglicherweise die Implikation P mit der Äquivalenz Q verwechselt.

- Materiale Äquivalenz "$\Leftrightarrow$" ist eine logische Verknüpfung, die aus zwei Aussagen A und B die Aussage $A \Leftrightarrow B$ macht. Der Wahrheitswert dieser Aussage hängt von den Wahrheitswerten von A und B ab. Logische Äquivalenz $P \equiv Q$ ist eine Aussage über zwei verknüpfte Aussagen P und Q (zum Beispiel $P = (A \Rightarrow B)$ und $Q = (\neg B \Rightarrow \neg A)$). Logische Äquivalenz vergleicht also zwei verknüpfte Aussagen. Sie ist nicht selbst eine verknüpfte Aussage.

Die Grundlage für die Mathematik bilden *Axiome*. *Axiome* sind als wahr angenommene Aussagen, auf denen die Mathematik aufgebaut wird. Das Wort *Axiom* kommt von Altgriechisch ἄξιος = áxios = würdig, wert. (Die Idee ist, dass ein Axiom es wert ist, angenommen zu werden.) In einem grossen Teil der Mathematik (zum Beispiel in der Analysis) werden einige *logische Axiome*, die neun *Axiome von Zermelo und Fraenkel* sowie das *Auswahlaxiom* angenommen. Dieser grosse Teil der Mathematik basiert also auf wenigen Grundannahmen. Eines der Axiome von Zermelo und Fraenkel besagt zum Beispiel, dass es eine Menge mit unendlich viel Elementen gibt.

Ein *Beweis* einer Aussage A ist eine sukzessive Herleitung von A aus den Axiomen, in der die *logischen Schlussregeln Modus ponens* und *Verallgemeinerung*[9] angewandt

[9]Für die Schlussregel *Verallgemeinerung* siehe die Vorlesung *Grundstrukturen* für Mathematiker/innen.

werden. Der *Modus ponens = setzende Schlussregel* ist durch folgendes Schema gegeben:

A (Prämisse = Annahme)

$A \Rightarrow B$ (Prämisse)

B (Konklusion)

Bedeutung: Wir nehmen an, dass A und $A \Rightarrow B$ gelten. Daraus schliessen wir, dass B gilt.

Beispiel. [modus ponens] A:="Es hat geregnet.", B:="Die Strasse ist nass."

Modus ponens:

Es hat geregnet. (Prämisse)

Wenn es geregnet hat, ist die Strasse nass. (Prämisse)

Die Strasse ist nass. (Konklusion)

In der Praxis werden in Beweisen anstatt Axiomen meistens Aussagen verwendet, die schon mittels der Axiome bewiesen worden sind. Eine beweisbare Aussage heisst *Satz*. Als ein Beispiel beweisen wir den folgenden Satz.

Satz 1.4. *Die Zahl*

$$3 \cdot 2^{\frac{(7 \cdot 123456789+1)^2-1}{7}}$$

ist ganz[10].

Im Beweis dieses Satzes werden wir die folgende Aussage verwenden, die schon bewiesen worden ist[11].

Lemma 1.5 (erste binomische Formel)**.** *Für alle x und y gilt: Wenn x und y reelle Zahlen* [12] *sind, dann gilt:*

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

Wir werden auch folgendes schon bewiesenes Lemma verwenden.

Lemma 1.6 (Produkte und Potenzen ganzer Zahlen)**.** *Die folgenden Aussagen gelten:*

[10] d. h. ganzzahlig

[11] von Alessandro Binomi, siehe [For11]

[12] Wir werden den Begriff einer reellen Zahl in Definition 2.2 festlegen.

(i) Das Produkt zweier ganzer Zahlen ist ganz.

(ii) Jede Potenz mit ganzer Basis und natürlichem Exponenten[13] *ist ganz.*

Bemerkungen 1.7. [Lemma, Proposition, ...]

(i) Ein *Lemma* (oder *Hilfssatz*) ist ein Satz, der dazu dient, einen anderen Satz (in unserem Fall Satz 1.4) zu beweisen.Oft bezeichnen wir damit einen Satz, den wir für nicht so wichtig halten.

(ii) Mathematisch gesehen bezeichnen die Wörter *Hilfssatz, Lemma, Proposition, Hauptsatz, Theorem* und *Korollar* dasselbe wie *Satz*. Mit der Wahl eines dieser Wörter drücken wir aus, wie wir den Satz einordnen, ob wir ihn zum Beispiel wichtig finden. Wenn wir ihn zum Beispiel besonders wichtig finden, dann nennen wir ihn *Hauptsatz* oder *Theorem*. In [Beu97, Satz, Lemma, Korollar, S. 11] wird ausführlicher auf dieses Thema der Wortwahl eingegangen. (Das Buch gibt auch viele Tipps zum Schreiben von Mathematik.)

Beweis des Satzes 1.4: Wir definieren

$$m := 123456789.$$

Wir verwenden den **Modus ponens**:

$x := 7m$ und $y := 1$ sind reelle Zahlen.[14] (elementare Eigenschaften reeller Zahlen)

Wenn $7m$ und 1 reelle Zahlen sind, dann ist $(7m+1)^2 = (7m)^2 + 2 \cdot (7m) \cdot 1 + 1^2$. (Lemma 1.5)

$(7m+1)^2 = (7m)^2 + 2 \cdot (7m) \cdot 1 + 1^2$

Hieraus erhalten wir:

$$n := \frac{(7m+1)^2 - 1}{7} = \frac{(7m)^2 + 2 \cdot 7m \cdot 1 + 1^2 - 1}{7}$$
$$= 7m^2 + 2m. \tag{1.2}$$

Das ist eine natürliche Zahl. Wir verwenden den **Modus ponens**:

n ist natürlich. (Siehe oben.)

Wenn n natürlich ist, dann ist 2^n ganz. (Lemma 1.6(ii))

[13] D. h. der Exponent ist eine natürliche Zahl.

[14] Der Doppelpunkt in $x := 7m$ drückt aus, dass wir die linke Seite als die rechte Seite *definieren*.

2^n ist ganz.

Wir verwenden den **Modus ponens** nochmals:

$\ell := 2^n$ ist ganz. (Siehe oben.)

Wenn ℓ ganz ist, dann ist 3ℓ ganz. (Lemma 1.6(i))

$3\ell = 3 \cdot 2^n = 3 \cdot 2^{\frac{(7 \cdot 123456789+1)^2-1}{7}}$ ist ganz. Das beweist Satz 1.4. □

Bemerkungen. [Beweis des Satzes 1.4]

- Das Zeichen □ verweist auf das Ende des Beweises. Alternativ wird dafür auch die Abkürzung *q.e.d.* = *quod erat demonstrandum* = *was zu beweisen war* verwendet.
- Im obigen Beweis haben wir die Aussage des Satzes 1.4 mittels des Modus ponens sukzessive aus schon bewiesenen Aussagen (Lemmata[15] 1.5 und 1.6) hergeleitet. Diese Beweistechnik heisst *direkter Beweis*.
- Wir haben das Problem, den Satz zu beweisen, vereinfacht, indem wir es in drei Teilprobleme aufgespalten haben:
  - Zeige, dass für natürliches m die Zahl $\frac{(7m+1)^2-1}{7}$ natürlich ist.
  - Zeige, dass jede Potenz mit ganzer Basis und natürlichem Exponenten ganz ist.
  - Zeige, dass das Produkt zweier ganzer Zahlen ganz ist.

  Wir haben also die Methode *Divide et impera!* (Teile und herrsche!) verwendet.
- Im Beweis des Satzes 1.4 haben wir gewisse Details unter den Tisch gewischt, zum Beispiel die Rechenschritte, welche die Gleichheit (1.2) zeigen. Diese Rechenschritte können wir mittels mehrerer Modi ponentes[16] ausführen, indem wir elementare Eigenschaften von Zahlen verwenden, wie zum Beispiel die Assoziativität der Multiplikation ($(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$).

Bemerkungen. [Voraussetzung und Behauptung eines Satzes]

- Wenn ein Satz die Form einer Implikation $A \Rightarrow B$ besitzt, dann nennen wir A die *Voraussetzung* und B die *Behauptung* des Satzes. Beispiel:

[15] *Lemmata* ist die Mehrzahl von *Lemma*.
[16] Das ist die Mehrzahl von *Modus ponens*.

Satz: Wenn 0 gleich 1 ist, dann ist 1 gerade.

In diesem Satz ist 0 *ist gleich* 1 die Voraussetzung und 1 *ist gerade* die Behauptung.

Bemerkungen: Es handelt sich hier tatsächlich um einen Satz, da die Behauptung 1 *ist gerade* unter der falschen Voraussetzung 0 *gleich* 1 bewiesen werden kann. In diesem Beispiel ist die Behauptung falsch.

- Wenn ein Satz die Form *für jedes* x *gilt* $A(x) \Rightarrow B(x)$ besitzt, dann nennen wir $A(x)$ die (*von* x *abhängige*) *Voraussetzung* und $B(x)$ die (*von* x *abhängige*) *Behauptung* des Satzes. Analoges gilt im, wenn ein Satz die Form *für alle* x *und* y *gilt* $A(x, y) \Rightarrow B(x, y)$ besitzt. Beispiel:

  Satz (erste binomische Formel, Lemma 1.5) Für alle x und y gilt: Wenn x und y reelle Zahlen sind, dann gilt:

  $$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

  In diesem Satz ist x *und* y *sind reelle Zahlen* die Voraussetzung und $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ die Behauptung.

Bemerkungen. [Beweise allgemein]

Beweise können *formalisiert* werden. Dabei werden alle Aussagen als Zeichenketten geschrieben, die zum Beispiel die Zeichen $\neg, \wedge, \ldots$ enthalten. Dazu müssen in der Regel viele Zwischenschritte (wie die oben weggelassenen) eingefügt werden. Ein formaler Beweis kann von einem Computerprogramm auf Richtigkeit überprüft werden.

Der Zweck eines Beweises ist es zu garantieren, dass eine Aussage wahr ist. Mit Hilfe von Beweisen können wir dafür sorgen, dass einmal für richtig befundene Sachverhalte für immer Tatsachen bleiben. Darin unterscheidet sich Mathematik von den anderen Wissenschaften.[17]

Der Fokus dieser Vorlesung liegt darauf, Ihnen das analytische Werkzeug zu vermitteln, das Sie für Ihr Studium brauchen. Ein weiteres Ziel ist, dass Sie gewisse mathematische Denk- und Argumentationsweisen erlernen. Daher werden wir gewisse Sätze beweisen.

Kontraposition (oder *Umkehrschluss*) ist die logische Schlussregel, die von der Implikation $A \Rightarrow B$ auf ihr Kontraponiertes $\neg B \Rightarrow \neg A$ schliesst. Diese Regel ist gültig, da die Implikation und ihr Kontraponiertes logisch äquivalent sind. (Siehe Übungsserie 1.) Als ein Beispiel wenden wir diese Regel an, um den folgenden Satz zu beweisen.

[17] Zu Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts gab es in der Mathematik jedoch eine Grundlagenkrise, die durch die Russellsche Antinomie, einen scheinbaren Widerspruch in der Mengenlehre, ausgelöst wurde. (Siehe Bemerkungen 1.14.) Die Krise wurde mit Hilfe des Axiomensystems von Zermelo und Fraenkel überwunden.

Satz 1.8 (Quadratwurzel aus zwei und drei)**.** *Es gilt:*

$$\sqrt{2} < \sqrt{3}$$

Im Beweis dieses Satzes werden wir folgendes schon bewiesenes Lemma verwenden.

Lemma 1.9 (Monotonie des Quadrierens)**.** *Es seien $x, y \geq 0$ reelle Zahlen. Wenn $x \geq y$, dann ist $x^2 \geq y^2$.*

Bemerkung. Das bedeutet, dass die Funktion $f(x) := x^2$ auf dem Intervall $[0, \infty[= [0, \infty)$ (nicht strikt) monoton steigend ist.

Beweis des Satzes 1.8 mittels Kontraposition: Wir betrachten die folgenden Aussagen:

A:="$\sqrt{2} \geq \sqrt{3}$"

B:="$2 \geq 3$"

Gemäss Lemma 1.9 ist die Implikation $A \Rightarrow B$ wahr. Durch Kontraposition erhalten wir aus dieser Implikation, dass $\neg(2 \geq 3) \Rightarrow \neg(\sqrt{2} \geq \sqrt{3})$. Das ist logisch äquivalent zu $2 < 3 \Rightarrow \sqrt{2} < \sqrt{3}$. Diese Implikation ist also wahr.

Modus ponens:

$2 < 3$ (Das folgt aus den Definitionen von $2, 3$ und $<$.)

$2 < 3 \Rightarrow \sqrt{2} < \sqrt{3}$ (Siehe oben.)

$\sqrt{2} < \sqrt{3}$

Das beweist Satz 1.8. □

Eine häufig verwendete Beweismethode ist der *indirekte Beweis = Widerspruchsbeweis*. Um eine Aussage A zu beweisen, nehmen wir dabei an, dass A falsch ist. Daraus leiten wir einen Widerspruch, also eine falsche Aussage her. Das beweist A.

Als ein Beispiel beweisen wir Satz 1.8 nochmals mittels eines Widerspruchs:

Beweis des Satzes 1.8 mittels Widerspruch: Wir nehmen widerspruchsweise an, dass $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ falsch ist, d. h., dass $\sqrt{2} \geq \sqrt{3}$. Mit Hilfe des Lemmas 1.9 und Modus ponens folgt daraus, dass $2 \geq 3$. Diese Aussage ist falsch. (Das folgt aus den Definitionen von $2, 3$ und $\geq$.) Es ergibt sich also ein Widerspruch. Das beweist, dass $\sqrt{2} < \sqrt{3}$, also Satz 1.8. □

Bemerkung. [Kontraposition, Widerspruchsbeweis] Die beiden Beweise des Satzes 1.8 sind eng miteinander verwandt. Es ist allgemein oft so, dass ein Widerspruchsbeweis als ein Beweis mittels Kontraposition umformuliert werden kann.

Als ein weiteres Beispiel beweisen wir den folgenden Satz mittels Widerspruch.

Satz 1.10. *Es gilt:*

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} < 2.$$

Beweis des Satzes 1.10 mittels Widerspruch: Wir nehmen widerspruchsweise an, dass

$$\neg\left(\sqrt{2+\sqrt{3}} < 2\right), \qquad \text{d. h.} \qquad \sqrt{2+\sqrt{3}} \geq 2.$$

Mit Hilfe des Lemmas 1.9 und Modus ponens folgt daraus, dass

$$\begin{aligned} 2+\sqrt{3} &\geq 2^2 = 4, \\ \text{d. h.} \qquad \sqrt{3} &\geq 2. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Mit Hilfe des Lemmas 1.9 und Modus ponens folgt daraus, dass $3 \geq 2^2 = 4$. Diese Aussage ist falsch. Es ergibt sich also ein Widerspruch. Das beweist Satz 1.10. □

Bemerkungen. [Kontraposition, Widerspruchsbeweis]

(i) Es gilt das Prinzip *ex contradictione sequitur quodlibet = ex falso (sequitur) quodlibet = aus etwas Falschem folgt Beliebiges*. Dieses besagt: Wenn eine Annahme A zugleich wahr und falsch wäre, dann könnten wir daraus jede beliebige Aussage B herleiten. Da A falsch ist, ist die Implikation $A \Rightarrow B$ dann nämlich wahr. Da A aber auch wahr ist, folgt mittels des Modus ponens, dass B wahr ist.

(ii) Bei einem Widerspruchsbeweis nehmen wir am Anfang an, dass A falsch ist. Da A tatsächlich aber auch wahr ist, können wir daraus gemäss dem Prinzip *ex falso quodlibet* (Bemerkung (i)) jede beliebige Aussage B ableiten. Unter der Widerspruchsannahme, dass A falsch ist, können wir also jede beliebige Aussage B herleiten. Daher ist es bei einem Widerspruchsbeweis unklar, welche der in Zwischenschritten hergeleiteten "Zwischenaussagen" wahr sind. Vielleicht gilt keine einzige davon. Das ist unpraktisch, falls wir den Beweis später rezyklieren möchten, um etwas Ähnliches zu beweisen. Daher lohnt es sich oft, einen Widerspruchsbeweis als einen direkten Beweis umzuschreiben.

Das nächste Beispiel illustriert Bemerkung (ii).

Beispiel. [falsche "Zwischenaussage" in Widerspruchsbeweis] Im Beweis des Satzes 1.10 haben wir aus einer falschen Annahme ($\neg\big(\sqrt{2+\sqrt{3}} < 2\big)$) die Zwischenaussage (1.3) ($\sqrt{3} \geq 2$) hergeleitet. Wegen des Prinzips *ex falso quodlibet* ist es unklar, ob diese Zwischenaussage wahr ist. (Siehe Bemerkung (ii) oben.) (Ist sie wahr?)

Ein wichtiges Beweisprinzip ist die vollständige Induktion. Um dieses Prinzip zu erklären, sei X eine Menge. Wir schreiben

$$x \in X$$

g. d. w. (genau dann, wenn) x ein Element von X ist. Wir schreiben die Menge der natürlichen Zahlen inklusive null als

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, \ldots\}.$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei $P(n)$ eine Aussage.

Prinzip der vollständigen Induktion: Wir nehmen an, dass gilt:

- $P(0)$ ist wahr.
- Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

Dann ist für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die Aussage $P(n)$ wahr.

Dieses Prinzip folgt aus der Definition der natürlichen Zahlen. (Siehe dafür zum Beispiel die Vorlesung *Grundstrukturen* für Mathematiker/innen.)

Bemerkungen. [Induktion und Dominoeffekt]

(i) Die Idee, warum das Induktionsprinzip wahr ist, ist die folgende: Aufgrund der Induktionsverankerung ist $P(0)$ wahr. Mittels des Induktionsschrittes für $k = 0$ und des Modus ponens folgt daraus, dass $P(1)$ wahr ist. Mittels des Induktionsschrittes für $k = 1$ und des Modus ponens folgt daraus, dass $P(2)$ wahr ist. ... Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ folgt irgendwann, dass $P(n)$ wahr ist. Das macht das Induktionsprinzip plausibel.

(ii) Um diese Idee zu illustrieren, stellen wir uns Dominosteine vor, die mit $0, 1, \ldots$ beschriftet sind und in einer Reihe aufgestellt sind. Wir betrachten die folgende Aussage:

$P(n)$:="Der Dominostein n fällt um."

Wir stossen den Stein 0 an, sodass er umfällt, d. h. $P(0)$ ist erfüllt. Wir nehmen an, dass die Dominosteine genügend nahe beieinander stehen, sodass für alle k

der Stein $k+1$ umfällt, wenn k umfällt, d. h. $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Die Dominosteine fallen dann einer nach dem anderen um, d. h., jeder Stein fällt irgendwann um, d. h. für alle n ist $P(n)$ erfüllt. Das illustriert die Idee aus (i).

Wir benutzen die folgenden Bezeichnungen:

- Induktionsverankerung := Beweis von $P(0)$
- Induktionsschritt := Beweis der Implikation $P(k) \Rightarrow P(k+1)$
- Induktionsannahme = Induktionsvoraussetzung := $P(k)$
- Induktionsbehauptung = $P(k+1)$

Um das Induktionsprinzip zu illustrieren, beweisen wir damit den folgenden Satz.

Satz 1.11 (Summe der natürlichen Zahlen bis zu einer Zahl)**.** *Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$\sum_{i=1}^{n} i := 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1.4}$$

Beweis des Satzes 1.11 mittels Induktion: Wir definieren:

$P(n) :=$"$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$"

Induktionsverankerung: Es gilt $\sum_{i=1}^{0} i =$ leere Summe $:= 0 = \frac{0\cdot(0+1)}{2}$. Also ist $P(0)$ erfüllt.

Induktionsschritt: Sei $k \in \mathbb{N}_0$ so, dass $P(k)$ gilt. Dann gilt

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} i &= \sum_{i=1}^{k} i + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 \qquad \text{(wegen der Induktionsannahme } P(k)\text{)} \\ &= \frac{(k+1)\big((k+1)+1\big)}{2}.\end{aligned}$$

Also gilt die Induktionsbehauptung $P(k+1)$. Die Implikation $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ ist also wahr. Das schliesst den Induktionsschritt ab.

Somit sind die Voraussetzungen des Induktionsprinzip erfüllt. Wir verwenden jetzt den Modus ponens:

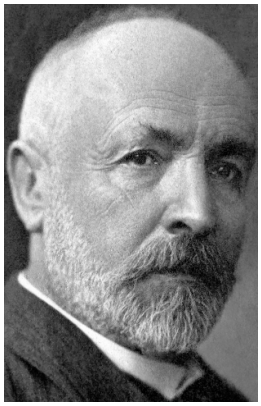


Abbildung 1.1: Georg Cantor, 1845–1918, deutscher Mathematiker.

$P(0)$ und für jedes $k \in \mathbb{N}_0 : P(k) \Rightarrow P(k+1)$ (siehe oben)

Wenn $P(0)$ und für jedes $k \in \mathbb{N}_0 : P(k) \Rightarrow P(k+1)$, dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ $P(n)$. (Induktionsprinzip)

Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $P(n)$.

D. h., für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt die Gleichheit (1.4). Das beweist Satz 1.11. □

1.3 Mengenlehre: Menge, Mengenoperationen, de-morgansche Gesetze

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96b, 1.2] und [Stra, 1.2]. Eine *Menge* ist eine ungeordnete Zusammenfassung von Objekten zu einem Ganzen. Dieser Begriff wurde durch Georg Cantor eingeführt, siehe Abbildung 1.1. Die in einer Menge enthaltenen Objekte nennen wir ihre *Elemente*.

Aufzählende (Mengen-)schreibweise: Seien $x_1, \ldots, x_n$ Objekte. Wir schreiben

$$\{x_1, \ldots, x_n\}$$

für die Menge, die aus den Elementen $x_1, \ldots, x_n$ besteht. Sei X eine Menge und x ein Objekt. Wir schreiben

$$x \in X$$

g. d. w. x ein Element von X ist.

Beispiele 1.12. [Mengen in aufzählender Schreibweise]

(i) $\{0,1\}$ = Menge, die aus den Elementen 0 und 1 besteht

Es gilt $0 \in \{0,1\}$ und $1 \in \{0,1\}$.

(ii) $\emptyset :=$ Menge, von der kein Objekt ein Element ist [18]

$\emptyset$ ist also die Menge, die kein Objekt (als Element) enthält. Sie ist also leer. In aufzählender Schreibweise ist sie gegeben durch $\emptyset = \{\}$.

(iii) $\{\emptyset\}$ = Menge, die aus der leeren Menge besteht. Sie enthält genau ein Element, nämlich $\emptyset$. Die Menge $\{\emptyset\}$ ist daher nicht leer.

(iv) $\{\{0,1\}\}$ = Menge, die genau das Element $\{0,1\}$ enthält. Die Anzahl Elemente der Menge $\{\{0,1\}\}$ ist also 1.

Bemerkungen 1.13. [Menge in aufzählender Schreibweise, jedes Objekt ist eine Menge]

(i) Jede Menge ist ungeordnet, d. h., die Reihenfolge ihrer Elemente spielt keine Rolle. Es gilt zum Beispiel, dass $\{0,1\} = \{1,0\}$.

(ii) Elemente einer Menge dürfen in ihrer Beschreibung mehrfach aufgeführt werden. Es gilt also zum Beispiel:
$$\{0,1,0\} = \{0,1\}.$$

(iii) Ein Element einer Menge darf selbst wieder eine Menge sein. Im Beispiel $\{\emptyset\}$ ist das Element $\emptyset$ selbst wieder eine Menge.

(iv) Wie erwähnt, wird in einem grossen Teil der Mathematik, zum Beispiel in der Analysis, das Axiomensystem von Zermelo und Fraenkel verwendet. In diesem Axiomensystem ist *jedes Objekt* eine Menge. Insbesondere ist jedes Element einer Menge wieder eine Menge. Ein solches Element darf also nicht nur eine Menge sein, es *muss* eine Menge sein. Siehe die Vorlesung *Grundstrukturen* für D-MATH.

Unendliche Mengen, also Mengen mit unendlich vielen Elementen, können wir strikt genommen nicht in aufzählender Schreibweise angeben, da wir nie mit dem Aufzählen fertig werden. Intuitiv ist jedoch manchmal dennoch klar, was mit dieser Schreibweise gemeint ist.

Beispiele. [unendliche Mengen in "aufzählender Schreibweise"]

$\mathbb{N}_0 = \{0,1,\ldots\}$ = Menge der natürlichen Zahlen inklusive 0. Die Elemente dieser Menge sind die Zahlen $0, 1, \ldots$.

[18] "$A := B$" bedeutet, dass wir A als B definieren.

$\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ = Menge der natürlichen Zahlen ohne 0

In der Analysis zentral ist

$$\mathbb{R} := \big\{\text{reelle Zahl}\big\},$$

die Menge der reellen Zahlen.

Beschreibende (Mengen-)Schreibweise: Eine *Aussageform* ist eine Aussage $P(x)$, die von einer Variablen x abhängt. Wir schreiben

$$\big\{x \,\big|\, P(x)\big\} \tag{1.5}$$

für die Menge[19] aller x, für die $P(x)$ gilt.

Bemerkung. [beschreibende Mengenschreibweise] Alternativ wird statt | manchmal (zum Beispiel in [Stra]) ein ; verwendet, d. h. die Menge (1.5) wird als

$$\big\{x; P(x)\big\}$$

geschrieben.

Beispiele. [Mengen in beschreibender Mengenschreibweise]

- $\big\{x \,\big|\, x$ ist Student oder Studentin in dieser Vorlesung$\big\}$ = Menge aller Studentinnen und Studenten in dieser Vorlesung
- $\big\{n \,\big|\, n \in \mathbb{N}_0 \wedge n$ ist gerade$\big\} = \big\{n \in \mathbb{N}_0 \,\big|\, n$ ist gerade$\big\} = \big\{0, 2, 4, \dots\big\}$
- $\big\{m \,\big|\,$ Es gibt ein $n \in \mathbb{N}_0$ so, dass $m = (-1)^n\big\} = \big\{(-1)^n \,\big|\, n \in \mathbb{N}_0\big\} = \{-1, 1\}$
- Seien a und b reelle Zahlen[20] oder gleich $\pm\infty$ so, dass $a \leq b$. Wir definieren das *offene Intervall mit Grenzen a und b* als die Menge

  $$]a, b[:= (a, b) := \big\{x \in \mathbb{R} \,\big|\, a < x < b\big\}.$$

  Im Fall $a, b \in \mathbb{R}$ definieren wir das *abgeschlossene Intervall mit Grenzen a und b* als die Menge

  $$[a, b] := \big\{x \in \mathbb{R} \,\big|\, a \leq x \leq b\big\}.$$

  Wir definieren das *linksoffene Intervall* $]a, b] = (a, b]$ und das *rechtsoffene Intervall* $[a, b[= [a, b)$ analog. Diese zwei Intervalle nennen wir auch *halboffen*.

  Zum Beispiel ist das offene Intervall $]a, \infty[$ die Menge aller reellen Zahlen x, die grösser als a sind.

[19] In gewissen Fällen ist das keine wohldefinierte Menge. Siehe Bemerkungen 1.14 (Russellsche Antinomie).

[20] Wir werden den Begriff einer reellen Zahl in Definition 2.2 festlegen.

Bemerkungen. [unendlich]

- $\infty = +\infty$ ("unendlich") und $-\infty$ sind Hilfszeichen, die per definitionem für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichungen $-\infty < x < \infty$ erfüllen. Das Zeichen ∞ ist keine Zahl. Es hat keine tiefe mathematische oder philosophische Bedeutung.

- Die Notation $]a, b[$ hat gegenüber (a, b) den Vorteil, dass wir $]a, b[$ nicht mit dem geordneten aus a und b bestehenden Paar verwechseln können. (Siehe Definition 1.16.) Die Notation geht auf Nicolas Bourbaki zurück.[21]

Bemerkungen 1.14. [rückbezügliche Definition einer "Menge", Russellsche Antinomie]

- Für gewisse Aussageformen $P(x)$ ist die Zusammenfassung von Objekten gegeben durch (1.5) keine Menge. Ein Beispiel dafür ist:

  $P(x) := x \notin x$

  (1.5) ist dann gegeben durch

  $X := \{x \mid x \notin x\}$,

  also die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten. Diese "Menge" gibt es nicht. Um das zu sehen, nehmen wir widerspruchsweise an, dass es sie gibt. Falls $X \in X$, dann gilt $X \notin X$, ein Widerspruch. Falls $X \notin X$, dann gilt $X \in X$, ein Widerspruch. In beiden Fällen erhalten wir also einen Widerspruch. Gemäss dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten decken die beiden Fälle alle Möglichkeiten ab. Wir erhalten also immer einen Widerspruch. Unsere Annahme, dass es die Menge X gibt, ist daher falsch.

- Die *Russellsche Antinomie* besteht im Widerspruch, der entsteht, wenn wir davon ausgehen, dass es die obige Menge X gibt.

- Das Problem mit der obigen "Menge" ist, dass in ihrer Definition die rückbezügliche Bedingung $x \notin x$, d. h. "x ist nicht Element von sich selbst" auftritt. Mit *rückbezüglich* meinen wir hierbei, dass in dieser Bedingung x auf sich selbst Bezug nimmt. Manche rückbezüglichen Definitionen von Mengen sind also nicht sinnvoll.

- Eine anschauliche Analogie zur Russellschen Antinomie ist das Barbier-Paradoxon: Wir definieren einen *Barbier* als jemanden, der genau jene rasiert, die sich nicht selbst rasieren.

[21] *Nicolas Bourbaki* ist das Pseudonym eines Autorenkollektivs vorwiegend französischer Mathematiker, das seit 1934 an einem vielbändigen Lehrbuch der Mathematik arbeitete.

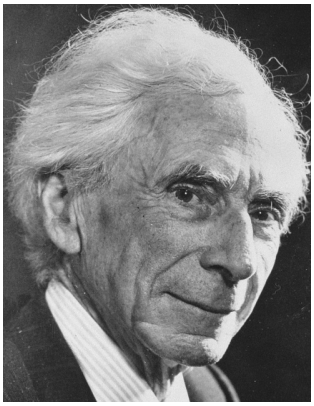


Abbildung 1.2: Bertrand Russell, 1872–1970, britischer Philosoph und Logiker.

Frage: Rasiert ein Barbier sich selbst?

Wir stellen die Analogie zwischen der Russellschen Antinomie und dem Barbier-Paradoxon dadurch her, dass wir $X, \in$ durch *Barbier, wird rasiert durch* ersetzen.

- Die Russellsche Antinomie ist analog zum Lügner-Paradox, in welchem wir die Äusserung "Dieser Satz ist falsch." betrachten. (Siehe Bemerkungen 1.2.) In beiden Fällen ist das Problem, dass eine Äusserung oder eine Bedingung in einer Definition rückbezüglich ist.

- Die Russellsche Antinomie wird in der modernen Mathematik dadurch vermieden, dass statt (1.5) nur Mengen der Form

$$\big\{x \in X \,\big|\, P(x)\big\}$$

betrachtet werden, wobei X eine Menge ist.

Mengenoperationen, Teilmengenrelation

Seien A und B Mengen. Wir definieren

$$\begin{aligned} A \cap B &:= \big\{x \,\big|\, x \in A \wedge x \in B\big\} && = \text{Durchschnitt} \\ A \cup B &:= \big\{x \,\big|\, x \in A \vee x \in B\big\} && = \text{Vereinigung} \\ A \setminus B &:= \big\{x \in A \,\big|\, x \notin B\big\} && = \text{Differenz} \end{aligned}$$

Wir nennen A eine *Teilmenge* von B g. d. w. jedes Element von A auch in B liegt. In diesem Fall schreiben wir

$$A \subseteq B.$$



Abbildung 1.3: Augustus De Morgan, 1806–1871, englischer Mathematiker.

Wir fixieren jetzt eine Menge X und betrachten nur Teilmengen A von X. Wir nennen X die *Grundmenge* und $X \setminus A$ das *Komplement von A in X*. Wir schreiben dafür

$$A^{\complement} := X \setminus A.$$

A und B heissen *gleich* g. d. w. sie dieselben Elemente enthalten. In diesem Fall schreiben wir

$$A = B.$$

Satz 1.15 (de-morgansche Gesetze)**.** *Für alle $A, B \subseteq X$ gilt*

$$(A \cap B)^{\complement} = A^{\complement} \cup B^{\complement}, \tag{1.6}$$

$$(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement}. \tag{1.7}$$

Dieser Satz ist nach Augustus De Morgan benannt, siehe Abbildung 1.3.

Beweis des Satzes 1.15: Siehe Übungsserie 2. ((1.6) folgt aus (1.1).) □

Das *kartesische Produkt* zweier Mengen besteht aus allen Paaren von Elementen der beiden Mengen. Dieses Produkt werden wir verwenden, um den Begriff einer Funktion zu definieren. Um das kartesische Produkt zu erklären, betrachten wir Objekte $x_1, \ldots, x_n$.

Definition 1.16 (n-Tupel, Paar, Tripel)**.** *Wir definieren das aus $x_1, \ldots, x_n$ bestehende (*geordnete*) n-*Tupel *als den Ausdruck $(x_1, \ldots, x_n)$. Falls $n = 2$, dann nennen wir (x_1, x_2) das aus x_1 und x_2 bestehende (*geordnete*)* Paar*. Falls $n = 3$, dann nennen wir (x_1, x_2, x_3) das aus x_1, x_2 und x_3 bestehende (*geordnete*)* Tripel*.*

Bemerkung. [n-Tupel] Zwei n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ und $(y_1, \ldots, y_n)$ sind genau dann gleich, falls $x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n$. Die Reihenfolge der Objekte $x_1, \ldots, x_n$ spielt also eine Rolle.

Seien X und Y Mengen.

Definition 1.17 (kartesisches Produkt, kartesische Potenz)**.** *Wir definieren das (*kartesische*)* Produkt *von X und Y als die Menge aller Paare (x, y), wobei x in X liegt und y in Y, d. h.*

$$X \times Y := \big\{(x, y) \,\big|\, x \in X,\, y \in Y\big\}.$$

*Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die n-te (*kartesische*)* Potenz *von X als die Menge*

$$X^n := \big\{(x_1, \ldots, x_n) \,\big|\, x_1, \ldots, x_n \in X\big\}.$$

Beispiele. [kartesisches Produkt, kartesische Potenz]

- Sei $X := \{0, 1\}$ und $Y := \big\{\text{Apfel}, \text{Haus}, \text{Berg}\big\}$. Das kartesische Produkt von X und Y ist gegeben durch

$$X \times Y = \big\{(0, \text{Apfel}), (0, \text{Haus}), (0, \text{Berg}), (1, \text{Apfel}), (1, \text{Haus}), (1, \text{Berg})\big\}.$$

- Wir nennen $\mathbb{R}^n$, die n-te kartesische Potenz von $\mathbb{R}$, den *n-dimensionalen Standardraum* (oder *Koordinatenraum*). Es gilt:
  - $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R} =$ Gerade
  - $\mathbb{R}^2 = \big\{(x_1, x_2) \,\big|\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\big\} =$ Ebene[22]
  - $\mathbb{R}^3 = \big\{(x_1, x_2, x_3) \,\big|\, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\big\} =$ (dreidimensionaler) Raum

Bemerkungen. [kartesische Potenz, Komponenten eines Punktes im Raum]

- Für $n = 2$ ist $X^2 = X \times X$. Für $n = 3$ können wir X^3 mit dem mehrfachen Produkt $(X \times X) \times X$ identifizieren. (Wie?) Analoges gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$.
- Sei $x \in X^n$. Wir können x auf eine eindeutige Weise als ein n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ schreiben. Wir nennen x_i die *i-te Komponente von x*. Zum Beispiel ist die erste Komponente des Punktes $x := (3, 0) \in \mathbb{R}^2$ gegeben durch $x_1 = 3$.

[22] Manchmal wird das die *euklidische* Ebene genannt. Das ist ungeschickt, da der Begriff *euklidische Ebene* auch für $\mathbb{R}^2$ *zusammen mit dem euklidischen inneren Produkt* verwendet wird. (Siehe die Vorlesung *Lineare Algebra*, ITET und RW, 1. Semester.)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wichtige Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ sind Bälle (=Kugeln) und Sphären. Um diese Begriffe zu definieren, benötigen wir Folgendes. Wir definieren die *euklidische Norm* eines Vektors $v \in \mathbb{R}^n$ als

$$\|v\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}. \tag{1.8}$$

Für jedes $a \in \mathbb{R}$ schreiben wir

$$[a, \infty] := [a, \infty[\cup \{\infty\}.$$

Definition 1.18 (offener und abgeschlossener Ball, Sphäre, Kreisscheibe, Kreis)**.** *Seien $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $r \in [0, \infty]$. Wir definieren den* offenen Ball *(oder* (Voll-)kugel*)* um x_0 mit Radius r *als die Menge aller Punkte in $\mathbb{R}^n$, die (euklidischen) Abstand zu x_0 kleiner als r haben, d. h. als die Menge*

$$B_r(x_0) := B_r^n(x_0) := \big\{x \in \mathbb{R}^n \,\big|\, \|x - x_0\| < r\big\}. \tag{1.9}$$

Wir definieren den abgeschlossenen Ball um x_0 mit Radius r *als die Menge*

$$\overline{B}_r(x_0) := \overline{B}_r^n(x_0) := \big\{x \in \mathbb{R}^n \,\big|\, \|x - x_0\| \leq r\big\}. \tag{1.10}$$

Wir definieren die Sphäre mit Mittelpunkt x_0 und Radius r *als die Menge aller Punkte in $\mathbb{R}^n$, die Abstand r zu x_0 haben, d. h. als die Menge*

$$S_r^{n-1}(x_0) := \big\{x \in \mathbb{R}^n \,\big|\, \|x - x_0\| = r\big\}. \tag{1.11}$$

Im Fall $n = 2$ nennen wir $B_r^2(x_0)$ ($\overline{B}_r^2(x_0)$) auch die offene *(*abgeschlossene*)* Kreisscheibe um x_0 mit Radius r. *Wir nennen $S_r^1(x_0)$ den* Kreis um x_0 mit Radius r.

Bemerkung. Der offene Ball um x_0 mit Radius r ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, d. h. $B_r^n(x_0) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Bemerkungen. [Fall $r = 0$ und $r = \infty$]

- Es gilt

  $$B_0(x_0) = \emptyset, \qquad \overline{B}_0(x_0) = \{x_0\}, \qquad B_\infty(x_0) = \mathbb{R}^n, \qquad \overline{B}_\infty(x_0) = \mathbb{R}^n.$$

  Also ist $\mathbb{R}^n$ sowohl ein offener als ein abgeschlossener Ball.

- Die Bedingungen $\|x - x_0\| < \infty$ und $\|x - x_0\| \leq \infty$ sind sinnvoll, obwohl ∞ keine Zahl ist.

- Es gibt kein $x \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\|x - x_0\| = r := \infty$, d. h., diese Möglichkeit in der Definition von $\overline{B}_\infty(x_0)$ "wird nicht ausgenutzt".

Bemerkung 1.19. [Kreis versus Kreisscheibe] Ein Kreis ist eine Kurve, d. h. ein eindimensionales Objekt. Er ist der Rand der Kreisscheibe.[23] Diese Definition des Begriffes eines Kreises ist in der modernen höheren Mathematik gebräuchlich. In der elementaren Geometrie ist mit *Kreis* stattdessen oft die Kreis*scheibe* gemeint.

1.4 Quantor

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96b, 1.1] und [Stra, 1.2]. Quantoren sind *logische Operatoren*, die angeben, wie viele Objekte x eine Bedingung $P(x)$ erfüllen. Die zwei wichtigsten Quantoren sind die folgenden:

Notation	Bedeutung	Bezeichnung
$\forall$	"für jedes" = "für alle"	Allquantor
$\exists$	"es gibt"	Existenzquantor

Beispiele 1.20. [Quantoren]

(i) $\forall n \in \mathbb{N}_0 : n \geq 0$ "Für jede natürliche Zahl n gilt, dass $n \geq 0$." Wahr.

(ii) $\exists n \in \mathbb{N}_0 : n > 0$ "Es gibt eine natürliche Zahl grösser null." Wahr. Grund: $n = 1$ ist zum Beispiel eine solche Zahl.

Bemerkung: "es gibt ein x ..." schliesst die Möglichkeit ein, dass es mehrere solche x gibt.

(iii) $\forall m \in \mathbb{N}_0 \exists n \in \mathbb{N}_0 : m \leq n$ "Für jede natürliche Zahl m gibt es eine natürliche Zahl n so, dass $m \leq n$ gilt." Wahr. (Warum? Wie können wir n wählen?)

(iv) $\exists n \in \mathbb{N}_0 \forall m \in \mathbb{N}_0 : m \leq n$ "Es gibt eine natürliche Zahl n so, dass für jede natürliche Zahl m gilt, dass $m \leq n$." = "Es gibt eine grösste natürliche Zahl." Falsch. (Warum? Im Beispiel 1.22(ii) unten werden wir das formal zeigen.)

Bemerkungen. [Reihenfolge der Quantoren, Abhängigkeit] An den Beispielen (iii),(iv) können wir sehen, dass die Reihenfolge der Quantoren eine Rolle spielt. Im Beispiel (iii) darf n von m abhängen, im Beispiel (iv) nicht.

[23] Wir verwenden hier den anschaulichen Begriff des Randes. In Definition 4.23 werden wir diesen Begriff präzise fassen.

Bemerkung 1.21. [Verneinung einer quantifizierten Aussageform] Sei X eine Menge und $P(x)$ eine Aussageform. Es gilt:

$$\neg\big(\forall x \in X : P(x)\big) \equiv \exists x \in X : \neg P(x), \tag{1.12}$$
$$\neg\big(\exists x \in X : P(x)\big) \equiv \forall x \in X : \neg P(x) \tag{1.13}$$

Hierbei bedeutet $\equiv$ logische Äquivalenz, d. h., für jede Aussageform $P(x)$ sind die Wahrheitswerte der linken und rechten Seite gleich. Bei der Negation werden also die beiden Quantoren $\forall$ und $\exists$ vertauscht.

Beispiele 1.22. [Verneinung einer quantifizierten Aussageform]

(i) Gemäss (1.12) gilt für die Verneinung der Aussage "$\forall n \in \mathbb{N}_0 : n \geq 0$", dass[24]

$$\neg\big(\forall n \in \mathbb{N}_0 : n \geq 0\big) \equiv \exists n \in \mathbb{N}_0 : \neg n \geq 0 \equiv \exists n \in \mathbb{N}_0 : n < 0. \tag{1.14}$$

(Wir verwenden hierbei $P(x = n)$:="$n \geq 0$".) Gemäss Bemerkung 1.20(i) ist die linke Seite von (1.14) falsch. Also ist die rechte Seite falsch, d. h., es gibt keine natürliche Zahl kleiner null.

(ii) Es gilt

$$\neg\,(\forall m \in \mathbb{N}_0 \exists n \in \mathbb{N}_0 : m < n) \tag{1.15}$$
$$\equiv \exists m \in \mathbb{N}_0 \neg\,(\exists n \in \mathbb{N}_0 : m < n) \text{ (gemäss (1.12) mit } P(x = m)\text{:="}\exists n \in \mathbb{N}_0 : m < n\text{")}$$
$$\equiv \exists m \in \mathbb{N}_0\, \forall n \in \mathbb{N}_0 : \neg(m < n) \qquad \text{(gemäss (1.13))}. \tag{1.16}$$

Die Aussage "$\forall m \in \mathbb{N}_0 \exists n \in \mathbb{N}_0 : m < n$" ist wahr. (Warum? Wie können wir n wählen?) Daher ist (1.15) falsch. Also ist (1.16) falsch, also

$$\neg \exists m \in \mathbb{N}_0\, \forall n \in \mathbb{N}_0 : m \geq n$$

ist wahr. Wir können diese Aussage wie folgt umschreiben, indem wir die Variablen m und n vertauschen:

$$\neg \exists n \in \mathbb{N}_0\, \forall m \in \mathbb{N}_0 : n \geq m \tag{1.17}$$

Hierbei haben wir das *Goethe-Prinzip* verwendet. (Siehe Prinzip 1.23 unten.) Somit haben wir die Aussage von Beispiel 1.20(iv) bewiesen.

Prinzip 1.23 (Goethe, [Goe], Vers 3457)**.** *Name ist Schall und Rauch.*

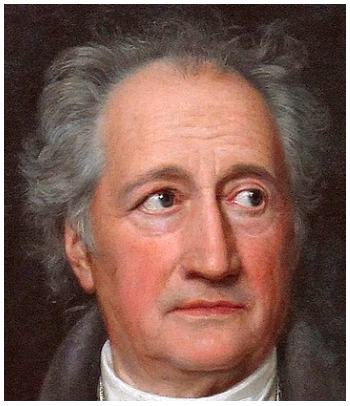


Abbildung 1.4: Johann Wolfgang von Goethe, 1749-1832, Deutscher Dichter.

Dieses Prinzip ist nach Johann Wolfgang von Goethe benannt. (Siehe Abbildung 1.4.) Es bedeutet, dass der Name einer Variable keine Rolle spielt und daher ausgetauscht werden darf.[25]

1.5 Die Konzepte *Begriff* und *Definition*

Der letzte Abschnitt enthält einige *Definitionen* von *Symbolen* als bestimmte *Begriffe*. So haben wir in Beispiel 1.12(ii) das Symbol $\emptyset$ als den Begriff *Menge, von der kein Objekt ein Element ist* definiert. (Das ist die leere Menge.) Allgemein ist ein *Symbol* ein *Zeichen*, ein *Wort* oder eine *Wortkombination*. Es gibt folgende Arten (*mathematischer*) *Begriffe*:

- *Objektbegriff* = *Gegenstandsbegriff* = (mathematischer) Ausdruck, der ein (mathematisches) Objekt beschreibt, das existiert und eindeutig ist
- (*einstelliges*) *Prädikat* = *Eigenschaft* = Ausdruck, der eine Eigenschaft eines Objektes beschreibt
- *Relation* = *Beziehung* = Ausdruck, der eine Beziehung zwischen Objekten beschreibt

Beispiele. [(mathematische) (Nicht-)Begriffe]

[24]Wir haben hier eine Kette von Äquivalenzen $A_1 \equiv A_2 \equiv A_3$. Damit meinen wir, dass $A_1 \equiv A_2$ und $A_2 \equiv A_3$ gilt. Daraus folgt, dass $A_1 \equiv A_3$ gilt. (Warum?)

[25]Goethe sagte übrigens auch Folgendes:

"Die Mathematiker sind eine Art Franzosen: redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsobald ganz etwas anders."

- *Menge, von der kein Objekt ein Element ist* ist ein Objektbegriff. Es existiert nämlich genau eine solche Menge. Das folgt aus den Axiomen von Zermelo und Fraenkel.[26]
- *ist leer* ist ein Prädikat.
- *ist kleiner als* und *ist Teilmenge von* sind Relationen zwischen zwei Objekten.
- *Menge, die leer ist und nicht leer ist* ist *kein* Objektbegriff, da eine solche Menge nicht existiert. *Menge, welche die leere Menge (als Element) enthält* ist *kein* Objektbegriff, da diese Menge nicht eindeutig ist. Zum Beispiel sind $\{\emptyset\}$ und $\{\emptyset, 1\}$ verschiedene Objekte, die beide durch *Menge, welche die leere Menge enthält* beschrieben werden.

Mit *reservierten Zeichen* meinen wir die folgenden:

- die logischen Verknüpfungen $\neg\ \wedge\ \vee\ \Rightarrow$
- die Quantoren $\forall\, \exists$
- das Gleichheitszeichen $=$
- das Elementzeichen $\in$
- die Klammern $(\ )$

Bemerkungen 1.24. [Formalisierung, Objekt, Menge]

(i) Jeder mathematische Begriff kann formalisiert werden, d. h., durch reservierte Zeichen, Variablen und schon definierte Symbole ausgedrückt werden. Zum Beispiel kann *Menge, von der kein Objekt ein Element ist* als

$$\neg\exists y(y \in x) \tag{1.18}$$

formalisiert werden. Hierbei steht x für die Menge und y für das Objekt.

(ii) Im formalisierten Ausdruck $\neg\exists y(y \in x)$ kommt kein Zeichen vor, das angibt, dass x eine Menge ist. Ein solches Zeichen ist nicht nötig, da im Axiomensystem von Zermelo und Fraenkel jedes Objekt eine Menge ist, d. h. jede Variable für eine Menge steht. (Siehe Bemerkung 1.13(iv).)

(iii) Wir kürzen $\neg\exists$ durch $\nexists$ ab.

[26] Siehe die Vorlesung *Grundstrukturen*.

Wir identifizieren Begriffe, die dasselbe Objekt beschreiben, miteinander.[27]

Beispiel. [Identifikation von Begriffen] Wir identifizieren *Menge, von der kein Objekt ein Element ist*, d. h. (1.18), mit *Menge, von der jedes Objekt kein Element ist*, d. h. $\forall y(y\neg\in x)$.

Bemerkung. Wir kürzen $\neg\in$ als $\notin$ ab.

Seien S ein Symbol und A ein Begriff, der für ein Objekt steht. Die *Definition von S durch A* ist die *Gleichsetzung* von S mit dem eindeutigen x, das durch A beschrieben wird. Formal ist diese Definition gegeben durch

$$\forall x\big(S = x \Leftrightarrow A\big).$$

Wir nennen S das *Definiendum* (= zu Definierendes) und A das *Definiens* (= Definierendes). Mit einer Definition legen wir also das Definiendum durch das Definiens fest.

Das Symbol S darf *nicht* gleich einem reservierten Zeichen, einer Variable oder einem schon definierten Symbol sein. Das Definiens darf reservierte Zeichen, Variablen und schon definierte Symbole enthalten. Es darf keine weiteren Symbole enthalten. Informell dürfen Zeichen auch als Wörter ausgeschrieben werden, zum Beispiel $\neg$ als *nicht*. Wir nehmen die Aussage $\forall x\big(S = x \Leftrightarrow A\big)$ zu unseren Axiomen hinzu.

Beispiele 1.25. [Definition eines Objektes, $\emptyset = 0, 1, 2, 3$]

(i) Die Definition von $\emptyset$ durch den Begriff $\nexists y(y \in x)$ ist gegeben durch:

$$\forall x\big(\emptyset = x \Leftrightarrow \nexists y(y \in x)\big)$$

Informell: $\emptyset :=$ Menge, von der kein Objekt ein Element ist

$\emptyset$ ist das Definiendum und *Menge, von der kein Objekt ein Element ist* das Definiens. (Vergleichen Sie das mit Beispiel 1.12(ii).)

(ii) Sei $x_1, \ldots, x_n$ Objekte. Wir definieren informell:

$$\{x_1, \ldots, x_n\} := \text{Menge, die genau die Elemente } x_1, \ldots, x_n \text{ enthält}$$

Seien S ein schon definiertes Symbol und S' ein noch nicht definiertes Symbol, das kein reserviertes Zeichen und keine Variable ist. Die *Definition von S' als S* ist die Gleichsetzung

$$S' = S.$$

[27] Das heisst, wir setzen sie gleich.

Um klarzumachen, dass es sich hierbei um eine Definition handelt, schreiben wir in der Praxis einen Doppelpunkt vor dem Gleichheitszeichen, also

$$S' := S.$$

Wir nennen S' das *Definiendum* und S das *Definiens*.

Beispiel 1.26. Wir definieren

$$0 := \emptyset.$$

Da wir $\emptyset$ schon definiert haben, ist diese Definition zulässig.

Wir definieren

$$1 := \{0\}.$$

Da wir 0 soeben und $\{\}$ schon in Beispiel 1.25(ii) definiert haben, ist diese Definition zulässig. Wir definieren

$$2 := \{0, 1\}, \qquad 3 := \{0, 1, 2\}.$$

Bemerkungen. [die natürlichen Zahlen $0, 1, 2, 3$]

- Die wie in Beispiel 1.26 definierten Mengen $0, 1, 2, 3$ sind die ersten vier natürlichen Zahlen. (Für eine Definition der *Menge aller* natürlichen Zahlen siehe die Vorlesung Grundstrukturen des D-MATH.)

- Wir schreiben *null* für den *intuitiven* Begriff der Null. Intuitiv besitzt die Menge $\emptyset$ null Elemente. Sie erfasst daher den Kernaspekt des intuitiven Begriffes *null*. Es ist daher intuitiv sinnvoll, 0 als $\emptyset$ zu definieren. Entsprechendes gilt für $1, 2, 3$. Zum Beispiel enthält die Menge 3 die *drei* Elemente $0, 1, 2$.

- Die wie in Beispiel 1.26 definierten Zahlen $0, 1, 2, 3$ sind *Mengen*, so wie jedes mathematische Objekt. (Siehe Bemerkung 1.13(iv).) Das ist intuitiv in Ordnung, da es nicht wesentlich ist, was für eine Art Objekt eine natürliche Zahl ist. Es reicht, dass 0 auf eine bestimmte Art mit *null* übereinstimmt[28], nämlich bezüglich der Anzahl Elemente.

- Die Idee, die Zahlen $0, 1, 2, 3$ wie in Beispiel 1.26 zu definieren, geht auf John von Neumann zurück. Siehe Abbildung 1.5.

Bemerkungen. [mathematische versus philosophische Konzepte eines Begriffes und einer Definition, Goethe-Prinzip, Wahl des Symbols, *per definitionem*]

[28] und entsprechend für $1, 2, 3$



Abbildung 1.5: John von Neumann, 1903–1957, ungarisch-US-amerikanischer Mathematiker.

- Ein *philosophischer Begriff* ist ein Paar (W, G), wobei W ein Wort ist und G der Gedankeninhalt, durch welchen W begriffen wird. Im Gegensatz dazu ist ein *mathematischer Begriff* ein mathematischer Ausdruck A, der ein mathematisches Objekt beschreibt, das existiert und eindeutig ist, oder der eine mathematische Eigenschaft oder Beziehung beschreibt. Der Ausdruck A spielt die Rolle des Gedankeninhaltes G, kann aber im Gegensatz zu G formalisiert werden. (Siehe Bemerkung 1.24.)

- Eine *philosophische Definition* ist die *Bestimmung* eines philosophischen Begriffes oder die *Erklärung* des Wesens einer Sache. Im Gegensatz dazu ist eine *mathematische Definition* (eines Objektes) eine *willkürliche Gleichsetzung* $\forall x\big(S = x \Leftrightarrow A\big)$, die den beschriebenen formalen Regeln gehorcht. Das Symbol S ist beliebig, ganz nach dem Goethe-Prinzip 1.23 *Name ist Schall und Rauch.*

  So bestimmen wir bei der Definition von $\emptyset$ in Beispiel 1.25(i) keinen philosophischen Begriff (W, G) und auch nicht das Symbol $\emptyset$ oder den Ausdruck *Menge, von der kein Objekt ein Element ist.* Wir erklären auch nicht das Wesen einer Sache oder von $\emptyset$ oder *Menge, von der kein Objekt ein Element ist.* Stattdessen setzen wir das Symbol $\emptyset$ der Menge gleich, von der kein Objekt ein Element ist. Statt des Symbols $\emptyset$ dürfen wir ein beliebiges anderes Zeichen verwenden, zum Beispiel €. Wir dürfen also definieren:

  $$€ := \text{Menge, von der kein Objekt ein Element ist}$$

  (Wir erklären hier nicht das Wesen von €.) Kurz gesagt:

  Sie dürfen jederzeit irgendein Symbol irgendwie mathematisch definieren.[29]

[29]Das Symbol darf kein reserviertes Zeichen und keine Variable sein. Es darf noch nicht definiert sein.

- Falls möglich, wählen wir in der Praxis beim Definieren ein Symbol, das bereits für eine intuitive Version des Begriffes verwendet wird. So verwenden wir in Beispiel 1.26 in der Definition $0 := \emptyset$ das Symbol 0, das schon für den intuitiven Begriff *null* verwendet wurde, bevor von Neumann die Definition $0 := \emptyset$ einführte.
- Nachdem wir $\forall x\big(S = x \Leftrightarrow A\big)$ definiert haben, ist S ein für alle Mal gleich dem eindeutigen x, das A erfüllt. Das gilt dann *per definitionem*, d. h. definitionsgemäss. Also:

  Frage. *Warum ist* $0 = \emptyset$*?*

  Antwort. *Weil wir* 0 *als* $\emptyset$ *definiert haben.*

Es ist wichtig, dass das Definiens ein mathematischer Begriff ist, dass das beschriebene Objekt also existiert und eindeutig ist.

Beispiel. [Nicht-Definition]

$$M := \text{Menge, die gleich } \emptyset \text{ ist und nicht gleich } \emptyset \text{ ist}$$

ist keine Definition, da das durch das Definiens beschriebene Objekt nicht existiert.

Seien jetzt P ein Symbol und A ein Prädikat (= Eigenschaft) eines Objektes x. Die *Definition* von P als A ist gegeben durch

$$\forall x\big(P(x) \Leftrightarrow A\big).$$

Seien jetzt R ein Symbol und A eine Relation (= Beziehung) zwischen zwei Objekten. Die *Definition* von R als A ist gegeben durch

$$\forall x \forall y\big(xRy \Leftrightarrow A\big).$$

Beispiele. [Definition einer Eigenschaft und einer Beziehung]

- Wir definieren das Symbol E als die Eigenschaft *ist leer*, d. h.

  $$\forall x\big(E(x) \Leftrightarrow \nexists y(y \in x)\big).$$

  (x steht hier für eine Menge.)
- Wir definieren das Symbol $\ni$ als die Beziehung

  $$\forall x \forall y\big(x \ni y \Leftrightarrow y \in x\big).$$

  $\ni$ ist der Begriff *enthält (als Element).*

Eine *Zirkeldefinition* ist eine Kette von vermeintlichen Definitionen, bei der an einer Stelle im Definiens ein Symbol vorkommt, das erst später in der Kette definiert wird. Wir definieren dann also "im Kreis herum". Eine solche Definitionskette ist nicht erlaubt, da ein Definiens ein Symbol enthält, das wir noch nicht definiert haben. Beispiele für Zirkeldefinitionen sind:

$$
\begin{aligned}
&S_0 := S_0 \\
&S_0 := S_1, \qquad S_1 := S_0 \\
&S_0 := S_2, \qquad S_1 := S_0, \qquad S_2 := S_1 \\
&S := \begin{cases} 1, & \text{falls } S = 0, \\ 0, & \text{falls } S \neq 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

1.6 Funktion: Injektivität, Surjektivität, Bijektivität, Umkehrfunktion, Verknüpfung von Funktionen

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96b, 2.1, 2.2] und [Stra, 1.3]. Es seien X und Y Mengen. Intuitiv ist eine *Funktion* (oder *Abbildung*) *von X nach Y* eine Vorschrift, die jedem Element $x \in X$ ein eindeutiges Element $y \in Y$ zuordnet. Die folgende Definition präzisiert diesen Begriff.

Definition 1.27 (Funktion, Definitionsbereich, Zielbereich, Graph, Wert in einem Punkt)**.** *Eine* Funktion *(oder* Abbildung*) ist ein Tripel*

$$f = (X, Y, G),$$

wobei X und Y Mengen sind und $G \subseteq X \times Y$ eine Teilmenge so, dass es für jedes $x \in X$ genau ein $y \in Y$ gibt so, dass $(x, y) \in G$.

Sei $f = (X, Y, G)$ eine Funktion. Wir definieren:

- $\operatorname{dom} f := \operatorname{dom}(f) :=$ *Definitionsbereich von $f := X$*
- $\operatorname{codom} f := \operatorname{codom}(f) :=$ *Zielbereich von $f := Y$*
- *Graph von $f := G$*
- *für $x \in X$: Wert von f an der Stelle $x := f(x) := y$, wobei y das eindeutige Element von Y ist so, dass $(x, y) \in G$.*
- $f : X \to Y :=$ *"f ist eine Funktion mit* $\operatorname{dom} f = X$ *und* $\operatorname{codom} f = Y$*"*

Bemerkungen. [Definitions- und Zielbereich, Graph]

- "dom(f)" steht für englisch *domain* = Definitionsbereich.
- "codom(f)" steht für englisch *codomain* = Zielbereich.
- Falls $\operatorname{dom} f = \operatorname{codom} f = \mathbb{R}$, dann ist G der Graph von f, wie Sie ihn aus der Schule kennen.

Wir schreiben die Funktion f auch als

$$X \ni x \mapsto f(x) \in Y.$$

Beispiele. [Funktionen] Die folgenden Tripel sind Funktionen:

- $X := Y := \mathbb{R}, \qquad G := \big\{(x, x+1) \,\big|\, x \in \mathbb{R}\big\}, \qquad f := (X, Y, G)$

  Bemerkungen: Der Graph G von f entspricht der Vorschrift *ordne x den Wert $y = x + 1$ zu*, d. h. *addiere 1*. Es gilt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f(x) = x + 1$, für jedes $x \in \mathbb{R}$. Nach dem Goethe-Prinzip 1.23 gilt auch $f(t) = t + 1$, für jedes $t \in \mathbb{R}$.
- $X := Y := \mathbb{R}, \qquad G := \big\{(x, x^2) \,\big|\, x \in \mathbb{R}\big\}, \qquad f := (X, Y, G)$

  Bemerkung: Der Graph G von f entspricht der Vorschrift *ordne x den Wert $y = x^2$ zu*, d. h. *quadriere*.
- $X := \mathbb{R}, \qquad \widetilde{Y} := [0, \infty[, \qquad G := \big\{(x, x^2) \,\big|\, x \in \mathbb{R}\big\}, \qquad \widetilde{f} := (X, \widetilde{Y}, G)$

  Bemerkung: Die Funktionen f und $\widetilde{f}$ sind verschieden, da ihre Zielbereiche verschieden sind. (Die Definitionsbereiche und Graphen sind gleich.)
- $$\begin{aligned} X &:= \big\{\text{Student oder Studentin in dieser Vorlesung}\big\}, \\ Y &:= \big\{\text{Datum}\big\}, \\ f &: X \to Y, \qquad f(x) := \text{Datum, an dem } x \text{ geboren wurde} \end{aligned}$$
- Für eine beliebige Menge X definieren wir die *Identität auf X* als die Abbildung

  $$\mathrm{id}_X : X \to X, \qquad \mathrm{id}_X(x) := x.$$
- $$\begin{aligned} X &:= \big\{\text{reelles Polynom}\big\}, \\ Y &:= \big\{\text{Teilmenge von } \mathbb{R}\big\}, \\ f &: X \to Y, \qquad f(p) := \text{Menge der Nullstellen von } p \end{aligned}$$

Betrachten wir zum Beispiel die Polynome[30]

$$p \equiv 1, \qquad q(x) := x + 1, \qquad r(x) := x^2 - 1.$$

Es gilt:

$$f(p) = \emptyset, \qquad f(q) = \{-1\}, \qquad f(r) = \{-1, 1\}$$

Bemerkungen. [Funktion mehrerer Veränderlicher]

- Sei $n \in \mathbb{N}$ und $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Wir betrachten eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$. Das ist eine Funktion mehrerer (nämlich n) Veränderlicher. Sei $x \in X$. Wir schreiben x_i für die i-te Komponente von x. Es gilt also $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Wir kürzen ab:

$$f(x_1, \ldots, x_n) := f((x_1, \ldots, x_n)) = f(x).$$

- Seien jetzt $n, p \in \mathbb{N}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $Y \subseteq \mathbb{R}^p$. Wir betrachten eine Funktion $f : X \to Y$. Wir schreiben $f = (f_1, \ldots, f_n)$ und nennen $f_i : X \to \mathbb{R}$ die i-te Komponente von f. Für jedes $x \in X$ haben wir also

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_p(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}.$$

- Wir werden Funktionen mehrerer Veränderlicher ausführlich in Analysis 2 behandeln.

Beispiele. [Funktion mehrerer Veränderlicher]

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = f(x) := x_1 + x_2$

  Zum Beispiel gilt $f(1, 2) = 1 + 2 = 3$.

  Bemerkung: Nach dem Goethe-Prinzip 1.23 gilt $f(u) = u_1 + u_2$ und $f(x, y) = x + y$. (Hier schreiben wir einen Punkt in $\mathbb{R}^2$ also als (x, y).)

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) := (x, x) = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) := \big(x_1 + x_2, x_1 x_2\big) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$

  Zum Beispiel gilt $f(1, 2) = \big(1 + 2, 1 \cdot 2\big) = (3, 2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

[30] $\equiv$ bedeutet hier *konstant gleich*.

Bemerkungen 1.28. [Ausdruck versus Funktion] Sei A ein Ausdruck, der x enthält, zum Beispiel $A = x$, $A = 3x^2 + e^x$, $A = x + 2t$. Dann ist A keine Funktion, da es kein Tripel wie in Definition 1.27 ist. Es ist ohne zusätzliche Information auch nicht sinnvoll, A trotzdem als eine Funktion *aufzufassen*, aus den folgenden Gründen:

- A enthält keine Information darüber, was die unabhängige Variable ist.
- A enthält keine explizite Information über den Definitions- und Zielbereich.

Zum Beispiel kann $x + 2t$ sowohl als die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x + 2t$, als auch als die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) := x + 2t$, aufgefasst werden. Die Funktionen f und g sind verschieden, da sie den folgenden unterschiedlichen Vorschriften entsprechen:

- f: Addiere $2t$ zum Argument.
- g: Multipliziere das Argument mit 2 und addiere x.

Dass f und g verschieden sind, zeigt sich auch an ihren unterschiedlichen Ableitungen. Die Ableitung von f an einer beliebigen Stelle ist gleich 1, da hier $2t$ eine Konstante ist. ($2t$ hängt nicht von der unabhängigen Variable x ab.) Andererseits ist die Ableitung von g an einer beliebigen Stelle gleich 2, da hier x eine Konstante ist. (x hängt nicht von der unabhängigen Variable t ab.)

Wir können $x + 2t$ auch als die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x, t) := x + 2t$, auffassen. Das ist eine Funktionen *zweier* Veränderlicher.

Wenn im Ausdruck A nur eine Variable vorkommt, ist es naheliegend anzunehmen, dass damit die unabhängige Variable gemeint ist. Zum Beispiel kommt im Ausdruck $A := x^2$ nur die Variable x vor. Mit dem Ausdruck ist typischerweise die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$ gemeint.

Wie steht es allerdings mit dem Ausdruck $A := a$? Ist damit die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(a) := a$, also die Identitätsabbildung, gemeint? Oder die konstante Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := a$?

Definition 1.29 (Bild, Urbild)**.** *(i) Sei $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Wir definieren das* Bild von A unter f *als die Menge*

$$f(A) := \big\{ f(x) \,\big|\, x \in A \big\}.$$

Wir nennen

$$\mathrm{im}(f) := f(X)$$

das Bild von f.

(ii) Sei $B \subseteq Y$ eine Teilmenge. Wir definieren das Urbild von B unter f *als die Menge*

$$f^{-1}(B) := \big\{x \in X \,\big|\, f(x) \in B\big\}.$$

Für jeden Punkt $y \in Y$ definieren wir das Urbild von y unter f *als die Menge*

$$f^{-1}(y) := f^{-1}(\{y\}) = \big\{x \in X \,\big|\, f(x) = y\big\}.$$

Beispiele. [Bild, Urbild]

- Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, \qquad f(n) := n^2.$$

Das Bild von f ist gegeben durch

$$\mathrm{im}(f) = f(\mathbb{N}_0) = \big\{n^2 \,\big|\, n \in \mathbb{N}_0\big\} = \big\{\text{Quadratzahl}\big\} = \big\{0, 1, 4, 9, \dots\big\}.$$

Das Urbild von $B := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ unter f ist gegeben durch

$$f^{-1}(B) = \{1, 2\}.$$

- Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x^2.$$

Das Bild von f ist gegeben durch

$$\mathrm{im}(f) = f(\mathbb{R}) = f([0, \infty[) = f(]-\infty, 0]) = [0, \infty[.$$

Das Bild von $A := [1, 2]$ unter f ist gegeben durch

$$f([1, 2]) = [1, 4].$$

Das Urbild von $B :=]-\infty, 4[$ unter f ist gegeben durch

$$f^{-1}\big(]-\infty, 4[\big) =]-2, 2[.$$

Das Urbild von $y := 4$ unter f ist gegeben durch

$$f^{-1}(4) = \{-2, 2\}.$$

Sei $f : X \to Y$ eine Funktion.

Definition 1.30 (injektiv, surjektiv, bijektiv)**.** *(i) f heisst* injektiv *g. d. w. gilt:*

$$\forall x, x' \in X : \ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

(ii) f heisst surjektiv *g. d. w. gilt:*

$$\forall y \in Y \exists x \in X : \ f(x) = y$$

(iii) f heisst bijektiv *g. d. w. f injektiv und surjektiv ist.*

Bemerkungen. [injektiv, surjektiv, bijektiv]

(i) f ist injektiv g. d. w.

$$\forall x, x' \in X : \ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x').$$

(Warum?) Das bedeutet, dass f verschiedene Punkte auf verschiedene Punkte abbildet.

(ii) f ist surjektiv g. d. w. das Bild von f gleich Y ist.

Beispiele 1.31. [injektiv, surjektiv, bijektiv]

(i) Die Identität id_X ist bijektiv.

(ii) Die Funktion $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) := x$, ist injektiv und nicht surjektiv.

(iii) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to [0, \infty[$, $f(x) := x^2$, ist nicht injektiv, aber surjektiv.

(iv) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$, ist weder injektiv noch surjektiv.

Bemerkung. [injektiv, surjektiv]

- Injektivität einer Funktion hängt vom Definitionsbereich ab. Das folgt aus den Beispielen 1.31(ii),(iv).
- Surjektivität einer Funktion hängt vom Zielbereich ab. Das folgt aus den Beispielen 1.31(iii),(iv).
- Diese Bemerkungen sind Gründe dafür, dass wir eine Funktion als ein Tripel (X, Y, G) definieren, nicht als einen Ausdruck wie $3x^2 + e^x$. Für weitere Gründe siehe Bemerkungen 1.28.

Definition 1.32 (Umkehrfunktion)**.** *Sei $f : X \to Y$ eine* bijektive *Funktion. Wir definieren die* Umkehrfunktion *(oder* Umkehrabbildung *oder* inverse Funktion*)* von f *als die Funktion*

$$f^{\langle -1\rangle} : Y \to X, \qquad f^{\langle -1\rangle}(y) := x,$$

wobei $x \in X$ der eindeutige Punkt ist, wofür gilt, dass

$$f(x) = y.$$

(In Bemerkung 1.33(i) diskutieren wir die alternative Schreibweise f^{-1}.)

Bemerkungen 1.33. [Umkehrfunktion]

(i) Da f surjektiv ist, gibt es tatsächlich einen solchen Punkt x. Da f injektiv ist, ist der Punkt x (wofür $f(x) = y$) eindeutig. Daraus folgt, dass die inverse Funktion $f^{\langle -1\rangle}$ wohldefiniert ist.

(ii) Im Fall $X = Y = \mathbb{R}$ ist der Graph von $f^{\langle -1\rangle}$ gleich dem Graphen von f, gespiegelt an der diagonalen Geraden $x = y$.

Beispiele. [Umkehrfunktion]

- Die Umkehrfunktion der Identität id_X ist $\mathrm{id}_X^{\langle -1\rangle} = \mathrm{id}_X$.
- Die Funktion $f : [0, \infty[\to [0, \infty[$, $f(x) := x^2$, ist bijektiv. Ihre Umkehrfunktion ist die Quadratwurzelfunktion

$$\sqrt{} := f^{\langle -1\rangle} : [0, \infty[\to [0, \infty[.$$

- Die Exponentialfunktion exp als Funktion von $X := \mathbb{R}$ nach $Y :=]0, \infty[$ ist bijektiv. (Siehe Übungsserie 3 und Beispiele 4.46(i) und 4.43(iv) Ihre Umkehrfunktion ist der natürliche Logarithmus[31]

$$\log := \exp^{\langle -1\rangle} :]0, \infty[\to \mathbb{R}.$$

Bemerkungen. [Notation für Umkehrfunktion] Sei $f : X \to Y$ eine bijektive Funktion.

[31] In der höheren Mathematik bezeichnet log den natürlichen Logarithmus, also den Logarithmus zur Basis e. Gewisse Autoren verwenden dafür die Schreibweise ln, was für *logarithmus naturalis* steht. Ausserhalb der Mathematik wird log manchmal für den Logarithmus zur Basis 10 gebraucht.

(i) Für jedes $y \in Y$ gilt, dass

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\}) = \left\{f^{\langle -1\rangle}(y)\right\}.$$

Die *Urbildfunktion* $y \mapsto f^{-1}(y)$ und die inverse Funktion $f^{\langle -1\rangle}$ sind also bis auf Klammern dasselbe. Wir schreiben daher von jetzt an die inverse Funktion meistens als

$$f^{-1} := f^{\langle -1\rangle}.$$

In der Praxis ist es jeweils klar, ob mit f^{-1} die Urbildfunktion oder die inverse Funktion $f^{\langle -1\rangle}$ gemeint ist. (Erinnerung: $f^{\langle -1\rangle}$ ist nur definiert, falls f bijektiv ist.)

(ii) $f^{-1}(y) = f^{\langle -1\rangle}(y)$ ist der eindeutige Punkt x, wofür $f(x) = y$. Das ist nicht dasselbe wie

$$(f(y))^{-1} = \frac{1}{f(y)}$$

Der Ausdruck $(f(y))^{-1}$ ist nur sinnvoll, falls $y \in X$ und $f(y)$ eine Zahl ungleich 0 ist.

Seien X, Y, Z Mengen und $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Funktionen.

Definition 1.34 (Verknüpfung von Funktionen)**.** *Wir definieren die* Verknüpfung *(oder* Komposition*)* von f und g *als die Funktion*

$$g \circ f : X \to Z, \qquad g \circ f(x) := g(f(x)).$$

Beispiele. [Verknüpfung, Reihenfolge davon]

- Wir betrachten $X := Y := Z := \mathbb{R}$ und die Funktionen

$$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x + 1, \qquad g(y) := y^2.$$

Die Verknüpfung von f und g ist gegeben durch

$$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g \circ f(x) = (x+1)^2. \tag{1.19}$$

Der Zielbereich von g ist gleich $\mathbb{R}$. Das stimmt mit dem Definitionsbereich von f überein. Daher ist die umgekehrte Verknüpfung ebenfalls sinnvoll. Sie ist gegeben durch

$$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f \circ g(y) = y^2 + 1. \tag{1.20}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} g \circ f(1) &= (1+1)^2 \qquad \text{(gemäss (1.19))} \\ &= 4 \neq 2 = 1^1 + 1 = f \circ g(1) \qquad \text{(gemäss (1.20))} \end{aligned}$$

und daher

$$g \circ f \neq f \circ g.$$

- Wir betrachten $X := \mathbb{R}^2$, $Y := Z := \mathbb{R}$ und die Funktionen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) := x + y \qquad g := \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

  Die Verknüpfung von f und g ist gegeben durch

$$g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad g \circ f(x,y) = \exp(x+y) = e^{x+y}.$$

  Die umgekehrte Verknüpfung $f \circ g$ ist nicht wohldefiniert (= sinnvoll), da der Zielbereich von g, also $\mathbb{R}$, nicht gleich dem Definitionsbereich von f, also $\mathbb{R}^2$, ist.

Kapitel 2

Zahlen

Dieses Kapitel entspricht [Bla96a, 1.3, 1.4, 1.7, 3.2] und [Stra, Kapitel 2]. Neben Logik bilden Zahlen die Basis für die Analysis.

2.1 Natürliche, ganze und rationale Zahl

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96b, 1.3] und [Stra, 2.1]. Wir schreiben:

- $\mathbb{N}_0 :=$ Menge der natürlichen Zahlen inklusive null $= \{0, 1, \dots\}$
- $\mathbb{N} :=$ Menge der natürlichen Zahlen ohne null $= \{1, 2, \dots\}$
- $\mathbb{Z} :=$ Menge der ganzen Zahlen $= \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$
- $\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N} \right\} =$ Menge der rationalen Zahlen

Bemerkungen. [natürliche, ganze, rationale Zahlen]

- $\mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$
- $\mathbb{N}_0$: Wir können damit Objekte zählen. Wir können Zahlen in $\mathbb{N}_0$ addieren und multiplizieren.
- $\mathbb{Z}$: Zusätzlich zur Addition und Multiplikation können wir in $\mathbb{Z}$ auch Zahlen subtrahieren.
- $\mathbb{Q}$: Zusätzlich zur Addition, Multiplikation und Subtraktion können wir in $\mathbb{Q}$ auch durch Zahlen dividieren (ausser durch 0), d. h. $\mathbb{Q}$ ist ein *Körper*. Es gelten bestimmte Rechenregeln, die Sie aus dem Gymnasium kennen. Des Weiteren

können wir die rationalen Zahlen der Grösse nach auf dem Zahlenstrahl anordnen. Diese Ordnung ist in einem gewissen Sinn mit der Addition und Multiplikation verträglich ist. Diese Eigenschaft und die Rechenregeln können wir dadurch zusammenfassen, dass $\mathbb{Q}$ zusammen mit der Addition, Multiplikation und Ordnung ein *(total) geordneter Körper* ist, d. h. die Eigenschaften A.i)-iv), M.i)-iv), D), O.i)-iv), K.i),ii) in [Stra, 2.2 Die reellen Zahlen] besitzt.[1] Zum Beispiel besagt A.i), dass die Addition *assoziativ* ist, d. h.

$$\forall x, y, z \in \mathbb{Q} : (x + y) + z = x + (y + z).$$

Zwischen je zwei rationalen Zahlen $r_0 < r_1$ liegt eine weitere rationale Zahl, zum Beispiel $\frac{r_0+r_1}{2}$. Trotzdem gibt es Löcher in der rationalen Zahlengerade $\mathbb{Q}$. Zum Beispiel fehlt eine rationale Zahl r mit Quadrat gleich 2. Das ist der Inhalt des folgenden Satzes.

Satz 2.1. *Es gibt keine rationale Zahl r mit $r^2 = 2$.*

Für $m, n \in \mathbb{Z}$ schreiben wir $m|n$ g. d. w. m die Zahl n teilt, d. h.

$$m|n \qquad :\Leftrightarrow \qquad \exists k \in \mathbb{Z} : \, km = n.$$

("$A :\Leftrightarrow B$" bedeutet, dass wir A durch B definieren.)

Beweis des Satzes 2.1: Wir nehmen widerspruchsweise an, es gäbe eine Zahl $r \in \mathbb{Q}$ mit

$$r^2 = 2. \tag{2.1}$$

Wir wählen $m_0 \in \mathbb{Z}$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\frac{m_0}{n_0} = r. \tag{2.2}$$

Sei $k \in \mathbb{N}_0$ die grösste Zahl so, dass $2^k | m_0$ und $2^k | n_0$. Wir definieren

$$m := \frac{m_0}{2^k}, \qquad n := \frac{n_0}{2^k}.$$

Wir kürzen also alle gemeinsamen 2er-Faktoren aus dem Zähler m_0 und dem Nenner n_0 des Bruches r heraus. Es gilt daher

$$\frac{m}{n} = \frac{m_0}{n_0} \quad , \tag{2.3}$$

$$2 \not| m \vee 2 \not| n, \tag{2.4}$$

[1] In [Stra] werden die Bedingungen für $\mathbb{R}$ statt $\mathbb{Q}$ formuliert. Sie gelten auch für $\mathbb{Q}$.

$$\begin{aligned} \frac{m^2}{n^2} &= \frac{m_0^2}{n_0^2} && \text{(gemäss (2.3))} \\ &= r^2 && \text{(gemäss (2.2))} \\ &= 2 && \text{(gemäss (2.1)),} \end{aligned}$$

$$\text{also} \qquad m^2 = 2n^2. \tag{2.5}$$

Da 2 prim ist, folgt daraus, dass $2|m$, d. h., es gibt ein $k \in \mathbb{Z}$ so, dass $m = 2k$. Mittels (2.5) folgt daraus, dass

$$2n^2 = m^2 = 4k^2, \qquad \text{d. h.} \qquad n^2 = 2k^2.$$

Da 2 prim ist, folgt daraus, dass $2|n$. Da auch $2|m$ gilt, erhalten wir einen Widerspruch zu (2.4). Daher ist unsere Annahme falsch, dass es eine Zahl $r \in \mathbb{Q}$ mit $r^2 = 2$ gibt. Das beweist Satz 2.1. □

2.2 Reelle Zahl, Dedekind-Schnitt, Youngsche Ungleichung

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96b, 1.4] und [Stra, 2.2]. Wie wir im letzten Abschnitt gesehen haben, gibt es in der *rationalen Zahlengerade* Löcher. Es fehlt zum Beispiel eine Zahl, deren Quadrat gleich 2 ist. Siehe Satz 2.1. Um die Löcher zu stopfen, konstruieren wir die reellen Zahlen mittels der rationalen Zahlen als sogenannte *Dedekind-Schnitte*. Die reellen Zahlen enthalten zum Beispiel eine (positive) Zahl, die das Loch aus Satz 2.1 stopft, nämlich $\sqrt{2}$.

Definition 2.2 (Dedekind-Schnitt = reelle Zahl)**.** *Eine* reelle Zahl *(oder* Dedekind-Schnitt *oder* Dedekindscher Schnitt[2]*) ist eine Teilmenge $x \subseteq \mathbb{Q}$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(a) $x \neq \emptyset$

(b) $x \neq \mathbb{Q}$

(c) $\forall r \in x \, \forall s \in \mathbb{Q} : s > r \Rightarrow s \in x$

(d) $\forall r \in x \, \exists s_0 \in x : s_0 < r$

Wir definieren

$$\mathbb{R} := \big\{\text{reelle Zahl}\big\} = \big\{\text{Dedekind-Schnitt}\big\}.$$

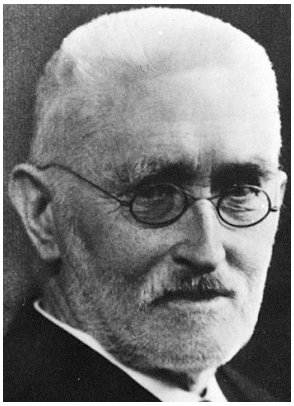


Abbildung 2.1: Richard Dedekind, 1831–1916, deutscher Mathematiker.

Die Dedekind-Schnitte sind nach Richard Dedekind benannt, siehe Abbildung 2.1.

Bemerkungen.

- (a),(c) bedeutet, dass x ein nach oben unbeschränktes "Intervall rationaler Zahlen" ist.
- (b) bedeutet, dass dieses "Intervall" nach unten beschränkt ist.
- (d) bedeutet, dass das "Intervall" offen ist.
- In dieser Definition setzen wir voraus, dass die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen schon definiert wurde. Mathematisch exakt wird das zum Beispiel in der Vorlesung *Grundstrukturen* (D-MATH, 2. Semester) getan.
- Definition 2.2 erklärt den ersten Teil der in Beispiel 1.1(ii) erwähnten Struktur.

Die Idee hinter Definition 2.2 ist, dass jede reelle Zahl x die Menge der rationalen Zahlen in zwei Teile schneidet[3], nämlich in die rationalen Zahlen grösser als x und die rationalen Zahlen kleiner gleich x. Der Trick ist, dass wir diese *anschauliche Eigenschaft* der noch nicht definierten reellen Zahlen als eine *Definition* dieser Zahlen verwenden.

Bemerkung 2.3. [rationale Zahlen in den reellen Zahlen enthalten] Für jedes $r \in \mathbb{Q}$ definieren wir den Dedekind-Schnitt

$$\mathbf{r} := \big\{ s \in \mathbb{Q} \,\big|\, s > r \big\} \in \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

Wir schreiben also zum Beispiel

$$\mathbf{0} = \big\{ s \in \mathbb{Q} \,\big|\, s > 0 \big\}.$$

[2]In der Literatur wird das auch eine *Obermenge eines* Dedekind-Schnittes genannt.
[3]Darum heisst ein x wie in Definition 2.2 ein Dedekind-*Schnitt*.

Die Abbildung

$$\mathbb{Q} \ni r \mapsto \mathbf{r} \in \mathbb{R}$$

ist injektiv. Wir können $\mathbb{Q}$ daher mit seinem Bild unter dieser Abbildung identifizieren. Dadurch können wir $\mathbb{Q}$ als eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ auffassen.

Beispiel 2.4. [Quadratwurzel zwei als Dedekind-Schnitt] Wir definieren

$$\sqrt{\mathbf{2}} := \big\{ r \in \mathbb{Q} \,\big|\, r \geq 0,\, r^2 > 2 \big\}. \tag{2.7}$$

Das ist eine reelle Zahl, d. h. ein Dedekind-Schnitt. Siehe Übungsserie 3 (reelle Zahl, Dedekind-Schnitt).

Um reelle Zahlen der Grösse nach ordnen zu können und mit ihnen rechnen zu können, brauchen wir die folgende Definition.

Definition 2.5 (Ordnung, Addition, Multiplikation reeller Zahlen)**.** *(i) (Ordnung:) Für $x, y \in \mathbb{R}$ definieren wir*

$$x \leq y :\Leftrightarrow x \supseteq y,\ d.\ h.\ y \subseteq x, \qquad x < y :\Leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y.$$

(ii) Wir definieren die Addition reeller Zahlen *als die Abbildung*

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x + y := +(x, y) := \big\{ r + s \,\big|\, r \in x,\, s \in y \big\} \tag{2.8}$$

(iii) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ definieren wir $-x$ als das eindeutige Element von $\mathbb{R}$ so, dass

$$x + (-x) = \mathbf{0}. \tag{2.9}$$

(iv) Wir definieren die Multiplikation reeller Zahlen *als die Abbildung $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch*

$$x \cdot y := \cdot(x, y) := \begin{cases} \big\{ rs \,\big|\, r \in x,\, s \in y \big\}, & \text{falls } x, y \geq \mathbf{0}, \quad (2.10) \\ -\big((-x) \cdot y\big), & \text{falls } x < \mathbf{0}, y \geq \mathbf{0}, \quad (2.11) \\ -\big(x \cdot (-y)\big), & \text{falls } x \geq \mathbf{0}, y < \mathbf{0}, \quad (2.12) \\ (-x) \cdot (-y), & \text{falls } x, y < \mathbf{0}. \quad (2.13) \end{cases}$$

Bemerkungen.

- Es gibt tatsächlich ein eindeutiges Element $-x \in \mathbb{R}$, dass die Gleichung (2.9) erfüllt. (Welches?) Teil (iii) der obigen Definition ist daher sinnvoll.
- (iv): Fall (2.11): In diesem Fall ist $(-x) \cdot y$ das Produkt zweier reeller Zahlen $\geq \mathbf{0}$. Dieses haben wir schon definiert. (Siehe Fall (2.10).) Ähnliche Bemerkungen gelten für die Fälle (2.12,2.13). Daher ist Teil (iv) der obigen Definition sinnvoll.

- Definition 2.5 erklärt den zweiten, dritten und vierten Teil der in Beispiel 1.1(ii) erwähnten Struktur.

Bemerkung. [Ordnung, Addition, Multiplikation reeller Zahlen] Die in (i) definierte Ordnung stimmt für rationale Zahlen mit der gewöhnlichen Ordnung überein. Hierbei identifizieren wir $\mathbb{Q}$ mit einer Teilmenge von $\mathbb{R}$ wie in Bemerkung 2.3. Analoges gilt für die Addition und Multiplikation.

Bemerkung. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$x = \big\{r \in \mathbb{Q} \,\big|\, \mathbf{r > } x\big\}.$$

Diese Tatsache entspricht der Idee hinter der Definition eines Dedekind-Schnittes.

Beispiele. [Rechnen mit reellen Zahlen]

- Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{1+1} &= \big\{r+s \,\big|\, r \in \mathbf{1},\, s \in \mathbf{1}\big\} \qquad \text{(gemäss (2.8))} \\ &= \big\{r+s \,\big|\, r \in \mathbb{Q} : r > 1,\, s \in \mathbb{Q} : s > 1\big\} \qquad \text{(gemäss (2.6))} \\ &\subseteq \big\{t \in \mathbb{Q} \,\big|\, t > 2\big\} \qquad \text{(betrachte } t := r+s\text{)} \\ &= \mathbf{2}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

  In (2.14) gilt auch die umgekehrte Inklusion $\supseteq$. Um das zu sehen, betrachten wir $r, s := \frac{t}{2}$.Es folgt, dass

$$\mathbf{1+1} = \mathbf{2}.$$

- Es gilt

$$\mathbf{1 \cdot 1} = \mathbf{1}.$$

  Siehe Übungsserie 3 (reelle Zahl, Dedekind-Schnitt).

Ein weiteres Beispiel einer Rechnung mit Dedekind-Schnitten liefert folgendes Resultat.

Proposition 2.6 (Quadrat der Wurzel aus 2)**.** *Es gilt:*

$$(\sqrt{\mathbf{2}})^2 = \mathbf{2}. \tag{2.15}$$

Bemerkungen. [Quadrat der Wurzel aus 2]

- Die rechte Seite von (2.15) können wir gemäss Bemerkung 2.3 mit der rationalen Zahl 2 identifizieren. Salopp gesagt, gilt also

$$(\sqrt{2})^2 = 2,$$

  wie wir insgeheim gehofft hatten.



Abbildung 2.2: Jakob I Bernoulli, 1655–1705, Schweizer Mathematiker und Physiker.

- Gemäss Proposition 2.6 gibt es also eine Quadratwurzel von **2**, d. h. eine positive reelle Zahl, deren Quadrat gleich **2** ist. (Diese Zahl ist eindeutig.) Diese Tatsache wird auch in [Stra, Folgerung 2.2.1. vii), S. 15] bewiesen, indem Eigenschaften der reellen Zahlen verwendet werden. Unser Beweis (siehe unten) ist elementarer. Er verwendet nur Eigenschaften der rationalen Zahlen. Die Aussage von Proposition 2.6 ist konkreter als [Stra, Folgerung 2.2.1. vii), S. 15], da wir hier $\sqrt{\mathbf{2}}$ explizit durch (2.7) definieren.

Bemerkung. [Proposition] Eine *Proposition* ist ein Satz, den wir für nicht so wichtig halten. Mathematisch gesehen bezeichnen *Proposition* und *Satz* dasselbe. Siehe auch Bemerkung 1.7(ii).

Im Beweis der Proposition 2.6 werden wir die Bernoullische Ungleichung benutzen.

Lemma 2.7 (Bernoullische Ungleichung)**.** *Für alle* $n \in \mathbb{N}_0$ *und* $x \in [-1, \infty[$ *gilt*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Beweis: Übungsserie 4. Diese Ungleichung ist nach Jakob I Bernoulli benannt. (Siehe Abbildung 2.2.)

Beweis der Proposition 2.6: Wir definieren

$$x := \sqrt{\mathbf{2}}.$$

Behauptung 1.

$$x^2 = x \bullet x \geq \mathbf{2}, \tag{2.16}$$

d. h. $x \bullet x \subseteq \mathbf{2}$.

Beweis der Behauptung 1: Sei $t \in x \bullet x$. Gemäss der Definition von $\bullet$ gibt es Zahlen $r, s \in x$ so, dass $t = rs$.

Fall $r \geq s$: Da $r, s \geq 0$, haben wir $rs \geq 0$. Es gilt $rs \geq s^2 > 2$ und daher $t = rs \in \mathbf{2}$.

Im **Fall** $r < s$ folgt $t \in \mathbf{2}$ auf analoge Weise.

Also gilt $t \in \mathbf{2}$ in jedem Fall. Es folgt, dass $x^2 = x \bullet x \subseteq \mathbf{2}$. Das beweist Behauptung 1. □

Behauptung 2. *Es gilt*

$$x^2 \leq \mathbf{2},$$

d. h. $x \bullet x \supseteq \mathbf{2}$.

Beweis der Behauptung 2:

Behauptung 3. *Sei $R \in \mathbf{2}$. Es gibt ein $r \in x$ so, dass $r^2 \leq R$.*

Beweis der Behauptung 3: Wir definieren die folgende Folge von rationalen Zahlen rekursiv:

$$r_0 := 2, \qquad r_k := \frac{2r_{k-1} + 2}{r_{k-1} + 2},\ k \in \mathbb{N}. \tag{2.17}$$

Da $R \in \mathbf{2}$, gilt $R \in \mathbb{Q}$ und $R > 2$. Daher gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$n_0 \geq \frac{1}{R-2}. \tag{2.18}$$

(Das ist das *Archimedische Prinzip*. Siehe Proposition 2.18.)Wir definieren

$$r := r_{n_0}.$$

Mittels Induktion erhalten wir

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : r_n \geq 0,\ r_n^2 > 2.$$

(Überlegen Sie sich das! Verwenden Sie dazu (2.17).) Insbesondere gilt also $r = r_{n_0} \geq 0$, $r^2 > 2$ und daher

$$r \in x. \tag{2.19}$$

Behauptung 4. *Es gilt*

$$r^2 \leq R.$$

Beweis der Behauptung 4: Es gilt:

$$\forall k \in \mathbb{N} : r_k^2 - 2 \leq \frac{r_{k-1}^2 - 2}{2}.$$

Mittels Induktion folgt daraus, dass

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : r_n^2 - 2 \leq \frac{r_0^2 - 2}{2^n} = \frac{2^2 - 2}{2^n} = 2^{-n+1}. \tag{2.20}$$

(Überlegen Sie sich das!) Also gilt

$$\begin{aligned} r^2 &= r_{n_0}^2 \\ &\leq 2^{-n_0+1} + 2 \qquad \text{(wegen (2.20))} \\ &= \frac{1}{(1+1)^{n_0-1}} + 2 \\ &\leq \frac{1}{n_0} + 2 \quad \text{(Bernoullische Ungleichung, Lemma 2.7)} \\ &\leq R \qquad \text{(wegen (2.18))} \end{aligned}$$

Das beweist Behauptung 4. □
Aus (2.19) und Behauptung 4 folgt Behauptung 3. □
Sei $R \in \mathbb{Q}$ so, dass $R > 2$. Wir wählen ein $r \in x$ wie in Behauptung 3. Gemäss Definition 2.5(iv) (Multiplikation reeller Zahlen) haben wir $r^2 \in x \bullet x = x^2$. Da $r^2 \leq R$, folgt mittels Bedingung (c) von Definition 2.2 (Dedekind-Schnitt), dass $R \in x^2$. Also gilt $x^2 \supseteq \mathbf{2}$, d. h. $x^2 \leq \mathbf{2}$. Das beweist Behauptung 2. □
Indem wir Behauptung 2 mit der Ungleichung (2.16) kombinieren, folgt, dass $x^2 = \mathbf{2}$. Das beweist Proposition 2.6. □

Bemerkung. [Vorteil der reellen Zahlen gegenüber den rationalen Zahlen] Die Menge $\mathbb{R}$ hat gegenüber $\mathbb{Q}$ den entscheidenden Vorteil, dass jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ein *Supremum*, d. h., eine *kleinste obere Schranke* besitzt. (Siehe Definition 2.17.) Wir brauchen das Supremum, um Analysis zu betreiben.

Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen zusammen mit der Addition, Multiplikation und Ordnung ($\leq$) aus Definition ist ein *(total) geordneter Körper*, d. h. sie besitzt die Eigenschaften A.i)-iv), M.i)-iv), D), O.i)-iv), K.i),ii) in [Stra, 2.2 Die reellen Zahlen]. (Das wird in [EHH$^+$83, §2. Dedekindsche Schnitte] bewiesen.) Das bedeutet, dass wir die reellen Zahlen der Grösse nach ordnen können, mit ihnen wie aus dem Gymnasium gewohnt rechnen können und dass die Ordnung mit der Addition und Multiplikation in einem gewissen Sinn verträglich ist. Für Details zur Konstruktion der reellen Zahlen als

Dedekind-Schnitte siehe [EHH$^+$83, Kapitel 2, §2, p. 30].In der Sekundarschule haben Sie die reellen Zahlen als Dezimalbrüche definiert. Wir können diese Definition mit der Definition als Dedekind-Schnitt identifizieren. (Siehe Bemerkung 2.9(iii) unten.) Dezimalbrüche sind b-adische Brüche (mit $b = 10$), welche wie folgt definiert sind. Sei $b \in \mathbb{N}$ so, dass $b \geq 2$. Wir nennen b die *Basis* unseres Stellenwertsystems.

Definition 2.8 (b-adischer Bruch)**.** *Ein* b-adischer Bruch *ist Abbildung* $a : \mathbb{Z} \to \{0, \ldots, b-1\}$*, oder das Negative einer solchen Abbildung, mit den folgenden Eigenschaften:*

(a) Es gibt eine Zahl $k \in \mathbb{Z}$ *so, dass für jedes* $i > k$ *gilt* $a_i := a(i) = 0$*.*

(b) Es gibt keine Zahl $\ell \in \mathbb{Z}$ *so, dass für jedes* $i \leq \ell$ *gilt* $a_i = b - 1$*.*

Wir definieren

$$\mathbb{R}_b := \big\{ b\text{-adischer Bruch} \big\}.$$

Bemerkungen 2.9. [b-adischer Bruch, Beispiele: Binär-, Dezimalbruch]

(i) Eine Abbildung $a : \mathbb{Z} \to \{0, \ldots, b-1\}$ ist dasselbe wie eine *zweiseitig unendliche Folge* in $\{0, \ldots, b-1\}$. Wir schreiben eine solche Folge als

$$a = \ldots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \ldots_b = \ldots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \ldots,$$

wobei $a_i := a(i)$, für jedes $i \in \mathbb{Z}$. Der Punkt markiert dabei die Stelle zwischen a_0 und a_{-1}. Er heisst *Radixpunkt.*[4,5] Mit dem tiefgestellten b geben wir die Basis unseres Stellenwertsystems an, falls diese nicht aus dem Kontext klar ist.

(ii) Es ist üblich, die führenden Nullen[6] und nachgestellte Nullen [7] wegzulassen. Wir schreiben also zum Beispiel

$$\ldots 001.100 \ldots = 1.1, \qquad \ldots 00.0100 \ldots = 0.01$$

(iii) Wie Sie in der Sekundarschule gelernt haben (zumindest für $b = 10$), beschreibt ein b-adischer Bruch eine reelle Zahl im *Stellenwertsystem zur Basis* b. Diesen Zusammenhang werden wir mittels der Abbildung (2.22) präzisieren. Die Zahlen $0, \ldots, b-1$ spielen dabei die Rolle der *Ziffern* des Stellenwertsystems.

[4]Im englischsprachigen Raum wird hierfür ein Punkt verwendet. Ich halte mich an diese Konvention. In der Schweiz werden sowohl Punkt als auch Komma gebraucht.

[5]Im Fall $b = 10$ heisst der Punkt auch *Dezimalpunkt.*

[6]Das sind die "überflüssigen" linken Nullen.

[7]Das sind "überflüssige" rechte Nullen.

(iv) Ein 10-adischer Bruch heisst auch *Dezimalbruch*. Das Stellenwertsystem zur Basis 10 heisst *Dezimalsystem*. Zum Beispiel sind 0.5 und $0.\overline{3} = 0.333\ldots$ [8] Dezimalbrüche, die den rationalen Zahlen $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ entsprechen.

(v) Ein 2-adischer Bruch heisst auch *Binärbruch* (oder *dyadischer Bruch*). Das Stellenwertsystem zur Basis 2 heisst *Binärsystem* (oder *Dualsystem*). Zum Beispiel sind 1.1 und $1.\overline{01} = 1.0101\ldots$ Binärbrüche. (Welchen rationalen Zahlen[9] entsprechen diese Binärbrüche?)

(vi) Die Bedingung (b) in Definition 2.8 sorgt dafür, dass jede reelle Zahl nur durch *einen* b-adischen Bruch dargestellt wird. Im Dezimalsystem schliesst sie zum Beispiel die Folge $0.\overline{9} = 0.999\ldots$ aus. Diese Folge entspräche der reellen Zahl 1, die auch schon durch 1.0 dargestellt wird.

Bemerkung. [rationale Zahlen in den b-adischen Brüchen enthalten] Wie Sie im Gymnasium gelernt haben (zumindest im Fall $b = 10$), bestimmt jedes $r \in \mathbb{Q}$ einen b-adischen Bruch

$$r_b \in \mathbb{R}_b. \tag{2.21}$$

Im Fall $b = 10$ und $r = \frac{1}{3}$ haben wir zum Beispiel $\left(\frac{1}{3}\right)_{10} = 0.\overline{3} = 0.333\ldots$. Die Abbildung

$$\mathbb{Q} \ni r \mapsto r_b \in \mathbb{R}_b$$

ist injektiv. Wir können $\mathbb{Q}$ daher mit seinem Bild unter dieser Abbildung identifizieren. Dadurch können wir $\mathbb{Q}$ als eine Teilmenge von $\mathbb{R}_b$ auffassen.

Definition 2.10 (Ordnung von b-adischen Brüchen)**.** *Wir definieren* $<_b$ *als die* strikte lexikographische Ordnung *auf* $\mathbb{R}_b$*, d. h. für* $a, a' \in \mathbb{R}_b$ *definieren wir*

$$a <_b a' :\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}\big(\forall i > n : a_i = a'_i\big) \wedge a_n < a'_n.$$

Wir definieren

$$a \leq_b a' :\Leftrightarrow a = a' \vee a <_b a'.$$

Bemerkung. [Ordnung von b-adischen Brüchen] Das ist die übliche Ordnung von b-adischen Brüchen, die Sie aus dem Gymnasium kennen.

Beispiel. Es gilt

$$12.34 <_{10} 12.61$$

[8] Der Überstrich - gibt an, dass die überstrichene Ziffernfolge periodisch wiederholt wird. Ein weiteres Beispiel für diese Schreibweise ist $1.\overline{23} = 1.232323\ldots$.

[9] ausgedrückt als Brüche und im Dezimalsystem

Bemerkungen. [Addition und Multiplikation von b-adischen Brüchen] Wir definieren die Addition zweier b-adischer Brüche wie aus dem Gymnasium gewohnt stellenweise mit Übertrag. Die Multiplikation zweier b-adischer Brüche definieren wir ebenfalls wie aus dem Gymnasium gewohnt. Wir benützen die Symbole $+_b$ und $\cdot_b$ für diese Operationen. Zum Beispiel gilt für $b = 10$

$$1.2 +_{10} 3.9 = 5.1$$

Wir können die b-adischen Brüche mit den Dedekind-Schnitten mittels folgender Abbildung identifizieren:

$$\varphi_b : \mathbb{R}_b = \big\{b\text{-adischer Bruch}\big\} \to \mathbb{R} = \big\{\textit{reelle Zahl}\big\} = \big\{\textit{Dedekind-Schnitt}\big\}, \quad (2.22)$$
$$\varphi_b(a) := \big\{r \in \mathbb{Q} \,\big|\, r_b >_b a\big\}.$$

Hierbei ist r_b durch (2.21) und $>_b$ durch Definition 2.10 gegeben. Die Abbildung φ_b ist bijektiv. Sie überführt $\geq_b$ $+_b$ $\cdot_b$ in $\mathbf{\geq + \cdot}$. (Siehe Definition 2.5(i).) Zum Beispiel gilt

$$\forall a, a' \in \mathbb{R}_b : \varphi_b(a + a') = \varphi_b(a) + \varphi_b(a'),$$

also zum Beispiel

$$\varphi_b(1.0 +_b 1.0) = \varphi_b(1.0) + \varphi_b(1.0) = \mathbf{1 + 1} = \mathbf{2}.$$

Mittels dieser Abbildung können wir daher die Menge der b-adischen Brüche mit der Menge der reellen Zahlen identifizieren. Die Definition 2.2 einer reellen Zahl liefert daher bis auf diese Identifikation dasselbe wie die Definition, die Sie aus dem Gymnasium kennen.

Bemerkungen. [Vorteile der Dedekind-Schnitte gegenüber b-adischen Brüchen]

- Die Menge $\mathbb{R}_b$ der b-adischen Brüche hängt von b ab. Demgegenüber hängt die Menge $\mathbb{R}$ der Dedekind-Schnitte von nichts ab. Diese Definition ist daher natürlicher.
- Mit Definition 2.2 lässt sich einfacher Analysis betreiben, als mit Definition 2.8. Mit Definition 2.2 ist es zum Beispiel einfach zu zeigen, dass das Supremum einer nicht leeren nach oben beschränkten Menge existiert. (Siehe Definition 2.17.)
- Mit Definition 2.2 ist es auch einfach, zum Beispiel die Zahl $\sqrt{\mathbf{2}}$ hinzuschreiben, nämlich als
$$\sqrt{\mathbf{2}} = \big\{r \in \mathbb{Q} \,\big|\, r \geq 0,\, r^2 > 2\big\}.$$
(Siehe Beispiel 2.4.) Demgegenüber können wir $\sqrt{2}$ in Stellenwertsystemen nicht explizit genau hinschreiben. Im Dezimalsystem zum Beispiel sind die ersten paar Ziffern von $\sqrt{\mathbf{2}}$ gegeben durch $1.4142\ldots$. Diese Ziffernfolge ist nicht periodisch. Wir können $\sqrt{\mathbf{2}}$ daher im Dezimalsystem nicht explizit genau hinschreiben.

- Selbst einfache Rechnungen können im b-adischen System kompliziert werden. Ein Beispiel dafür im Dezimalsystem ist:

$$2 \cdot 0.\overline{571428} - 0.\overline{142857} = ?$$

Im System der Dedekind-Schnitte ist das

$$\mathbf{2 \cdot \frac{4}{7} - \frac{1}{7} = 1}$$

Bemerkungen. [Notation] Zur Vereinfachung benützen wir ab jetzt die normale Schriftstärke für den zu einer rationalen Zahl r gehörigen Dedekind-Schnitt $\mathbf{r}$, für die Ordnung $\mathbf{\leq}$ auf den reellen Zahlen usw. Wir schreiben jetzt

$$\mathbf{r} \qquad \mathbf{\leq} \qquad \mathbf{+} \qquad \mathbf{-} \qquad \mathbf{\cdot}$$

also als

$$r \qquad \leq \qquad + \qquad - \qquad \cdot$$

Wie üblich lassen wir das Produktzeichen $\cdot$ manchmal weg.

In der Analysis spielen Abschätzungen eine grosse Rolle.[10] Dabei schätzen wir oft den Betrag einer reellen Zahl ab. Dieser ist wie folgt definiert.

Definition 2.11 (Betrag)**.** *Der (*Absolut-*)*Betrag *einer Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist die Zahl*

$$|x| := \begin{cases} x, & \textit{falls } x \geq 0, \\ -x, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Bemerkungen. [Betrag] Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} |x| &\geq 0, \\ x &\leq |x|, \\ |xy| &= |x||y|. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Wir bezeichnen mit $\|\cdot\|$ die euklidische Norm. (Siehe Definition 1.8.)

Satz 2.12 (Dreiecksungleichung)**.** *Seien $n \in \mathbb{N}$ und $u, v \in \mathbb{R}^n$. Es gilt*

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Beweis: [Stra, Satz 2.4.2.iii), S. 22] □

[10] Eine Abschätzung für eine uns interessierende Grösse a ist eine Ungleichheit zum Beispiel der Form $a \leq \ldots$.

Bemerkung. [Dreiecksungleichung] Im Fall $n = 1$ ist $\|\cdot\|$ durch den Betrag $|\cdot|$ gegeben. Satz 2.12 besagt dann, dass

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Satz 2.13 (Youngsche Ungleichung)**.** *Es seien $x, y, c \in \mathbb{R}$ so, dass $c > 0$. Dann gilt*

$$2|xy| \leq cx^2 + \frac{y^2}{c}. \tag{2.24}$$

Beweis des Satzes 2.13: Fall $xy \geq 0$: Wir setzen $a := \sqrt{c}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left(ax - \frac{y}{a}\right)^2 \\ &= a^2x^2 - 2ax\frac{y}{a} + \frac{y^2}{a^2} \qquad \text{(zweite binomische Formel)} \\ &= cx^2 - 2xy + \frac{y^2}{c}, \qquad (2.25) \\ 2|xy| &= 2xy \qquad\quad (\text{da } xy \geq 0) \\ &\leq cx^2 + \frac{y^2}{c} \qquad\quad (\text{wegen (2.25)}). \end{aligned}$$

Das zeigt die Ungleichung (2.24).

Fall $xy < 0$: Es gilt

$$\begin{aligned} 2|xy| &= 2|x||y| \qquad (\text{gemäss (2.23)}) \\ &\leq c|x|^2 + \frac{|y|^2}{c} \,(\text{gemäss dem schon behandelten Fall mit } x, y \text{ ersetzt durch } |x|, |y|) \\ &= cx^2 + \frac{y^2}{c}. \end{aligned}$$

Das zeigt die Ungleichung (2.24).

Somit gilt diese Ungleichung in beiden Fällen. Das beweist den Satz 2.13. □

2.3 Supremum und Infimum, Vollständigkeit der reellen Zahlen

Dieser Abschnitt entspricht einem Teil von [Bla96a, 3.2] und [Stra, 2.3].

Definition 2.14 (Schranke, Beschränktheit)**.** *Sei $A \subseteq \mathbb{R}$.*

- *Eine* obere Schranke für A *ist eine Zahl* $b \in \mathbb{R}$ *so, dass für jedes* $a \in A$ *gilt* $a \leq b$.
- A *heisst* nach oben beschränkt *g. d. w. es eine obere Schranke für* A *gibt.*
- *Die Begriffe* untere Schranke *und* nach unten beschränkt *sind analog definiert.*
- A *heisst* beschränkt *g. d. w.* A *nach oben und unten beschränkt ist.*

Beispiele. [Schranke, Beschränktheit]

- Für das Intervall $A :=]-\infty, 1[$ ist jede reelle Zahl $b \geq 1$ eine obere Schranke. A ist also nach oben beschränkt. A ist nicht nach unten beschränkt. (Warum?)
- Das Intervall $A :=]0, 1[$ ist nach oben und nach unten beschränkt. (Wodurch?)

Definition 2.15 (Maximum, Minimum einer Teilmenge von $\mathbb{R}$)**.** *Sei* $A \subseteq \mathbb{R}$. *Ein* Maximum *(oder* grösstes Element*)* von A *ist ein Element* $a \in A$ *so, dass* $a \geq b$*, für jedes* $b \in A$. *Ein* Minimum von A *(oder* kleinstes Element*)* von A *ist ein Element* $a \in A$ *so, dass* $a \leq b$*, für jedes* $b \in A$.

Bemerkungen. [Maximum, Minimum einer Teilmenge von $\mathbb{R}$]

- Ein Maximum oder Minimum von A braucht nicht zu existieren.
- Das Maximum (Minimum) von A ist eindeutig, falls es existiert.
- Per definitionem liegt das Maximum (oder Minimum) von A *in* A.

Beispiele. [Maximum, Minimum einer Teilmenge von $\mathbb{R}$]

- Das Intervall $A :=]-1, 1]$ besitzt ein Maximum, nämlich

$$\max]-1, 1] = 1 = \sup]-1, 1].$$

  A besitzt kein Minimum. Es gilt

$$\inf]-1, 1] = -1 \notin]-1, 1].$$

Satz 2.16 (Vollständigkeit der reellen Zahlen)**.** *(i) Jede nicht leere, nach oben beschränkte Teilmenge* $A \subseteq \mathbb{R}$ *besitzt eine kleinste obere Schranke. (Damit meinen wir ein kleinstes Element der Menge* $S := \{$*obere Schranke von* $A\}$*.)*

(ii) Jede nicht leere, nach unten beschränkte Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ *besitzt eine grösste untere Schranke.*

Beweis: S. 73

Bemerkungen.
- Die Eigenschaften ((i),(ii)) der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen heissen (*Dedekind-*) *Vollständigkeit.*

- Die zu ((i),(ii)) analogen Aussage für die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen sind falsch. Zum Beispiel ist die Menge

$$\left\{r \in \mathbb{Q} \,\middle|\, r^2 < 2\right\}$$

beschränkt, besitzt aber keine kleinste obere und keine grösste untere Schranke *in* $\mathbb{Q}$. (*In* $\mathbb{R}$ besitzt die Menge solche Schranken. Welche?)

Definition 2.17 (Supremum, Infimum)**.** *Sei* $A \subseteq \mathbb{R}$. *Wir definieren das* Supremum von A *als*

$$\sup A := \begin{cases} \textit{kleinste obere Schranke für } A, & \textit{falls } A \neq \emptyset \textit{ und } A \textit{ nach oben beschränkt ist,} \\ \infty & \textit{falls } A \textit{ nicht nach oben beschränkt ist,} \\ -\infty & \textit{falls } A = \emptyset. \end{cases}$$

Wir definieren das Infimum von A *als*

$$\inf A := \begin{cases} \textit{grösste unter Schranke für } A, & \textit{falls } A \neq \emptyset \textit{ und } A \textit{ nach unten beschränkt ist,} \\ -\infty & \textit{falls } A \textit{ nicht nach unten beschränkt ist,} \\ \infty & \textit{falls } A = \emptyset. \end{cases}$$

Bemerkungen. [Supremum, Infimum]

- Wegen Satz 2.16 sind das Supremum und das Infimum von A wohldefiniert, d. h. sinnvoll.

- Wir nehmen an, dass A ein Maximum (Minimum) besitzt. Dann gilt

$$\sup A = \max A \in A \qquad (\inf A = \min A).$$

- $\infty = +\infty$ ("unendlich") und $-\infty$ sind Hilfszeichen, die per definitionem die Ungleichungen

$$\forall x \in \mathbb{R} : -\infty < x < \infty$$

erfüllen. Wir können die Grundrechenarten teilweise auf die Menge $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ erweitern. Zum Beispiel definieren wir

$$\forall x \in \mathbb{R} : \infty + x := x + \infty := \infty, \quad \forall x \in]0, \infty] :=]0, \infty[\cup \{\infty\} : \infty \cdot x := x \cdot \infty := \infty$$

Gewisse Ausdrücke, in denen $\pm\infty$ vorkommen, können jedoch nicht auf eine sinnvolle Weise definiert werden, zum Beispiel

$$\infty - \infty.^{11}$$

Wir müssen also beim Rechnen mit den Symbolen $\pm\infty$ aufpassen. Die Zeichen $\pm\infty$ sind keine Zahlen. Sie haben keine tiefe mathematische oder philosophische Bedeutung.

- Es ist praktisch, das Supremum von A auch für ein nicht nach oben beschränktes (leeres) A zu definieren, da wir die Voraussetzung, dass A nach oben beschränkt (nicht leer) ist, dann in vielen Sätzen weglassen können. Zum Beispiel gilt mit unserer Definition folgender Satz: Für alle $A, B \subseteq \mathbb{R}$ gilt, dass

$$\sup A \cup B = \text{Maximum von } \sup A \text{ und } \sup B.$$

Das gilt also zum Beispiel auch, falls A oder B nach oben unbeschränkt oder leer ist. (Überzeugen Sie sich davon!) Wir brauchen also nicht vorauszusetzen, dass A und B nicht leer und nach oben beschränkt sind. In manchen Sätzen und Beweisen brauchen wir mit unserer Definition keine Fälle zu unterscheiden. Das vereinfacht die Theorie.

Beispiele. [Supremum, Infimum]Es gilt:

$$\begin{aligned} \sup]0,1[&= 1 \\ \inf]0,1[&= 0 \\ \sup \mathbb{N} &= \infty \\ \inf \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} &= 0 \end{aligned}$$

Beweis des Satzes 2.16: (ii): Wir definieren[12]

$$b := \bigcup_{a \in A} a := \text{Vereinigung aller } a \in A = \big\{ r \in \mathbb{Q} \,\big|\, \exists a \in A : \, r \in a \big\}. \tag{2.26}$$

(ii) folgt aus den folgenden zwei Behauptungen.

[11] Es ist nicht möglich, $\infty - \infty = \infty + (-\infty)$ so als eine reelle Zahl zu definieren, dass Assoziativität für die Addition gilt, da dann gelten müsste, dass

$$\infty + (-\infty) = (1 + \infty) + (-\infty) = 1 + (\infty + (-\infty)).$$

[12] Hierbei verwenden wir die Definition 2.2 der reellen Zahlen als Dedekind-Schnitte.

Behauptung 1. $b \in \mathbb{R}$

Beweis der Behauptung 1: Wir überprüfen die Bedingungen der Definition 2.2 für $x := b$:

(a) ($b \neq \emptyset$): Wegen unserer Voraussetzung $A \neq \emptyset$ gibt es ein $a_0 \in A \subseteq \mathbb{R}$. Gemäss (2.26) gilt $b \supseteq a_0$. Wegen der Dedekind-Bedingung (a) für $x := a_0$ gilt $a_0 \neq \emptyset$. Also gilt $b \neq \emptyset$, d. h. $x := b$ erfüllt (a).

(b) ($b \neq \mathbb{Q}$): Wegen unserer Voraussetzung, dass A nach unten beschränkt ist, gibt es ein $a_0 \in \mathbb{R}$ so, dass für jedes $a \in A$ gilt $a \geq a_0$, d. h. $a \subseteq a_0$. Gemäss (2.26) gilt daher $b \subseteq a_0$. Wegen Bedingung (b) für a_0 gilt $a_0 \neq \mathbb{Q}$. Also gilt $b \neq \mathbb{Q}$, d. h. $x := b$ erfüllt (b).

(c) ($\forall r \in b \forall s \in \mathbb{Q} : s > r \Rightarrow s \in b$): Sei $r \in x := b$ und $s \in \mathbb{Q}$ so, dass $s > r$. Gemäss (2.26) gibt es ein $a_0 \in A \subseteq \mathbb{R}$ so, dass $r \in a_0$. Wegen Bedingung (c) für $x := a_0$ und unserer Annahme $s > r$ gilt $s \in a_0$. Gemäss (2.26) gilt $a_0 \subseteq b$, also $s \in b$. Also erfüllt $x := b$ die Bedingung (c).

(d) ($\forall r \in b \exists s_0 \in b : s_0 < r$): Sei $r \in x := b$. Gemäss (2.26) gibt es ein $a_0 \in A \subseteq \mathbb{R}$ so, dass $r \in a_0$. Wegen Bedingung (d) für $x := a_0$ gibt es ein $s_0 \in a_0$ so, dass $s_0 < r$. Gemäss (2.26) gilt $a_0 \subseteq b$, also $s_0 \in b$. Also erfüllt $x := b$ die Bedingung (d).

Das beweist Behauptung 1. □

Behauptung 2. *(1) b ist eine untere Schranke für A.*

(2) Jede untere Schranke c für A erfüllt $c \leq b$.

Beweis der Behauptung 2: (1): Gemäss (2.26) gilt für jedes $a \in A$, dass $a \subseteq b$, d. h. $a \geq b$. Daher ist b untere Schranke für A. Also ist (1) erfüllt.

(2): Sei c eine untere Schranke für A. Für jedes $a \in A$ gilt $c \leq a$, d. h. $c \supseteq a$. Gemäss (2.26) folgt, dass $c \supseteq b$, d. h. $c \leq b$. Also ist (2) erfüllt.

Das beweist Behauptung 2 und somit (ii).

(i): Wir definieren die Menge

$$-A := \big\{ -a \,\big|\, a \in A \big\}.$$

Gemäss (ii) besitzt $-A$ eine grösste untere Schranke $\widetilde{c}$. (Überprüfen Sie die Bedingungen!) Die Zahl $c := -\widetilde{c}$ ist eine kleinste obere Schranke für A. (Überprüfen Sie das!) Das beweist (i) und schliesst den Beweis des Satzes 2.16 ab. □

Bemerkung. [Dedekind-Schnitt und Infimum] Sei $x \in \mathbb{R}$, d. h. ein Dedekind-Schnitt. Es gilt

$$x = \inf \left\{ \mathbf{r} \,\middle|, r \in x \right\},$$

d. h. x ist das Infimum aller reellen Zahlen, die den rationalen Zahlen entsprechen, woraus x besteht.

Im Beweis der Proposition 2.6 ($\sqrt{\mathbf{2}}^2 = \mathbf{2}$) haben wir die folgende Eigenschaft von $\mathbb{R}$ verwendet.

Proposition 2.18 (Archimedisches Prinzip)**.** *Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ so, dass $x \leq n_0$.*

Beweis der Proposition 2.18: Fall $x \geq 0$: Gemäss Bedingung (a) in Definition 2.2 ist x nicht leer. Also gibt es ein $r \in x$. Wir wählen $n_0 \in \mathbb{Z}$ und $k \in \mathbb{N}$ so, dass $r = \frac{n_0}{k}$. Es gilt

$$x < r \leq kr = n_0,$$

wie gewünscht.

Im **Fall** $x < 0$ hat $n_0 := 0$ die gewünschte Eigenschaft.

Das beweist Proposition 2.18. □

Abschliessend bemerken wir noch Folgendes zu den Mengen der natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Zahlen:

Bemerkungen 2.19. [Gleichmächtigkeit von $\mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, Ungleichmächtigkeit von $\mathbb{N}_0$ und $\mathbb{R}$]

(i) Wir nennen zwei Mengen X und Y *gleichmächtig* g. d. w. es Bijektion, d. h. eine bijektive Abbildung, von X nach Y gibt. Falls X und Y endlich sind, dann bedeutet das, dass X und Y die gleiche Anzahl Elemente besitzen. Intuitiv interpretieren wir Gleichmächtigkeit auch im Fall unendlicher Mengen[13] auf diese Weise.

(ii) Die Mengen $\mathbb{N}_0$ und $\mathbb{Z}$ sind gleichmächtig. Die folgende Abbildung ist nämlich eine Bijektion:

$$f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}, \qquad f(n) := \begin{cases} k, & \text{falls } n = 2k \text{ mit } k \in \mathbb{N}_0, \\ -k, & \text{falls } n = 2k-1 \text{ mit } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

[13] Das sind Mengen mit unendlich vielen Elementen.

(iii) Die Mengen $\mathbb{N}_0$ und $\mathbb{Q}$ sind gleichmächtig. Das folgt aus dem *ersten Cantorschen Diagonalverfahren*. (Siehe [Stra, S. 19] und [Strb, Satz 2.4.1., S. 29].)

(iv) Die Mengen $\mathbb{N}_0$ und $\mathbb{R}$ sind nicht gleichmächtig. Es gibt nämlich keine Surjektion, d. h. surjektive Abbildung, von $\mathbb{N}_0$ nach $\mathbb{R}$. Das folgt aus dem *zweiten Cantorschen Diagonalverfahren*. (Siehe [Stra, S. 19] und [Strb, Satz 2.4.2., S. 30].)

Es gibt auch keine Injektion, d. h. injektive Abbildung, von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{N}_0$. Nicht alle unendlichen Mengen besitzen also gleich viele Elemente.

(v) Wir nennen eine Menge X *abzählbar* g. d. w. es eine injektive Abbildung von X nach $\mathbb{N}_0$ gibt. Andernfalls nennen wir X *überabzählbar*. Jede endliche Menge ist abzählbar. Die Menge $\mathbb{N}_0$ ist abzählbar. (Warum?) Gemäss (ii) und (iii) sind $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ abzählbar. Gemäss (iv) ist $\mathbb{R}$ *über*abzählbar.

2.4 Komplexe Zahl: Real- und Imaginärteil, cis-Funktion, Kosinus, Sinus, Polarform, Kreiszahl π, Fundamentalsatz der Algebra

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96b, 1.7] und [Stra, 2.5]. Wie wir gesehen haben, gibt es in den rationalen Zahlen keine Lösung der Gleichung

$$x^2 = 2.$$

Unter anderem darum haben wir die reellen Zahlen eingeführt. In diesen Zahlen gibt es eine Lösung dieser Gleichung. Die reellen Zahlen reichen aber nicht aus, um die Gleichung

$$x^2 = -1$$

zu lösen. Dazu führen wir in diesem Abschnitt die *komplexen* Zahlen ein. In diesen Zahlen hat die Gleichung $x^2 = -1$ die Lösungen $\pm i$, wobei i die imaginäre Einheit ist.

Komplexe Zahlen spielen eine zentrale Rolle in der Mathematik und in Anwendungen in der Physik und der Elektrotechnik. Zum Beispiel kann der elektrische Schwingkreis mittels einer linearen gewöhnlichen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten beschrieben werden. (Siehe später.) Die Lösungen einer solchen Gleichung können am einfachsten mittels komplexwertiger Exponentialfunktionen beschrieben werden.

Sei $v \in \mathbb{R}^n$ und $i \in \{1, \ldots, n\}$ Wir schreiben

$$v_i := i\text{-te Komponente von } v = i\text{-te Standard-Koordinate von } v.$$

Das bedeutet, dass v durch das Tupel seiner Komponenten gegeben ist, d. h.

$$v = \big(v_1, \ldots, v_n\big).$$

Wir definieren die Vektoraddition in $\mathbb{R}^n$ als die Abbildung

$$+ := +_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad v + w := +(v, w) := \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix}.$$

Definition (komplexe Multiplikation)**.** *Wir definieren die* komplexe Multiplikation *als die Abbildung*

$$\bullet_{\mathbb{C}} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \bullet_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} := \bullet_{\mathbb{C}} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right) := \begin{pmatrix} xx' - yy' \\ xy' + yx' \end{pmatrix}.$$

Wir definieren den Körper der komplexen Zahlen *als das Tripel*

$$\mathbb{C} := \left(\mathbb{R}^2, +_{\mathbb{R}^2}, \bullet_{\mathbb{C}} \right).$$

Wir nennen jeden Punkt in der Ebene $\mathbb{R}^2$ *eine* komplexe Zahl*. Wir definieren die* imaginäre Einheit *als den Punkt*

$$i := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bemerkungen. [Körper der komplexen Zahlen]

- $\mathbb{C}$ ist ein Körper, d. h. $\mathbb{C}$ besitzt die Eigenschaften A.i)-iv), M.i)-iv), D) in [Stra, 2.2 Die reellen Zahlen] mit $\mathbb{R}$ ersetzt durch $\mathbb{R}^2$. (Das sind die Rechenregeln, die Sie für $\mathbb{R}$ aus dem Gymnasium kennen.)
- Es gibt keine Ordnung $\leq$ auf $\mathbb{R}^2$ so, dass das Quadrupel $\left(\mathbb{R}^2, +_{\mathbb{R}^2}, \bullet_{\mathbb{C}}, \leq \right)$ die Eigenschaften O.i)-iv), K.i),ii) in [Stra, 2.2 Die reellen Zahlen] mit $\mathbb{R}$ ersetzt durch $\mathbb{R}^2$ besitzt. Das bedeutet, dass wir aus $\mathbb{C}$ keinen (total) geordneten Körper machen können.

Die Abbildung

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \tag{2.27}$$

ist injektiv und überführt Addition und Multiplikation in $\mathbb{R}$ in Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$, d. h. für alle $x, x' \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{pmatrix} x + x' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} +_{\mathbb{R}^2} \begin{pmatrix} x' \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} xx' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \bullet_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} x' \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(Überprüfen Sie das!) Wir können $\mathbb{R}$ daher mit seinem Bild unter der Abbildung (2.27) identifizieren. Somit können wir $\mathbb{R}$ als eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ auffassen. Zur Vereinfachung der Notation schreiben wir ab jetzt

$$+_{\mathbb{R}^2} \qquad \bullet_{\mathbb{C}} \qquad \text{als} \qquad + \qquad \cdot$$

Wie üblich lassen wir das Produktzeichen $\cdot$ manchmal weg. Des Weiteren schreiben wir einen Punkt $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ als

$$z = x + iy. \tag{2.28}$$

(Hierbei verwenden wir die Identifikation mittels (2.27), um x als ein Element von $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ aufzufassen.)

Bemerkungen. [imaginäre Einheit, Quadratwurzeln aus -1, komplexe Multiplikation]

- Es gilt:
$$i^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1$$
Im Körper $\mathbb{C}$ gibt es also eine Zahl, deren Quadrat gleich -1 ist. Das unterscheidet $\mathbb{C}$ von $\mathbb{R}$, da für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt, dass $x^2 \geq 0$, also $x^2 \neq -1$. Das ist ein entscheidender Vorteil von $\mathbb{C}$ gegenüber $\mathbb{R}$ und der Grund dafür, dass $\mathbb{C}$ eine zentrale Rolle in der Mathematik und insbesondere in der Analysis spielt.

- Es gibt in $\mathbb{C}$ zwei Quadratwurzeln aus -1, nämlich i und $-i$.

- Allgemein gilt für zwei komplexe Zahlen $z = x + iy$ und $z' = x' + iy'$), dass
$$(x + iy) \cdot_{\mathbb{C}} (x' + iy') = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx' - yy' \\ xy' + yx' \end{pmatrix} = xx' - yy' + i(xy' + yx').$$
Das stimmt mit der Formel für die komplexe Multiplikation überein, die Sie aus dem Gymnasium kennen. Die Definition 2.4 der komplexen Multiplikation präzisiert diese Formel. Wir haben jetzt nämlich definiert, was eine komplexe Zahl ist (nämlich ein Punkt in $\mathbb{R}^2$). Es ist jetzt darum sinnvoll zu definieren, was das Produkt zweier komplexer Zahl ist.

Definition (Real- und Imaginärteil, komplex Konjugierte)**.** *Wir definieren den* Realteil *von* $z = x + iy$ *als*

$$\mathrm{Re}(z) := x \in \mathbb{R}$$

und den Imaginärteil *von* z *als*

$$\mathrm{Im}(z) := y \in \mathbb{R}.$$

Wir definieren die zu z komplex konjugierte Zahl *(oder schlicht* Konjugierte*) als*

$$\overline{z} := x - iy.$$

Wir definieren die *euklidische Norm* wie in (1.8). Für $z \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ nennen wir seine Norm

$$r := |z| := \|z\|$$

auch den (*Absolut-*)*Betrag* (oder *Radius*) von z.

Bemerkungen. [komplex Konjugierte, Inverses]

- Für jedes $z = x + iy \in \mathbb{C}$ gilt

$$z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = xx + x(-iy) + iyx + iy(-iy) = x^2 + y^2 = |z|^2. \quad (2.29)$$

- Für alle $z, z' \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}, \quad (2.30)$$
$$\overline{zz'} = \overline{z} \cdot \overline{z'} \quad (2.31)$$

  Beweis: (2.30): selber rechnen

  (2.31): Wir schreiben $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$. Es gilt

$$\begin{aligned}\overline{zz'} &= \overline{(x+iy)(x'+iy')} \\ &= \overline{xx' - yy' + i(xy' + yx')} \\ &= xx' - yy' - i(xy' + yx') \\ &= (x-iy)(x'-iy') \\ &= \overline{z} \cdot \overline{z'}\end{aligned}$$

- Aus 2.29 folgt, dass jede Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ bezüglich der komplexen Multiplikation invertierbar ist mit Inversem (= Kehrwert) gegeben durch

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Beispiel. [Kehrwert einer komplexen Zahl]

$$(1+i)^{-1} = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{|1+i|^2} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$$

Um die Winkelfunktionen Kosinus und Sinus zu definieren, benötigen wir folgendes Lemma.

Lemma 2.20. *Es gibt eine eindeutige differenzierbare Abbildung* $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *so, dass*

$$\|\gamma\| \equiv 1, \tag{2.32}$$
$$\|\gamma'\| \equiv 1, \tag{2.33}$$
$$\gamma(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.34}$$
$$\gamma'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.35}$$

Beweis: Existenz von γ: S. 204

Eindeutigkeit folgt aus Korollar 5.16(i) (Mittelwertsatz).

Bemerkungen.

- Eine Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^n$ heisst auch *Weg in* $\mathbb{R}^n$. γ ist also ein Weg in $\mathbb{R}^2$.
- Die Bedingung (2.32) bedeutet, dass γ Werte im Einheitskreis
$$S^1 := S_1^1(0) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1\right\}$$
annimmt.
- Differenzierbarkeit von γ bedeutet, dass γ_1 und γ_2 (überall) differenzierbar sind. (Siehe Definition 5.1.)
- $\gamma' = (\gamma_1', \gamma_2') : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ist die Ableitung von γ. (Siehe Definition 5.1.) Wir interpretieren $\gamma(\varphi)$ als den Ort eines Teilchens zum Zeitpunkt $t = \varphi \in \mathbb{R}$. $\gamma'(\varphi)$ ist dann die (Momentan-)Geschwindigkeit des Teilchens zum Zeitpunkt φ.
- Die Bedingung (2.33) bedeutet, dass der Betrag der Geschwindigkeit von γ konstant gleich 1 ist.
- Bedingung (2.34) bedeutet, dass sich das Teilchen zum Zeitpunkt $\varphi = 0$ im Punkt $(1, 0)$ befindet. Bedingung (2.35) bedeutet, dass es sich zum Zeitpunkt $\varphi = 0$ mit Geschwindigkeit 1 in (positiver) y-Richtung bewegt. Das Teilchen bewegt sich darum im Gegenuhrzeigersinn um den Ursprung $(0, 0)$.
- γ ist eine *Parametrisierung von* S^1 *nach der Bogenlänge.*

Definition 2.21 (cis-Funktion, Kosinus, Sinus)**.** *Wir definieren* cis $= (\mathrm{cis}_1, \mathrm{cis}_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *als die eindeutige Abbildung* γ *wie in Lemma 2.20. Wir definieren* Kosinus *und* Sinus *als die Funktionen*

$$\cos := \mathrm{cis}_1,\ \sin := \mathrm{cis}_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Bemerkungen. [Kosinus, Sinus, cis]

- Diese Funktionen stimmen mit den Funktionen cos und sin überein, die Sie im Gymnasium kennengelernt haben. Dabei ist $\cos\varphi$ der Kosinus des Winkels φ, der im Bogenmass gemessen wird.
- Es gilt $\pi = 180°$, also zum Beispiel $\cos\pi = \cos 180°$.
- Kosinus und Sinus sind *Winkelfunktionen* (oder *trigonometrische Funktionen*).
- Es gilt
$$\mathrm{cis} = \begin{pmatrix}\cos\\ \sin\end{pmatrix} = \cos + i\sin, \tag{2.36}$$
wobei wir die Notation (2.28) verwendet haben.
- "cis" steht für *C*osinus + i *S*inus. Gemäss (2.36) ist das eine sinnvolle Abkürzung.
- Die berühmte *eulersche Formel* besagt, dass
$$\mathrm{cis}\,\varphi = \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}, \qquad \forall\varphi\in\mathbb{R}.$$
(Siehe Korollar 3.50.) In dieser Formel kommt die *komplexe Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $\exp(z) = e^z$, vor. Diese werden wir später mittels der *Exponentialreihe* definieren.(Siehe Definition 3.25.)
- Es gilt
$$\mathrm{cis}(\varphi+\psi) = \mathrm{cis}(\varphi)\,\mathrm{cis}(\psi), \qquad \forall\varphi,\psi\in\mathbb{R}.$$
Das folgt aus den Additionstheoremen für Kosinus und Sinus,
$$\begin{aligned}\cos(\varphi+\psi) &= \cos(\varphi)\cos(\psi) - \sin(\varphi)\sin(\psi),\\ \sin(\varphi+\psi) &= \sin(\varphi)\cos(\psi) + \cos(\varphi)\sin(\psi).\end{aligned}$$

Definition 2.22 (Kreiszahl π)**.** *Wir definieren*
$$\pi := 2\varphi_0,$$
wobei $\varphi_0\in]0,\infty[$ *die kleinste positive Nullstelle von* cos *ist.*

Bemerkungen.
- Eine Nullstelle einer Funktion $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist eine Zahl $\varphi\in\mathbb{R}$ so, dass $f(\varphi) = 0$.
- π ist gleich der halben Länge des Einheitskreises S^1, also gleich dem halben Umfang der Einheitskreisscheibe.

- π ist irrational. Seine Dezimaldarstellung lautet

$$\pi = 3.14\ldots$$

  Diese Darstellung ist nicht periodisch.

- Es gilt

$$\operatorname{cis}\left(\frac{k}{2}\pi\right) = i^k, \qquad \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{2.37}$$

  (Überprüfen Sie das!)

Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Wir schreiben

$$r := |z|.$$

Bemerkung 2.23. Es gibt eine eindeutige Zahl $\varphi \in]-\pi, \pi]$ so, dass

$$z = r\operatorname{cis}(\varphi).$$

Definition 2.24 (Polarwinkel)**.** *Wir definieren den* Polarwinkel *(oder das* Argument*) von z als das eindeutige φ wie in Bemerkung 2.23.*

Es gilt

$$z = r\operatorname{cis}(\varphi) = re^{i\varphi}.$$

Wir nennen das die *Polarform* der komplexen Zahl z.[14]

Beispiele. [Polarform] Gemäss (2.37) haben wir die folgenden Polarformen:

$$1 = 1 \cdot \operatorname{cis}(0), \qquad i = 1 \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right), \qquad -1 = 1 \cdot \operatorname{cis}(\pi)$$

Weitere Polarformen:

$$1 + i = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right), \qquad \sqrt{3} + i = 2 \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right), \qquad 1 + \sqrt{3}i = 2 \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

(Überprüfen Sie das!)

Bemerkungen. [Polarform eines Produkts]

- Seien $z, z' \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit Polarformen

$$z = r\operatorname{cis}(\varphi), \qquad z' = r'\operatorname{cis}(\varphi').$$

  Dann ist die Polarform von zz' gegeben durch

$$zz' = rr'\operatorname{cis}(\varphi + \varphi'). \tag{2.38}$$

[14] Wie gesagt, werden wir die komplexe Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\exp(z) = e^z$ später definieren.

- Sei $z = r\,\mathrm{cis}(\varphi)$ eine komplexe Zahl in Polarform. Dann gilt $\overline{z} = \cos\varphi - i\sin\varphi = r\,\mathrm{cis}(-\varphi)$ und daher gemäss (2.38)

$$z\overline{z} = rr\,\mathrm{cis}(\varphi - \varphi) = r^2\,\mathrm{cis}(0) = |z|^2.$$

  Das stimmt mit (2.29) überein.

Mit Hilfe dieser Bemerkung können wir Produkte und Potenzen komplexer Zahlen berechnen.

Beispiele. [Produkte und Potenzen von komplexen Zahlen]

- Frage: Was ist $(1+i)^8$? Antwort: In Polarform haben wir $1 + i = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Gemäss (2.38) gilt daher

$$(1+i)^8 = 2^{\frac{8}{2}}\,\mathrm{cis}\left(8\cdot\frac{\pi}{4}\right) = 16.$$

- $\left(\sqrt{3}+i\right)^3$ =? Antwort: In Polarform haben wir $\sqrt{3} + i = 2\cdot\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Gemäss (2.38) gilt daher

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^3 = 2^3\cdot\mathrm{cis}\left(3\cdot\frac{\pi}{6}\right) = 8i.$$

Wir können beliebige Wurzeln aus komplexen Zahlen ziehen: Sei $z \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N}$.

Definition 2.25. *Eine k-te Wurzel von z ist eine Zahl $w \in \mathbb{C}$ so, dass*

$$w^k = z.$$

Im **Fall** $z = 0$ ist $w := 0$ die einzige k-te Wurzel von z.

Fall $z \neq 0$: Wir schreiben $z = r\,\mathrm{cis}\,\varphi$ in Polarform. Dann sind genau die Zahlen

$$w_j := \sqrt[k]{r}\,\mathrm{cis}\left(\frac{\varphi + 2\pi j}{k}\right), \quad j = 0, \ldots, k-1,$$

die k-ten Wurzeln von z. (Die Wurzel $\sqrt[k]{r}$ ist als die eindeutige Zahl $a \in [0, \infty[$ definiert so, dass $a^k = r$. Siehe Definition 4.47.) Für $z = 1$ erhalten wir die *k-ten Einheitswurzeln*

$$\zeta_k^0 = 1, \zeta_k^1 = \zeta_k, \zeta_k^2, \ldots, \zeta_k^{k-1}, \qquad \zeta_k := \mathrm{cis}\left(\frac{2\pi}{k}\right)$$

Bemerkungen. [Potenzen mit nicht ganzzahligem Exponenten]

- Für komplexe Zahlen $z \neq 0$ und w ist die Potenz "z^w" ist im Allgemeinen *nicht* eindeutig definiert. Es ist jedoch möglich, ihr einen mehrdeutigen Wert zu geben. Das bedeutet, dass wir z^w als eine Menge von komplexen Zahlen definieren können. Im Fall $w = \frac{1}{k}$ mit $k \in \mathbb{N}$ ist das die Menge

$$z^{\frac{1}{k}} := \left\{ r^{\frac{1}{k}} \operatorname{cis}\left(\frac{\varphi + 2\pi j}{k}\right) \;\middle|\; j = 0, \ldots, k-1 \right\}.$$

  Zum Beispiel gilt

$$\sqrt{-1} = (-1)^{\frac{1}{2}} = \{-i, i\}.$$

In $\mathbb{C}$ können wir nicht nur die Gleichung $z^2 = -1$ lösen, sondern *jede polynomiale* Gleichung ausser die Gleichung *konstantes Polynom* $= 0$. Das ist der Inhalt des folgenden Satzes:

Satz 2.26 (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Jedes nicht konstante komplexe Polynom besitzt eine*[15] *komplexe Nullstelle.*

Beweis: [Stra, Satz 5.5.4., S. 101]

Bemerkungen. [Fundamentalsatz der Algebra]

- Ein komplexes Polynom ist eine Funktion der Form

$$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad p(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0,$$

  wobei $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$.

- Die Aussage dieses Satzes bedeutet, dass $\mathbb{C}$ *algebraisch abgeschlossen* ist. Im Gegensatz dazu ist $\mathbb{R}$ nicht algebraisch abgeschlossen, da die polynomiale Gleichung $x^2 + 1 = 0$ in $\mathbb{R}$ keine Lösung x besitzt. Algebraische Abgeschlossenheit ist also ein Vorteil der komplexen Zahlen gegenüber den reellen Zahlen.

[15] Das bedeutet *mindestens eine.*

Kapitel 3

Folge und Reihe

Dieses Kapitel entspricht [Bla96a, 1.1, 2.4, 2.5] und [Stra, Kapitel 3, Folgen und Reihen]. Eine (*Zahlen-*)*Folge* ist eine unendliche geordnete Liste von Zahlen der Form $a_0, a_1, a_2, \ldots$, die wir als $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ schreiben. Eine Folge konvergiert gegen eine Zahl A g. d. w. die Terme der Folge sich A immer mehr nähern. Die zu einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gehörige *Reihe* ist die Folge der *Partialsummen* $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Grob gesagt ist eine *Potenzreihe* eine Reihe der Form $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$, wobei x eine Variable ist. Der Grenzwert einer Potenzreihe ist eine Funktion von x, die auf der Menge aller x definiert ist, für welche die Potenzreihe konvergiert. Mit Hilfe von Potenzreihen können wir daher viele neue Funktionen konstruieren, zum Beispiel die Exponentialfunktion.

Die *Taylorreihe* einer beliebig oft differenzierbaren Funktion f ist eine Potenzreihe, die wir mittels Ableitungen von f in einem festen Punkt bilden. Für viele Funktionen f konvergiert die Taylorreihe von f in vielen Punkten gegen f. Wir können die Funktion also mit Hilfe ihrer Taylorreihe darstellen.

Die Begriffe *Konvergenz* und *Grenzwert* spielen eine zentrale Rolle in der Analysis. Zum Beispiel ist die Ableitung einer Funktion an einer Stelle der Grenzwert des Differenzenquotienten.

3.1 Zenons Paradoxon von Achilles und der Schildkröte, Folge, Konvergenz, Grenzwert

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96b, 2.4] und [Stra, 3.1, 3.2].

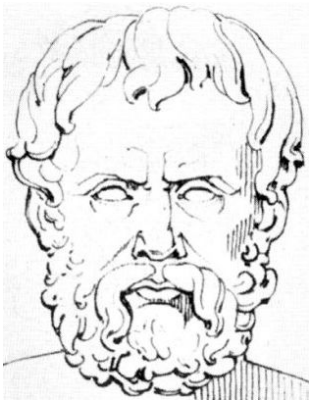


Abbildung 3.1: Zenon von Elea, ca. 490 v. Chr. - ca. 430 v. Chr., griechischer Philosoph



Abbildung 3.2: Achilles, ein Held der griechischen Mythologie

Zenons Paradoxon von Achilles und der Schildkröte

Wie erwähnt, spielen Potenzreihen eine wichtige Rolle in der Analysis. Eine elementarere Motivation für Folgen und Reihen ist dadurch gegeben, dass damit Hilfe der *geometrischen Reihe* das zweite Paradoxon von Zenon von Elea gelöst werden kann. (Siehe Abbildung 3.1.) Bei diesem Paradoxon handelt es sich um Folgendes:

Zenons Paradoxon von Achilles und der Schildkröte: In diesem Paradoxon geht es um einen Wettlauf zwischen Achilles (Abbildung 3.2) und einer Schildkröte. In diesem Wettlauf startet die Schildkröte mit einem Vorsprung. Gemäss Zenon kann Achilles die Schildkröte aus dem folgenden Grund nicht einholen:

Die Schildkröte startet in einem Punkt p_0. Sobald Achilles p_0 erreicht, ist die Schildkröte schon bei einem anderen Punkt p_1 angelangt. Sobald Achilles p_1 erreicht, ist die Schildkröte schon bei einem anderen Punkt p_2 angelangt. Dieser Prozess geht unendlich lang weiter. Also bleibt die Schildkröte immer vor Achilles.

Folgen

Informell ist eine *Folge* eine unendliche Liste von mathematischen Objekten $a_0, a_1, a_2, \ldots$. Oft sind die Objekte Zahlen. Die folgende Definition präzisiert diese Idee.

Definition 3.1 (Folge)**.** *Eine* komplexe Zahlenfolge *(oder kurz* Folge*) ist eine Funktion*

$$a : \mathbb{N}_N := \left\{ n \in \mathbb{N}_0 \,\middle|\, n \geq N \right\} \to \mathbb{C},$$

wobei $N \in \mathbb{N}_0$*. Wir schreiben*

$$a_n := a(n), \qquad (a_n) := (a_n)_{n \in \mathbb{N}_N} := a.$$

Wir nennen n den Folgenindex *und a_n das n-te* Folgenglied.

Beispiele. [Folge]

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} := (n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, also $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2, \ldots$
- Wir definieren die *harmonische Folge* als $\left(a_n := \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}=\mathbb{N}_1}$. Der Folgenindex n beginnt hier bei $N = 1$. ("$a_0 := \frac{1}{0}$" ist keine wohldefinierte Zahl.)
- Sei $z \in \mathbb{C}$. Die *geometrische Folge mit dem Quotienten z* ist gegeben durch

  $$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (z^n)_{n\in\mathbb{N}_0}.$$

  Für $z = \frac{1}{2}$ ist diese Folge zum Beispiel gegeben durch

  $$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = \left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}, \quad \text{also} \quad a_0 = \frac{1}{2^0} = 1,\ a_1 = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}, \ldots$$

- Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Die *geometrische Reihe mit gemeinsamem Verhältnis z* ist die Folge

  $$\left(a_n := \sum_{k=0}^{n} z^k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}, \text{ also die Folge}$$
  $$a_0 := z^0 = 1, \quad a_1 := z^0 + z^1 = 1 + z, \quad a_2 := z^0 + z^1 + z^2 = 1 + z + z^2, \quad \ldots$$

  (Wir werden später allgemeine Reihen behandeln.)

Bemerkung. [Folge] Der Einfachheit halber formulieren wir im Folgenden Definitionen und Sätze für Folgen, deren Folgenindex bei $n = N = 0$ beginnt. Die Definitionen sind auch für andere N sinnvoll, und die Sätze gelten auch für andere N.

Informell sagen wir, dass eine Folge gegen eine reelle oder komplexe Zahl A konvergiert, falls ihre Glieder sich A immer mehr nähern, wenn n grösser wird. In diesem Fall nennen wir A den *Grenzwert* (oder *Limes*) der Folge. Die folgende Definition präzisiert diese Begriffe.

Definition 3.2 (Konvergenz, Grenzwert einer Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$)**.** *(i) Sei $A \in \mathbb{C}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine komplexe Zahlenfolge.*[1] *Wir sagen, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$* gegen A konvergiert *g. d. w. gilt*

$$\forall \varepsilon \in]0, \infty[\exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall n \in \mathbb{N}_0 : \ n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - A| \leq \varepsilon. \tag{3.1}$$

[1] Das schliesst den Fall mit ein, dass $A \in \mathbb{R}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine reelle Zahlenfolge ist.

Wir verwenden dafür die Notationen

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \to A, \qquad a_n \to A \quad (n \to \infty) \tag{3.2}$$

und sagen auch:

"a_n konvergiert gegen A für n gegen unendlich."

Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \to A$, dann nennen wir A den Grenzwert *(oder* Limes*) der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und schreiben dafür*

$$\lim_{n\to\infty} a_n := \lim(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} := A. \tag{3.3}$$

(ii) Wir sagen, dass eine Folge konvergiert *g. d. w. es eine komplexe Zahl gibt, wogegen die Folge konvergiert. Andernfalls sagen wir, dass die Folge* divergiert*.*

Bemerkungen. • Die Bedingung (3.1) besagt:

Für jede reelle Zahl $\varepsilon > 0$

gibt es eine natürliche Zahl $n_0 \in \mathbb{N}_0$ so,

dass für jede natürliche Zahl $n \geq n_0$ gilt, dass

$$|a_n - A| \leq \varepsilon.$$

- ε spielt hierbei die Rolle einer oberen Schranke für den "Fehler", d. h. die Abweichung des Folgengliedes a_n vom Grenzwert A. (Der griechische Buchstabe ε steht für *error* = Fehler.) Konvergenz bedeutet, dass dieser Fehler kleiner gleich ein beliebiges vorgegebenes $\varepsilon > 0$ wird, sobald der Folgenindex n genügend gross wird, d. h. grösser gleich ein bestimmtes n_0. Dieses n_0 darf von ε abhängen.

- Das Zeichen "∞", das im Ausdruck "$a_n \to A \quad (n \to \infty)$" auftritt, hat keine selbstständige Bedeutung. Es bedeutet nur etwas im Zusammenhang mit dem ganzen Ausdruck. Wir benützen hier das Zeichen "∞", da es bei der Konvergenz darum geht, wie sich a_n verhält, wenn n immer grösser wird, also intuitiv "sich ∞ annähert".

  Achtung! Wir können den Index n nicht gleich ∞ setzen, d. h., "a_∞" ist nicht definiert, da ∞ keine natürliche Zahl ist.

- Der Grenzwert einer Zahlenfolge ist eindeutig (falls er existiert). Darum ist die Definition (3.3) sinnvoll.

- Definition 3.2 erklärt die in Beispiel 1.1(iii) erwähnte Struktur *Konvergenz*.

- In der Definition der Konvergenz dürfen wir die Bedingung "$n \geq n_0$" durch "$n > n_0$" ersetzen. Wir dürfen auch die Bedingung "$\leq \varepsilon$" durch "$< \varepsilon$" ersetzen. Dadurch ergeben sich äquivalente Definitionen.



Abbildung 3.3: Bernard Bolzano, 1781 - 1848, böhmischer Priester und Mathematiker.



Abbildung 3.4: Karl Weierstraß, 1815 - 1897, deutscher Mathematiker.

- Die Begriffe Konvergenz und Grenzwert wurden durch Bernard Bolzano und Karl Weierstraß definiert. (Siehe Abbildungen 3.3 und 4.1.)

Beispiel 3.3. [konstante Folge konvergiert] Sei $z \in \mathbb{C}$. Die konstante Folge $(a_n := z)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $A := z$. (Überprüfen Sie das!)

Beispiel 3.4. [harmonische Folge konvergiert] **Behauptung:** Die *harmonische Folge* $\left(a_n := \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $A := 0$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Gemäss dem Archimedischen Prinzip (Proposition 2.18) gibt es eine natürliche Zahl

$$n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon} \tag{3.4}$$

Wir wählen ein solches n_0. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ so, dass $n \geq n_0$. Es gilt

$$\begin{aligned} |a_n - A| &= \left|\frac{1}{n} - 0\right| \\ &= \frac{1}{n} \\ &\leq \frac{1}{n_0} \qquad (\text{da } n \geq n_0) \\ &\leq \varepsilon \qquad (\text{wegen (3.4)}). \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $A := 0$ konvergiert. Das beweist die Behauptung.

Beispiel 3.5. [geometrische Folge mit $|z| < 1$ konvergiert] Sei $z \in \mathbb{C}$ so, dass $|z| < 1$. **Behauptung:** Die geometrische Folge $\left(a_n := z^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert gegen 0.

Beweis: Im **Fall** $z = 0$ haben wir $z^n = 0$, für jedes $n \in \mathbb{N}$. Daher konvergiert die geometrische Folge dann gegen 0.

Fall $z \neq 0$**:** Wir definieren $x := |z|$ und $a := \frac{1}{x} - 1$. Da $x < 1$, gilt $a > 0$. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^n} &= (1+a)^n \\ &\geq 1 + na \qquad \text{gemäss der bernoullischen Ungleichung, Lemma 2.7)} \\ &\geq na. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$x^n \leq \frac{1}{na}. \tag{3.5}$$

Sei jetzt $\varepsilon > 0$. Wir wählen eine natürliche Zahl

$$n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon a}. \tag{3.6}$$

Sei $n \geq n_0$. Es gilt

$$\begin{aligned} |z^n - 0| &= |z|^n \\ &\leq \frac{1}{na} \qquad \text{(wegen } |z| = x \text{ und (3.5))} \\ &\leq \frac{1}{n_0 a} \qquad \text{(weil } n \geq n_0) \\ &\leq \varepsilon \qquad \text{(wegen (3.6)).} \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass die Folge $(z^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen 0 konvergiert.

Beispiel. [divergente Folge]

- **Behauptung:** Die Folge $(a_n := n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

Beweis: Gemäss Definition 3.2 divergiert eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ g. d. w.

$$
\begin{aligned}
&\neg\left(\exists A\in\mathbb{C}\forall\varepsilon\in]0,\infty[\exists n_0\in\mathbb{N}_0\forall n\in\mathbb{N}_0: n\geq n_0\Rightarrow |a_n-A|\leq\varepsilon\right)\\
=&\neg\exists A\forall\varepsilon\exists n_0\forall n\ldots \text{ (Der Übersichtlichkeit halber kürzen hier } \exists A\in\mathbb{C} \text{ zu } \exists A \text{ ab, usw.)}\\
\Leftrightarrow&\forall A\neg\forall\varepsilon\exists n_0\ldots\ ^{2}\\
&\text{(gemäss Bemerkung 1.21, (1.13))}\\
\Leftrightarrow&\ldots\exists\varepsilon\neg\exists n_0\forall n\ldots\\
&\text{(gemäss Bemerkung 1.21, (1.12))}\\
\Leftrightarrow&\quad\ldots\forall n_0\neg\forall n\ldots\\
&\text{(gemäss (1.13))}\\
\Leftrightarrow&\qquad\ldots\exists n\neg\left(n\geq n_0\Rightarrow |a_n-A|\leq\varepsilon\right)\\
&\text{(gemäss (1.12))}\\
\Leftrightarrow&\qquad\ldots\exists n\left(n\geq n_0\wedge |a_n-A|>\varepsilon\right)\\
=&\forall A\in\mathbb{C}\exists\varepsilon\in]0,\infty[\forall n_0\in\mathbb{N}_0\exists n\in\mathbb{N}_0: n\geq n_0\wedge |a_n-A|>\varepsilon
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Wir zeigen, dass die letzte Bedingung erfüllt ist: Sei $A\in\mathbb{C}$.

Wir definieren $\varepsilon := 1$. Sei $n_0\in\mathbb{N}_0$. Gemäss dem Archimedischen Prinzip (Proposition 2.18) gibt es eine natürliche Zahl

$$n>\max\left\{n_0,|A|+1\right\}. \tag{3.8}$$

Es gilt $n\geq n_0$ und

$$
\begin{aligned}
|n-A|&\geq n-|A| \qquad \text{(wegen Satz 2.12, Dreiecksungleichung, } |x|+|y|\geq|x+y| \text{ with } x:=n-A,\ y\\
&>1 \qquad \text{(wegen (3.8)).}
\end{aligned}
$$

Somit ist die Bedingung (3.7) erfüllt, d. h., die Folge $(a_n := n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert. Das beweist die Behauptung.

- Die Folge $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ divergiert. Siehe Übungsserie 5.

Für weitere Beispiele konvergenter und divergenter Folgen siehe die Übungsserie 5 und [Stra, Beispiele 3.2.1. iii), 3.2.2. iii,iv)].

[2] Wir haben hier eine Kette von Äquivalenzen $A_1\Leftrightarrow\cdots\Leftrightarrow A_5$. Damit meinen wir, dass $A_1\Leftrightarrow A_2$, $\ldots$, $A_4\Leftrightarrow A_5$ gilt. Daraus folgt, dass $A_1\Leftrightarrow A_5$ gilt. (Warum?)

3.2 Konvergenzkriterien: Monotoniekriterium, Konvergenz erhalten unter Summe, Produkt und Quotient, Ordnung im Limes erhalten; Eulersche Zahl

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96b, 1.1, 2.4] und [Stra, 3.3]. Wenn wir zeigen wollen, dass eine Folge konvergiert, wird es schnell schwierig, zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein geeignetes n_0 zu finden. Es gibt jedoch allgemeine Kriterien für Konvergenz, die das Problem vereinfachen, Konvergenz zu zeigen. Wir behandeln einige dieser Kriterien in diesem Abschnitt. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge *reeller* Zahlen.

Definition (obere und untere Beschränktheit, monotones Wachstum).

- *Wir nennen* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nach oben *(*unten*)* beschränkt *g. d. w. die Menge* $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ *nach oben (unten) beschränkt ist.*
- *Wir nennen* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton wachsend *(*fallend*) g. d. w. gilt*

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \qquad (a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots)$$

Sei I eine Menge und $a : I \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Wir schreiben $a_i := a(i)$. Wir erinnern uns an die Definition 1.29 des Bildes von a,

$$\operatorname{im}(a) = a(I) = \{a_i \mid, i \in I\}.$$

Des Weiteren erinnern wir uns an die Definition 2.17 des Supremums und Infimums einer Teilmenge von $\mathbb{R}$. Wir schreiben

$$\sup_{i\in I} a_i := \sup a(I).$$

Bemerkung. Wir betrachten I als eine "Indexmenge". Das ist nur eine Sichtweise. Das Wort "Indexmenge" hat keine mathematische Bedeutung.

Satz 3.6 (Monotoniekriterium).

(i) Jede nach oben beschränkte und monoton wachsende reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *konvergiert gegen* $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} a_n$.

(ii) Jede nach unten beschränkte und monoton fallende reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *konvergiert gegen* $\inf_{n\in\mathbb{N}_0} a_n := \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$.

Bemerkung. Für jede Folge wie in (i) gilt also

$$\lim(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = \lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}_0} a_n.$$

Beispiel 3.7. [Monotoniekriterium, geometrische Reihe] **Behauptung:** Für jedes $x \in [0,1[$ konvergiert die geometrische Reihe $\left(a_n := \sum_{i=0}^{n} x^i\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Beweis: Für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ gilt $x^i \geq 0$. Mittels Induktion folgt daraus, dass die geometrische Reihe monoton wachsend ist. (Warum?) Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\begin{aligned}(1-x)a_n &= (1-x)1 + (1-x)x + (1-x)x^2 + \cdots + (1-x)x^n \\ &= 1 - x + x - x^2 + x^2 - x^3 \pm \ldots + x^n - x^{n+1} \\ &= 1 - x^{n+1} \end{aligned} \tag{3.9}$$

und daher

$$a_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} < \frac{1}{1-x}. \tag{3.10}$$

Daher ist die geometrische Reihe nach oben beschränkt. Gemäss Satz 3.6(i) (Monotoniekriterium) konvergiert die geometrische Reihe daher.

Bemerkungen. [geometrische Reihe, Paradoxon von Zenon]

- In Beispiel 3.9(iii) werden wir sehen, dass der Grenzwert der geometrischen Reihe gegeben ist durch
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1}{1-x}.$$
- Dass die geometrische Reihe konvergiert, löst das Paradoxon von Zenon: Wir nehmen an, dass die Schildkröte einen Vorsprung von 1 erhält und den Weg $x < 1$ zurücklegt, wenn Achilles den Weg 1 zurücklegt. Dann holt Achilles die Schildkröte an folgender Stelle ein:
$$1 + x + x^2 + \cdots := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} x^i. \tag{3.11}$$
Gemäss Beispiel 3.7 existiert dieser Grenzwert (und ist endlich).

Folgender Satz ist sehr nützlich, um zu zeigen, dass eine Folge konvergiert und um ihren Grenzwert zu berechnen.

Satz 3.8 (Konvergenz erhalten unter Summe, Produkt und Quotient, Ordnung im Limes erhalten)**.** *Seien $A, B \in \mathbb{C}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge, die gegen A konvergiert, und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge, die gegen B konvergiert. Dann gilt Folgendes:*

(i) (Summe) Die Folge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert gegen $A + B$.

(ii) (Produkt) Die Folge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *konvergiert gegen* $A \cdot B$.

(iii) (Quotient) Falls $B \neq 0$ *und* $b_n \neq 0$*, für jedes* $n \in \mathbb{N}_0$*, dann konvergiert* $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *gegen* $\frac{A}{B}$.

(iv) (Ordnung im Limes erhalten) Wir nehmen an, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *reelle Folgen sind und dass* $a_n \leq b_n$*, für jedes* $n \in \mathbb{N}_0$*. Dann gilt* $A \leq B$.

Beweis: [Stra, Satz 3.3.2, p. 31]

Bemerkung. [Ordnung im Limes erhalten] Die zu (iv) analoge Aussage mit $<$ statt $\leq$ ist im Allgemeinen falsch. Ein Beispiel dafür sind die konstante Folge $(a_n := 0)_{n\in\mathbb{N}}$ und die harmonische Folge $\left(b_n := \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, da $0 < \frac{1}{n}$, für jedes $n \in \mathbb{N}$, aber

$$(0)_{n\in\mathbb{N}} \to A := 0, \qquad \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \to B := 0 = A.$$

(Siehe Beispiel 3.4.)

Beispiele 3.9. [Konvergenz erhalten unter Summe und Produkt, geometrische Reihe, Zenons Paradoxon]

(i) Sei $z \in \mathbb{C}$. Gemäss Beispielen 3.3 und 3.4 konvergieren die Folgen $(a_n := z)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\left(b_n := \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $A := z$ und $B := 0$. Gemäss Satz 3.8(i) konvergiert die Folge $\left(z + \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ darum gegen $z + 0 = z$. Es gilt also

$$\lim_{n\to\infty}\left(z + \frac{1}{n}\right) = z.$$

(ii) Wegen Beispiel 3.4 und Satz 3.8(ii) konvergiert die Folge $\left(\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $0 \cdot 0 = 0$, also

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0.$$

(iii) Sei $z \in \mathbb{C}$ so, dass $|z| < 1$. Wir betrachten die geometrische Reihe $\left(a_n := \sum_{k=0}^{n} z^k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Gemäss (3.10) gilt

$$a_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}. \tag{3.12}$$

Gemäss Beispiel 3.5 gilt

$$(z^n)_{n\in\mathbb{N}_0} \to 0.$$

Darum folgt mit Hilfe von Beispiel 3.3 und Satz 3.8(ii), dass

$$\left(\frac{-z}{1-z}\cdot z^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0} \to \frac{-z}{1-z}\cdot 0 = 0.$$

Mit Hilfe von Beispiel 3.3, Satz 3.8(i) und (3.12) folgt daher, dass

$$\left(a_n = \frac{1}{1-z} + \frac{-z}{1-z}z^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0} \to \frac{1}{1-z} + 0 = \frac{1}{1-z}.$$

Der Grenzwert der geometrischen Reihe ist also

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1}{1-z}. \tag{3.13}$$

Im Paradoxon von Zenon ist $z = x \in [0,1[$ der anfängliche Vorsprung der Schildkröte. Die linke Seite von (3.13) ist gemäss der "unendlichen Zenonrechnung" die Stelle, bei welcher Achilles die Schildkröte einholt. (Siehe (3.11).) Die rechte Seite von (3.13) ist die Einholstelle gemäss einer elementaren Rechnung. Die "unendliche Zenonrechnung" und die elementare Rechnung ergeben also dasselbe Resultat.

Ein wichtiger Grenzwert ist die *Eulersche Zahl* e. Sie ist die Basis für die natürliche Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$. Um e zu definieren, betrachten wir die Folge $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Je grösser die Zahl n ist, desto kleiner wird $1+\frac{1}{n}$ auf der einen Seite, aber desto grösser wird die Potenz n auf der anderen Seite.

Frage. *Wenn n immer grösser wird, welcher der folgenden beiden Effekte überwiegt dann?*

- $1+\frac{1}{n}$ wird immer kleiner.
- Die Potenz n wird immer grösser.

Antwort: Keiner der beiden Effekte überwiegt, sondern die beiden Effekte halten sich die Waage. Das bedeutet, dass die Folge $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Wir nennen ihren Grenzwert die *Eulersche Zahl*.

Proposition 3.10 (Eulersche Zahl)**.** *Die Folge $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.*

Beweis: S. 96



Abbildung 3.5: Leonhard Euler, Schweizer Mathematiker, 1707–1783

Definition 3.11. *Wir definieren die* Eulersche Zahl *als den Grenzwert*

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right)_{n\in\mathbb{N}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Diese Zahl ist nach Leonhard Euler benannt. (Siehe Abbildung 3.5.)

Bemerkungen. [Eulersche Zahl]

- Gemäss Proposition 3.10 ist die Eulersche Zahl wohldefiniert.
- e ist irrational. Seine Dezimaldarstellung lautet

  $$e = 2.71\ldots$$

  Diese Darstellung ist nicht periodisch.

Beweis der Proposition 3.10: Wir schreiben

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Behauptung 1. *Die Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist monoton wachsend.*

Beweis der Behauptung 1: Sei $n \in \mathbb{N}$, sodss $n \geq 2$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n-1}} &= \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n-1}}\right)^n \left(1+\frac{1}{n-1}\right) \\
&= \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\
&= \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\
&= \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\
&\geq \left(1-\frac{n}{n^2}\right) \cdot \frac{n}{n-1} \\
&\quad \text{(Bernoullische Ungleichung, Lemma 2.7)} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $a_n \geq a_{n-1}$. Daher ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend. □

Behauptung 2. *Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach oben beschränkt.*

Beweis: Siehe [Stra, Beispiel 3.3.1., S. 32]. □
Wegen Behauptungen 1 und 2 und Satz 3.6(i) (Monotoniekriterium) konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Das beweist die Proposition 3.10. □

Bemerkungen. [eulersche Zahl, falsche "Regel" für Grenzwerte] Gemäss Behauptung 1 im Beweis von Proposition 3.10 gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$, dass $a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq a_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2$. Mittels Satz 3.8(iv) (Ordnung im Limes erhalten) folgt daraus, dass

$$e = \lim_{n\to\infty} a_n \geq 2. \tag{3.14}$$

Möglicherweise denken Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stattdessen gegen 1 konvergieren sollte, da $1+\frac{1}{n} \to 1$ für $n \to \infty$ und $1^n \to 1$ für $n \to \infty$. Implizit verwenden Sie dann die "Regel"

$$\lim_{n\to\infty} a_{n,n} \text{“} = \text{”} \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} a_{m,n} \tag{3.15}$$

mit $a_{m,n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^m$, also

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{“} = \text{”} \lim_{m\to\infty} \left(\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^m = (1+0)^m\right) \\
= 1.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Wegen (3.14) ist (3.16) falsch. Daher ist die "Regel" (3.15) falsch.

3.3 Limes superior und inferior, Folgen in $\mathbb{R}^d$, Komponenten- und Cauchy-Kriterium für Konvergenz

Dieser Abschnitt wird in [Stra, 3.4, 3.5, 3.6] behandelt. Der Limes superior einer reellen Zahlenfolge ist der Grenzwert für $n \to \infty$ des Supremums aller Folgenglieder mit Index grösser gleich n. Er tritt in Formeln für den Konvergenzradius einer Potenzreihe auf. (Siehe später.)

Eine Folge in $\mathbb{R}^d$ konvergiert genau dann, wenn sie die Bedingung für Konvergenz einer reellwertigen Folge mit dem Absolutbetrag ersetzt durch die euklidische Norm erfüllt. Wir werden Konvergenz von Folgen in $\mathbb{R}^n$ verwenden, um Abgeschlossenheit einer Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ zu charakterisieren.

Das Cauchy-Kriterium besagt, dass eine Folge in $\mathbb{R}^d$ genau dann konvergiert, wenn sie eine Cauchy-Folge ist. (Siehe unten.) In der Definition einer Cauchy-Folge kommt kein Grenzwert vor. Das Cauchy-Kriterium ist daher nützlich, falls wir noch keine Vermutung haben, gegen welchen Wert die Folge konvergiert.

Um den Limes superior und inferior einer allgemeinen reellen Zahlenfolge definieren zu können, brauchen wir folgende Definitionen.

Definition (erweiterte reelle Zahlengerade)**.** *Wir definieren die erweiterte reelle Zahlengerade als die Menge*

$$[-\infty, \infty] := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}.$$

Definition (uneigentliche Konvergenz, uneigentlicher Grenzwert)**.** *(i) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $[-\infty, \infty]$. Wir nennen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$* bestimmt divergent gegen ∞ *g. d. w.*

$$\forall C \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall n \in \mathbb{N}_0 : n \geq n_0 \Rightarrow x_n \geq C.$$

In diesem Fall nennen wir ∞ den uneigentlichen Grenzwert *von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und schreiben*

$$\lim(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = \infty.$$

(ii) Wir definieren bestimmte Divergenz gegen $-\infty$ *und den* uneigentlichen Grenzwert $-\infty$ *analog. (Wie?)*

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$.

Definition 3.12 (Limes superior und inferior)**.** *(i) Wir definieren den* Limes superior *von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ als*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \limsup(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} := \lim_{n\to\infty} \sup_{i\in\mathbb{N}_0 : i\geq n} a_i \in [-\infty, \infty].$$

(ii) Wir definieren den Limes inferior *von* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *als*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \liminf(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} := \lim_{n\to\infty} \inf_{i\in\mathbb{N}_0: i\geq n} a_i \in [-\infty,\infty].$$

Bemerkungen. [Limes superior und inferior]

- Wir schreiben

$$b_n := \sup_{i\in\mathbb{N}_0: i\geq n} a_i \in [-\infty,\infty].$$

Behauptung: Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert in $[-\infty,\infty]$, d. h., sie konvergiert gegen eine reelle Zahl oder divergiert bestimmt gegen $\pm\infty$.

Wegen dieser Behauptung ist Teil (i) der Definition 3.12 sinnvoll.

Beweis der Behauptung: Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Die Menge $\{a_i \,|, i \in \mathbb{N}_0 : i \geq n\}$ schliesst die Menge $\{a_i \,|, i \in \mathbb{N}_0 : i \geq n+1\}$ ein.[3] Hieraus folgt, dass $b_n \geq b_{n+1}$. Das bedeutet, dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton fallend ist.

Fall: Es gilt:

  - Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ so, dass $b_{n_0} \neq \infty$.
  - $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist nach unten beschränkt.

In diesem Fall konvergiert $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gemäss Satz 3.6 (Monotoniekriterium) gegen eine reelle Zahl.

Fall: $\forall n \in \mathbb{N}_0 b_n = \infty$**:** Dann divergiert $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ bestimmt gegen ∞.

Fall: $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist nicht nach unten beschränkt. Dann divergiert $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ bestimmt gegen $-\infty$.

Also konvergiert $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in jedem Fall in $[-\infty,\infty]$.

- Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $[-\infty,\infty]$ konvergiert, dann gilt

$$\lim(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = \limsup(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = \liminf(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}.$$

[3] Mit *einschliessen* meinen wir *als Teilmenge enthalten.*

Beispiele. [Limes superior und inferior]

$$\begin{aligned}
\limsup \left(a_n := (-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0} &= 1\\
\liminf \left(a_n := (-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0} &= -1\\
\limsup \left(a_n := (-1)^n + \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}_0} &= 1\\
\liminf \left(a_n := (-1)^n - \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} &= -1\\
\limsup \left(a_n := (-1)^n n\right)_{n\in\mathbb{N}_0} &= \infty\\
\liminf \left(a_n := (-1)^n n\right)_{n\in\mathbb{N}_0} &= -\infty
\end{aligned}$$

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{R}^d$ [4] und $A \in \mathbb{R}^d$. Wir schreiben[5]

$$\begin{gathered}
a_n^i := i\text{-te Komponente von } a_n, \qquad A^i := i\text{-te Komponente von } A,\\
\text{d. h.} \qquad a_n = \left(a_n^1, \ldots, a_n^d\right), \quad A = \left(A^1, \ldots, A^d\right).
\end{gathered}$$

Wir definieren die *euklidische Norm* $\|\cdot\|$ wie in (1.8).

Definition 3.13 (Konvergenz, Grenzwert einer Folge in $\mathbb{R}^d$)**.** *Wir sagen, dass die Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen A *konvergiert g. d. w.*

$$\forall \varepsilon \in]0,\infty[\exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall n \in \mathbb{N}_0 : \; n \geq n_0 \Rightarrow \|a_n - A\| \leq \varepsilon.$$

In diesem Fall nennen wir A *den* Grenzwert *(oder* Limes*) der Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Bemerkungen. [Konvergenz, Grenzwert einer Folge in $\mathbb{R}^d$]

- In den Fällen $d = 1, 2$ stimmt Definition 3.13 mit Definition 3.2 überein. Wir verwenden auch für Folgen in $\mathbb{R}^d$ die Notationen (3.2,3.3).
- In [Stra, Definition 3.6.1, S. 39] wird die Konvergenz einer Folge in $\mathbb{R}^d$ ein bisschen anders definiert. Diese Definition ist äquivalent zur Definition 3.13.

Beispiele 3.14. [Konvergenz einer Folge in $\mathbb{R}^d$]

(i) Beispiele 3.3, 3.5, 3.9((i),(iii)) sind Beispiele konvergenter Folgen in $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

[4] Das bedeutet, dass $a_n \in \mathbb{R}^d$, für jedes $n \in \mathbb{N}_0$.

[5] Wir verwenden hier in a_n^i einen oberen Index i für die i-te Komponente von a_n, da die untere Stelle schon durch den Index n besetzt ist. Dieser obere Index stimmt mit der Konvention der Physik überein, einen oberen Index für die Komponenten eines Vektors zu verwenden. Der obere Index sollte nicht mit einer Potenz verwechselt werden.

(ii) Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$a_n := \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{falls } n = 3k+1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}_0, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{n} \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{falls } n = 3k+2 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}_0, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix}, & \text{falls } n = 3k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Diese Folge konvergiert gegen $A := 0 := (0,0,0)$,

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to A = 0.$$

Das folgt aus der Tatsache $\|a_n - A\| = \frac{1}{n}$, für jedes $n \in \mathbb{N}$, und Beispiel 3.4.

Bemerkung. [Konvergenz von Folgen in $\mathbb{R}^d$ erhalten unter Summe, Produkt und Quotient] Die Aussagen des Satzes 3.8 gelten auch für Folgen in $\mathbb{R}^d$, soweit sie sinnvoll sind. Präziser gesagt, gilt Folgendes:

- Aussage (i) gilt für Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^d$.
- (ii) gilt für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^d$ und eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$.
- (iii) gilt für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^d$ und eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$.

Folgender Satz liefert ein weiteres Kriterium für die Konvergenz einer Folge in $\mathbb{R}^d$. Sei $d \in \mathbb{N}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^d$ und $A \in \mathbb{R}^d$.

Satz 3.15 (Komponenten-Kriterium für Konvergenz einer Folge in $\mathbb{R}^d$)**.** *Es sind äquivalent:*

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gegen* A.

(ii) Für jeden Index $i \in \{1,\dots,d\}$ *konvergiert die* i*-te Komponentenfolge* $(a_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ *gegen* A^i.

Beweis: [Stra, Satz 3.6.1, S. 39]

Beispiel. [Komponenten-Kriterium für Konvergenz einer Folge in $\mathbb{R}^d$] Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Beispiel 3.14(ii) und $A := 0 \in \mathbb{R}^3$. Wir zeigen noch einmal, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to A$. Dazu überprüfen wir die Bedingung (ii) des Satzes 3.15. Sei $i \in \{1, 2, d = 3\}$.

Fall $i = 3$: Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen eine natürliche Zahl $n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ so, dass $n \geq n_0$. Falls $3|n$ [6], dann haben wir $a_n^3 = \frac{1}{n}$, also

$$\begin{aligned} \left|a_n^{i=3} - A^i\right| &= \frac{1}{n} \\ &\leq \frac{1}{n_0} \qquad (\text{da } n \geq n_0) \\ &\leq \varepsilon \qquad (\text{da } n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon}), \end{aligned}$$

wie gewünscht. Falls $3 \not| n$, dann haben wir $a_n^3 = 0$ und daher

$$\left|a_n^i - A^i\right| = 0 \leq \varepsilon.$$

Für $i = 3$ ist (ii) daher erfüllt. Analoge Argumente zeigen, dass diese Bedingung auch für $i = 1, 2$ erfüllt ist. Also ist (ii) erfüllt. Gemäss Satz 3.15 ist daher (i) erfüllt, d. h. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to A$.

Bemerkung. Das Argument in diesem Beispiel ist analog zu jenem in Beispiel 3.4 (harmonische Folge konvergiert).

Der nächste Satz liefert ein hinreichendes Kriterium für die Konvergenz einer Folge, falls wir noch keine Vermutung haben, gegen welchen Punkt die Folge konvergiert. Wir benötigen dazu folgende Definition.

Definition 3.16 (Cauchy-Folge)**.** *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{R}^d$ heisst* Cauchy-Folge *g. d. w.*

$$\forall \varepsilon \in]0, \infty[\exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall m, n \in \mathbb{N}_0 : m, n \geq n_0 \Rightarrow \|a_m - a_n\| \leq \varepsilon. \tag{3.17}$$

Cauchy-Folgen sind nach Augustin-Louis Cauchy benannt. (Siehe Abbildung 3.6.)

Bemerkungen. [Cauchy-Folge]

- Die Bedingung (3.17) bedeutet:
  Für jede reelle Zahl $\varepsilon > 0$
  gibt es eine natürliche Zahl $n_0 \in \mathbb{N}_0$ so,
  dass für jedes Paar natürlicher Zahlen $m, n \geq n_0$ gilt, dass
  $$|a_m - a_n| \leq \varepsilon.$$
- In dieser Bedingung kommt kein Grenzwert vor.

[6] Das bedeutet, dass 3 die Zahl n teilt.

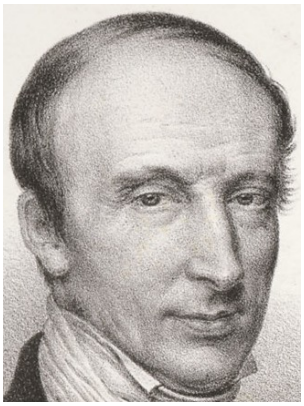


Abbildung 3.6: Augustin-Louis Cauchy, 1789–1857, französischer Mathematiker.

- In der Definition einer Cauchy-Folge dürfen wir die Bedingung "$m, n \geq n_0$" durch "$m, n > n_0$" ersetzen. Wir dürfen auch die Bedingung "$\leq \varepsilon$" durch "$< \varepsilon$" ersetzen. Dadurch ergeben sich äquivalente Definitionen.

Sei $d \in \mathbb{N}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^d$.

Satz 3.17 (Cauchy-Kriterium für Konvergenz einer Folge in $\mathbb{R}^d$)**.** *Es sind äquivalent:*

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert.*

(ii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist eine Cauchy-Folge.*

Beweis: [Stra, Satz 3.6.2, S. 39]

Bemerkung. [Cauchy-Kriterium für Konvergenz einer Folge in $\mathbb{R}^d$] In Definition 3.16 (Cauchy-Folge) kommt kein Grenzwert vor. Falls wir noch keine Vermutung haben, gegen welchen Punkt eine gegebene Folge konvergiert, ist die Implikation (ii)⇒(i) daher ein nützliches hinreichendes Kriterium für Konvergenz.

Beispiele 3.18. [Cauchy-Kriterium für Konvergenz einer Folge in $\mathbb{R}^d$]

(i) Wir definieren die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ durch

$$x_k := \begin{cases} 2^{-k}, & \text{falls } 3|k, \\ -2^{-k}, & \text{sonst.} \end{cases}, \qquad \text{d. h.} \qquad x_0 = 1, \quad x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = -\frac{1}{4}, \quad x_3 = \frac{1}{8}, \quad \ldots$$

Wir definieren die Folge

$$\left(a_n := \sum_{k=0}^{n} x_k \right)_{n\in\mathbb{N}_0}.$$

Behauptung: Diese Folge konvergiert.

Beweis: Wir zeigen, dass Bedingung (ii) des Satzes 3.17 erfüllt ist, d. h. Bedingung (3.17) in Definition 3.16: Sei $\varepsilon > 0$. Gemäss dem Archimedischen Prinzip (Proposition 2.18) gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ so, dass

$$n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Gemäss der Bernoullischen Ungleichung gilt $2^{n_0} = (1+1)^{n_0} \geq 1 + n_0 \geq n_0$, also

$$2^{-n_0} \leq \frac{1}{n_0} \leq \varepsilon. \tag{3.18}$$

Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$ so, dass

$$n \geq m \geq n_0.$$

Es gilt $a_n - a_m = \sum_{k=m+1}^{n} x_k$. Mittels der Dreiecksungleichung (Satz 2.12) folgt daraus, dass

$$\begin{aligned}
\left|a_n - a_m\right| &\leq \sum_{k=m+1}^{n} |x_k| \\
&= \sum_{k=m+1}^{n} 2^{-k} \\
&= \frac{2^{-(m+1)} - 2^{-(n+1)}}{1 - \frac{1}{2}} \qquad \text{(Das folgt aus einer zu (3.9) analogen Rechnung.)} \\
&= 2^{-m} - 2^{-n} \\
&\leq 2^{-n_0} \qquad (\text{da } m \geq n_0) \\
&\leq \varepsilon \qquad (\text{gemäss (3.18)}).
\end{aligned}$$

Daher ist Bedingung (3.17), d. h. Bedingung (ii) des Satzes 3.17, erfüllt. Gemäss diesem Satz ist daher auch Bedingung (i) erfüllt, d. h. die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert. Das beweist die Behauptung.

(ii) Wir definieren die *harmonische Reihe* als die Folge

$$\left(a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \text{d. h.} \quad a_1 = \frac{1}{1}, \quad a_2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \quad \ldots$$

Behauptung: Diese Folge divergiert.

Beweis: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_{2n} - a_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Daher ist Bedingung (ii) des Satzes 3.17 nicht erfüllt. (Warum?) Gemäss der Kontraposition der Implikation (i)⇒(ii) ist daher (i) nicht erfüllt. Das bedeutet, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ divergiert.

3.4 Reihe: Cauchy-, Quotienten-, Wurzel- und Leibniz-Kriterium für Konvergenz, Potenzreihe: Konvergenzradius und -bereich

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96a, 2.4] und [Stra, 3.7 Reihen].

Definition einer Reihe, Konvergenz davon, Beispiele

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{R}^d$.

Definition 3.19 (Reihe)**.** *Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die n-te* Partialsumme *der Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ als die Summe*

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + \cdots + a_n.$$

Wir definieren die zu $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gehörige Reihe *(oder* Folge der Partialsummen*) als die Folge*

$$(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}\,.$$

Falls diese Folge konvergiert, dann definieren wir

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + \ldots &:= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \\ &:= \lim(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Bemerkungen. [Reihe]

- Das Zeichen "∞", das im Ausdruck "$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$" auftritt, hat keine selbstständige Bedeutung. Es bedeutet nur etwas im Zusammenhang mit dem ganzen Ausdruck. Wir benützen hier das Zeichen "∞", da wir intuitiv unendlich lange addieren.

  Achtung! Der Index k nimmt den Wert ∞ nicht an, d. h. "a_∞" ist nicht definiert, da ∞ keine natürliche Zahl ist.

- In [Stra, Definition 3.7.1, S. 40] und in gewissen Büchern wird das Wort *Reihe* nicht präzise definiert. Es wird dort für den intuitiven Begriff einer unendlichen Summe gebraucht. Eine solche "Reihe" wird dort als $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ geschrieben. Definition 3.19 präzisiert den Begriff "Reihe". "Konvergenz" im Sinne von [Stra, Definition 3.7.1, S. 40] bedeutet, dass die zu $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gehörige Folge der Partialsummen $(s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert.

Beispiele. [geometrische und harmonische Reihe, Konvergenz]

- Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Wir betrachten die geometrische Folge mit gemeinsamem Verhältnis z, d. h. die Folge

$$\left(a_k := z^k\right)_{k\in\mathbb{N}_0}.$$

  Die n-te Partialsumme dieser Folge ist

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} z^k.$$

  Die zu $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gehörige Reihe ist daher die *geometrische Reihe* $\left(\sum_{k=0}^{n} z^k\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$. Gemäss Beispiel 3.9(iii) konvergiert die geometrischen Reihe gegen $\frac{1}{1-z}$,

$$\left(\sum_{k=0}^{n} z^k\right)_{k\in\mathbb{N}_0} \to \frac{1}{1-z}, \qquad \text{also} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1}{1-z}.$$

- Wir betrachten die harmonische Folge

$$\left(a_k := \frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}.$$

  Die zu $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gehörige Reihe ist die *harmonische Reihe* $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$. Gemäss Beispiel 3.18(ii) divergiert diese Reihe.

Konvergenzkriterien für Reihen

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{R}^d$ und $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die zugehörige Reihe, also Folge der Partialsummen.

Proposition 3.20 (Cauchy-Kriterium für Konvergenz einer Reihe in $\mathbb{R}^d$)**.** *Äquivalent sind:*

(i) Die Reihe $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert.

(ii)

$$\sup_{n\geq m}\left\|\sum_{k=m}^{n} a_k\right\| \to 0 \quad (m\to\infty)$$

Beweis: Das folgt aus der Tatsache $s_n - s_{m-1} = \sum_{k=m}^{n} a_k$ und Satz 3.17 (Cauchy-Kriterium für Konvergenz einer Folge in $\mathbb{R}^d$).

Bemerkungen 3.21. [Cauchy-Kriterium für Konvergenz einer Reihe in $\mathbb{R}^d$]

(i) Aus Proposition 3.20 folgt: Falls die Reihe $\left(s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert, dann konvergiert die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gegen 0. (Betrachten Sie dazu $n = m$!)

(ii) Die Umkehrung dieser Implikation ist folgende Aussage:

"Falls die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gegen 0 konvergiert, dann konvergiert die Reihe $\left(s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$."

Diese Aussage ist falsch. Ein Gegenbeispiel ist die harmonische Folge $\left(a_k := \frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$. Gemäss Beispiel 3.4 konvergiert diese Folge nämlich gegen 0. Ihre Reihe, die harmonische Reihe $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert jedoch gemäss Beispiel 3.18(ii).

Folgender Satz liefert ein Kriterium für die Konvergenz einer Reihe in $\mathbb{C}$. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$.

Satz 3.22 (Quotientenkriterium für die Konvergenz einer Reihe)**.** *Wir nehmen an, dass $a_k \neq 0$, für jedes $k \in \mathbb{N}_0$.*

(i) Die Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *konvergiert, falls*

$$\limsup_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1.$$

(ii) Die Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *divergiert, falls*

$$\liminf_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1.$$

Beweis: [Stra, Satz 3.7.2., S. 41]

Die *komplexe Exponentialfunktion* spielt eine zentrale Rolle in der Analysis. Um sie zu definieren, benötigen wir Folgendes. Sei $z \in \mathbb{C}$.

Definition 3.23. *[Exponentialreihe] Wir definieren die* Exponentialreihe zu z *als die zur Folge* $\left(a_k := \frac{z^k}{k!}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ *gehörige Reihe, also als die Folge* $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Bemerkung. In dieser Definition tritt k Fakultät, d. h. $k! := \prod_{i=1}^{k} i = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot k$ auf. Im Fall $k = 0$ ist das das leere Produkt, welches wir 1 definieren, also

$$0! = 1.$$

Beispiel 3.24. [Quotientenkriterium, Exponentialreihe] **Behauptung:** Die Exponentialreihe zu z konvergiert.

Beweis: Falls $z = 0$, dann stimmt die Aussage. Wir nehmen jetzt an, dass $z \neq 0$. Dann gilt $a_k = \frac{z^k}{k!} \neq 0$, für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ und

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| &= \frac{|z|}{k+1} \\ &\to 0 \quad (k \to \infty) \qquad \text{(gemäss Beispiel 3.4, harmonische Folge).}\end{aligned}$$

Gemäss Satz 3.22(i) konvergiert die Exponentialreihe zu z, $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ daher.

Definition 3.25 (komplexe Exponentialfunktion)**.** *Wir definieren die (*komplexe*)* Exponentialfunktion *als die Funktion*

$$\mathrm{Exp} := \exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad \exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}.$$

Bemerkung. Gemäss Beispiel 3.24 existiert dieser Grenzwert, d. h. $\exp(z)$ ist wohldefiniert.

Für ein weiteres Beispiel, in dem Satz 3.22 angewandt wird, siehe [Stra, Beispiel 3.7.2. ii)].

Das Quotientenkriterium sagt nichts aus, falls unendlich viele a_k gleich 0 sind oder die Folge der Quotienten $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ stark oszilliert. Folgendes Kriterium behandelt auch solche Fälle. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$.

Satz 3.26 (Wurzelkriterium für die Konvergenz einer Reihe)**.** *(i) Die Reihe* $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *konvergiert, falls*

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1.$$

(ii) Die Reihe $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *divergiert, falls*

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1.$$

Beweis: [Stra, Satz 3.7.3., S. 43]

Potenzreihe, Konvergenzbereich und -radius

Als Anwendung des Wurzelkriteriums erhalten wir folgendes Korollar. Um es zu formulieren, benötigen wir folgende Definitionen. Sei $c = (c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$.

Definition 3.27 (Potenzreihe, Konvergenzbereich, -Radius, -Kreisscheibe)**.** *(i) Wir definieren die* zu $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gehörige *(*komplexe*)* Potenzreihe *als die Abbildung*

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto \left(\sum_{k=0}^{n} c_k z^k\right)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \{\textit{Folge in } \mathbb{C}\}. \tag{3.20}$$

Wir nennen c_k *den* k-ten Koeffizienten *der Potenzreihe* (3.20)*.*

(ii) Wir definieren:

$$\begin{aligned}
&\textit{Konvergenzbereich der Potenzreihe } z \mapsto \left(\sum_{k=0}^{n} c_k z^k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}\\
&:= \textit{ zur Koeffizientenfolge } (c_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \textit{ gehöriger Konvergenzbereich}\\
&:= \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \left(\sum_{k=0}^{n} c_k z^k\right)_{n\in\mathbb{N}_0} \textit{ konvergiert} \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\textit{Konvergenzradius der Potenzreihe } z \mapsto \left(\sum_{k=0}^{n} c_k z^k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}\\
&:= \textit{ zur Koeffizientenfolge } c = (c_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \textit{ gehöriger Konvergenzradius}\\
&:= \rho\\
&:= \rho_c\\
&:= \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} \in [0,\infty] := [0,\infty[\cup\{\infty\},
\end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned} &\textit{Konvergenzkreisscheibe der Potenzreihe } z \mapsto \left(\sum_{k=0}^{n} c_k z^k\right)_{n\in\mathbb{N}_0} \\ &:= \textit{ zur Koeffizientenfolge } (c_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \textit{ gehörige Konvergenzkreisscheibe} \\ &:= B_\rho^2(0) \end{aligned} \tag{3.22}$$

Bemerkungen.

- In (3.21) verwenden wir die Konventionen

$$\frac{1}{0} := \infty, \qquad \frac{1}{\infty} := 0.$$

- In (3.22) bezeichnet $B_\rho^2(0)$ die offene Kreisscheibe mit Radius ρ um 0. Siehe Definition 1.18.

Beispiele 3.28. [Konvergenzradius, -kreisscheibe, -bereich]

(i) (geometrische Reihe) Wir betrachten die Folge $\left(c_k := 1\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$. Es gilt $\sqrt[k]{|c_k|} = 1$, für jedes $k \in \mathbb{N}_0$, und daher $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 1$. Der zur Koeffizientenfolge $(1)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gehörige Konvergenzradius, d. h. der Konvergenzradius der geometrischen Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} z^k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$, ist daher gegeben durch

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} = 1.$$

Es gilt daher:

Konvergenzkreisscheibe der geometrischen Reihe $= B_1^2(0) =$ offene Einheitskreisscheibe

Wir bestimmen den Konvergenzbereich der geometrischen Reihe. Sei $z \in \mathbb{C}$. Im **Fall** $|z| < 1$ konvergiert die geometrische Reihe für z gemäss Beispiel 3.9(iii).

Fall $|z| \geq 1$**:** Dann konvergiert $(z^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nicht gegen 0. (Überprüfen Sie das!) Gemäss dem Kontraponierten der Bemerkung 3.21(i) konvergiert die geometrische Reihe für z daher nicht.

Gemäss Definition 3.27(ii) gilt daher:

$$\text{Konvergenzbereich der geometrischen Reihe } = B_1^2(0)$$

(ii) Wir betrachten die Folge $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gegeben durch

$$c_k := \begin{cases} 1, & \text{falls } k \text{ gerade ist,} \\ 2^{-k}, & \text{falls } k \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

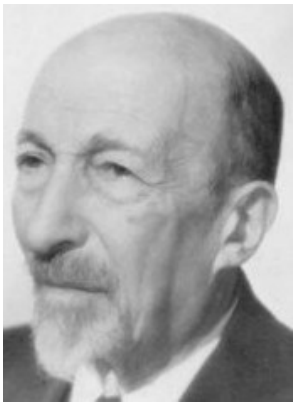


Abbildung 3.7: Jacques Hadamard, 1865–1963, französischer Mathematiker.

Für jedes gerade k gilt $\sqrt[k]{c_k} = 1$, für jedes ungerade k gilt $\sqrt[k]{c_k} = \frac{1}{2}$. Hieraus folgt, dass $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 1$. Daher ist gemäss (3.21) der zur Koeffizientenfolge $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gehörige Konvergenzradius gegeben durch

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} = 1.$$

Korollar 3.29 (Satz von Cauchy-Hadamard, Konvergenzbereich einer Potenzreihe, Konvergenzradius)**.**

Die Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} c_k z^k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *konvergiert für jedes* $z \in \mathbb{C}$ *so, dass* $|z| < \rho$.

(ii) Die Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} c_k z^k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *divergiert für jedes* $z \in \mathbb{C}$ *so, dass* $|z| > \rho$.

Dieses Korollar ist nach Augustin-Louis Cauchy benannt und Jacques Hadamard benannt, siehe Abbildungen 3.6 und 3.7.

Beweis des Korollars 3.29: Das folgt aus Satz 3.26 (Wurzelkriterium) mit $a_k := c_k z^k$, da

$$\sqrt[k]{|a_k|} = |z| \cdot \sqrt[k]{|c_k|}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

(Überprüfen Sie das!)□

Bemerkung. [Korollar] *Korollar* bedeutet *Folgerung*. Ein Korollar ist also ein Satz, der auf einfache Weise aus einem anderen Satz folgt. Korollar 3.29 folgt zum Beispiel auf einfache Weise aus Satz 3.26. Mathematisch gesehen bezeichnen *Korollar* und *Satz* dasselbe. Siehe auch Bemerkung 1.7(ii).

Bemerkungen 3.30. [Konvergenzbereich einer Potenzreihe, Konvergenzkreisscheibe]

(i) Gemäss Korollar 3.29 enthält der Konvergenzbereich der Potenzreihe $z \mapsto \left(\sum_{k=0}^{n} c_k z^k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Konvergenzkreisscheibe $B_\rho^2(0)$ (als Teilmenge) und ist dieser Konvergenzbereich in der abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{B}_\rho^2(0)$ enthalten. Die Konvergenzkreisscheibe ist daher die grösste offene Kreisscheibe, auf der die Potenzreihe konvergiert.

(ii) Die Frage, welche Punkte auf dem Kreis $S_\rho^1(0)$ [7] im Konvergenzbereich der Potenzreihe liegen, ist im Allgemeinen schwierig zu beantworten. Das Korollar sagt hierüber nichts. Es gibt viele Möglichkeiten für die Menge dieser Punkte.

Zum Beispiel ist für die geometrische Reihe gemäss Beispiel 3.283.28 $\rho = 1$ und der Konvergenzbereich gegeben durch die offene Einheitskreisscheibe $B_1^2(0)$. Die geometrische Reihe konvergiert daher für *keinen Punkt* auf dem Kreis $S_{\rho=1}^1(0)$.

Wir betrachten jetzt die Koeffizientenfolge $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ definiert durch

$$c_k := \begin{cases} 0, & \text{falls } k = 0, \\ \frac{1}{k^2}, & \text{falls } k \neq 0. \end{cases}$$

Es gilt $\rho = 1$. (Überprüfen Sie das! Hinweis: Verwenden Sie eine Aufgabe aus Serie 5 (Konvergenz und bestimmte Divergenz einer Folge in $\mathbb{R}^d$, Folge $(\sqrt[n]{n})_{n\in\mathbb{N}}$).) Die zu $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gehörige Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} c_k z^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert für *jeden Punkt* auf dem Kreis $S_{\rho=1}^1(0)$. Für $z \in S_1^1(0) \setminus \{1\}$ folgt das mit Hilfe des *Kriterium von Abel* (*für die Konvergenz einer Potenzreihe*).[8] Für $z = 1$ ist $\left(\sum_{k=0}^{n} c_k z^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Zeta-Reihe für $s = 2$. (Siehe Beispiel 3.37 unten.) Gemäss [Stra, Beispiel 3.7.4, S. 44] konvergiert diese Reihe. Die Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} c_k z^k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert also für jeden Punkt auf dem Kreis $S_{\rho=1}^1(0)$.

Es gibt auch Beispiele von Potenzreihen, die für einige, aber nicht alle Punkte auf dem Kreis $S_\rho^1(0)$ konvergieren, zum Beispiel $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Diese Potenzreihe konvergiert für $z \in S_{\rho=1}^1 \setminus \{1\}$ wegen des Kriteriums von Abel. Sie divergiert für $z = 1$. (Warum?)

Beispiel. [Konvergenzbereich einer Potenzreihe, Konvergenzradius] Wir betrachten die Folge $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gegeben durch

$$c_k := \begin{cases} 1, & \text{falls } k \text{ gerade ist}, \\ 2^{-k}, & \text{falls } k \text{ ungerade ist}. \end{cases}$$

[7] Siehe Definition 1.18, (1.11). Ein Kreis ist ein eindimensionales Objekt. Er ist der Rand der Kreisscheibe.

[8] In dieser Vorlesung behandeln wir dieses Kriterium nicht.

Gemäss Beispiel 3.28 gilt $\rho = 1$. Gemäss Korollar 3.29 konvergiert die Folge $\left(\sum_{k=0}^{n} c_k z^k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ daher für jedes $z \in \mathbb{C}$ so, dass $|z| < 1$, und sie divergiert für jedes $z \in \mathbb{C}$ so, dass $|z| > 1$.

Bemerkung. Das Quotientenkriterium (Satz 3.22) sagt in diesem Beispiel nichts, da hier für $a_k := c_k z^k$ mit $z \neq 0$ gilt, dass

$$\limsup_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \infty, \qquad \liminf_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 0.$$

(Überprüfen Sie das!)

Definition 3.31 (Exponentialreihe)**.** *Wir definieren die (*komplexe*)* Exponentialreihe *als die zur Folge* $\left(c_k := \frac{1}{k!}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ *gehörige Potenzreihe, also als die Abbildung*

$$z \mapsto \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}. \tag{3.23}$$

Bemerkung. Die rechte Seite ist die Exponentialreihe *zu* z. (Siehe Definition 3.23.)

Beispiel. [Konvergenzradius und -bereich der Exponentialreihe] Der zur Koeffizientenfolge $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gehörige Konvergenzradius ist gegeben durch $\rho = \infty$. (Siehe Übungsserie 6, Konvergenzradius einer Potenzreihe.) Gemäss Korollar 3.29 konvergiert die Exponentialreihe (3.23) daher für jedes $z \in \mathbb{C}$ so, dass $|z| < \rho = \infty$, d. h. für jedes $z \in \mathbb{C}$. Das haben wir schon in Beispiel 3.24 mittels des Quotientenkriteriums gesehen.

Der zu $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gehörige Konvergenzbereich ist also gleich $\mathbb{C}$.

Konvergenzkriterium von Leibniz für alternierende Reihen

Das nächste Konvergenzkriterium ist im Fall *alternierender Reihen* nützlich. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$.

Definition 3.32 (alternierende Folge, alternierende Reihe)**.** *Wir nennen* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ alternierend *g. d. w.*

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : (-1)^k a_k \geq 0 \qquad \textit{oder} \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0 : (-1)^k a_k \leq 0.$$

Wir nennen die zu $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ *gehörige Reihe* alternierend *g. d. w.* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ *alternierend ist.*

Beispiel 3.33. [alternierende harmonische Reihe] Wir definieren die *alternierende harmonische Folge* als die Folge

$$\left(a_k := \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}.$$

Diese Folge ist alternierend. Wir definieren die *alternierende harmonische Reihe* als die zur Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gehörige Reihe, also als die Folge

$$\left(s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \text{d. h.} \quad s_1 = \frac{1}{1}, \quad s_2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}, \quad s_3 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \quad \dots$$

Diese Reihe ist alternierend.

Satz 3.34 (Konvergenzkriterium von Leibniz für alternierende Reihen)**.** *Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende Folge in $\mathbb{R}$, die gegen 0 konvergiert.*[9] *Dann konvergiert die zu $\left((-1)^k a_k\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gehörige Reihe, also die Folge $\left(s_n := \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$.*

Bemerkung. Diese Reihe ist alternierend.

Dieser Satz ist nach Gottfried Wilhelm Leibniz benannt. (Siehe Abbildung 0.2.)

Beweis des Satzes 3.34: Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Da $(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ monoton fallend ist, haben wir $0 \geq -a_{2k-1} + a_{2k}$ und daher

$$s_{2k-2} \geq s_{2k-2} - a_{2k-1} + a_{2k} = s_{2k}.$$

Daher ist die Folge $(s_{2k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ monoton fallend. Ein ähnliches Argument zeigt, dass $s_{2k-1} \leq s_{2k+1}$, für jedes $k \in \mathbb{N}$, d. h. die Folge $(s_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend. Mittels Induktion folgt daraus, dass

$$s_{2k+1} \geq s_1, \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0. \tag{3.24}$$

Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Es gilt $s_{2k} \geq s_{2k} - a_{2k+1} = s_{2k+1}$ und daher wegen (3.24), dass $s_{2k} \geq s_1$. Die Folge $(s_{2k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ ist deshalb nach unten beschränkt. Da sie auch monoton fallend ist, konvergiert sie daher gemäss Satz 3.6 (Monotoniekriterium). Ein analoges Argument zeigt, dass die Folge $(s_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert. Die Folge $(-a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert gegen 0, da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gemäss Voraussetzung gegen 0 konvergiert. Gemäss Satz 3.8(i) gilt daher

$$(s_{2k+1} = s_{2k} - a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}_0} \to A + 0, \qquad A := \lim (s_{2k})_{k\in\mathbb{N}_0}.$$

Daraus folgt, dass die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen A konvergiert. (Warum?) Das beweist Satz 3.34. □

[9] Daraus folgt, dass $a_k \geq 0$, für jedes k.

Beispiel 3.35. [alternierende harmonische Reihe konvergiert] Gemäss Satz 3.34 konvergiert die alternierende harmonische Reihe $\left(s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Bemerkung. Das steht im Kontrast zur Tatsache, dass die harmonische Reihe divergiert. (Siehe Beispiel 3.18(ii).)

Frage 3.36. *Was ist der Grenzwert der alternierenden harmonischen Reihe?*

Wir werden diese Frage später mittels einer Potenzreihe beantworten. (Siehe Beispiel 6.66.)

Zeta-Reihe, Zeta-Funktion

Das nächste Beispiel liefert eine wichtige Funktion, die mittels einer Reihe definiert wird.

Beispiel 3.37. [Zeta-Reihe, Zeta-Funktion] Sei $s \in \mathbb{R}$. Wir nennen die zur Folge $\left(a_k := \frac{1}{k^s}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ gehörige Reihe, also die Folge $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, die *Zeta-Reihe zu s*. Falls $s > 1$, dann konvergiert diese Reihe. (Siehe [Stra, Beispiel 3.7.4, S. 44].) Wir definieren die *Riemannsche Zeta-Funktion* (oder ζ-Funktion) als

$$\zeta :]1, \infty[\to \mathbb{R}, \qquad \zeta(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s}.$$

Falls $s \leq 1$, dann divergiert die Reihe $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. (Siehe [Stra, Beispiel 3.7.4, S. 44].) Für $s = 1$ ist das die harmonische Reihe, deren Divergenz wir in Beispiel 3.18(ii) gezeigt haben.

Bemerkungen.

- Bei dieser Reihe versagen das Quotienten- und Wurzelkriterium. (Siehe [Stra, Beispiel 3.7.4, S. 44].)
- Das *Basler Problem* ist das Problem, den Wert

  $$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots,$$

  also die Summe der reziproken Quadratzahlen[10] zu berechnen. Dieses Problem wurde von Leonhard Euler gelöst. Es gilt

  $$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

[10] ohne 0

- Zu $\zeta(3)$ ist einiges unbekannt. Erst 1979 wurde bewiesen, dass $\zeta(3)$ irrational ist. Man kann $\zeta(3)$ jedoch auf beliebig viele Dezimalstellen berechnen, zum Beispiel mittels der Definition als Grenzwert einer Reihe.

- Die ζ-Funktion kann zu einer holomorphen Funktion $\mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ fortgesetzt werden. (Holomorphe, d. h. komplex differenzierbare Funktionen werden in der Vorlesung *Mathematische Methoden für ITET und RW* im 2. Semester behandelt.) Die (fortgesetzte) ζ-Funktion spielt eine wichtige Rolle in der Zahlentheorie, einem Teilgebiet der Mathematik, in dem ganzzahlige Lösungen von Gleichungen und Primzahlen studiert werden. Die berühmte *Riemannsche Vermutung* besagt, dass die nichttrivialen[11] Nullstellen der ζ-Funktion alle Realteil gleich $\frac{1}{2}$ haben.

3.5 Absolute Summierbarkeit einer Folge, absolute Konvergenz einer Reihe, Umordnung einer Reihe, Cauchy-Produkt zweier Reihen, Additionstheorem für die Exponentialfunktion

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96a, 2.4] und [Stra, 3.8]. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{R}^d$.

Definition 3.38 (absolut summierbar, absolut konvergent)**.** *Wir nennen* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ absolut summierbar *g. d. w. die zu* $(\|a_k\|)_{k\in\mathbb{N}_0}$ *gehörige Reihe, also die Folge* $\left(\sum_{k=0}^n \|a_k\|\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *konvergiert.*

In diesem Fall nennen wir die zu $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ *gehörige Reihe, also die Folge* $\left(\sum_{k=0}^n a_k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$, absolut konvergent.

Beispiel 3.39. [absolute Konvergenz einer Potenzreihe auf ihrer Konvergenzkreisscheibe] Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Für jeden Punkt in der zugehörigen Konvergenzkreisscheibe konvergiert die zugehörige Potenzreihe *absolut*. Das bedeutet, dass für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \rho$ die Reihe $\left(\sum_{k=0}^n \left|c_k z^k\right|\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert. Das folgt aus Korollar 3.29. (Überprüfen Sie das!)

Wenn eine Folge absolut summierbar ist, dann konvergiert die zugehörige Reihe. Wir können dann die Folgenglieder sogar in einer beliebigen Reihenfolge addieren. Das ist der Inhalt des folgenden Satzes.

[11] Die *trivialen* Nullstellen sind die Zahlen $-2, -4, -6, \ldots$.

Satz 3.40 (absolute Summierbarkeit und Umordnung)**.** *Falls die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ absolut summierbar ist, dann konvergiert für jede bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ die zur Folge $(a_{\varphi(j)})_{j\in\mathbb{N}_0}$ gehörige Reihe, und es gilt*

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{\varphi(j)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Beweis: [Stra, Satz 3.8.1., S. 46]

Bemerkungen.

- $(a_{\varphi(j)})_{j\in\mathbb{N}_0}$ ist die *mittels φ umgeordnete Folge*. Die zugehörige Reihe ist die *mittels φ umgeordnete Reihe*. Satz 3.40 besagt also, dass für eine absolut summierbare Folge die umgeordnete Reihe für jede Umordnung konvergiert.

- Insbesondere gilt das also für die Identität $\varphi = \mathrm{id} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$. Daher gilt also: Wenn eine Folge absolut summierbar ist, dann konvergiert die zugehörige Reihe. Anders gesagt, gilt: Wenn eine Reihe absolut konvergiert, dann konvergiert sie.

- Die Umkehrung dieser Aussage lautet:

  "Wenn eine Reihe konvergiert, dann konvergiert sie absolut."

  Diese Aussage ist falsch. Ein Gegenbeispiel dazu ist die alternierende harmonische Reihe. Gemäss Beispiel 3.35 konvergiert diese Reihe nämlich, aber nicht absolut. Die Folge $\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\left|\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| = \frac{1}{k}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nämlich die harmonische Reihe, welche gemäss Beispiel 3.18(ii) divergiert.

Beispiele. [absolute Summierbarkeit, Konvergenz und Umordnung]

- Sei $z \in \mathbb{C}$ so, dass $|z| < 1$. Wir betrachten die geometrische Folge $(z^k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ und die zugehörige Reihe, die geometrische Reihe $\left(s_n := \sum_{k=0}^{n} z^k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Da $|z| < 1$, konvergiert gemäss Beispiel 3.7 die zu $\left(\left|z^k\right| = |z|^k\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gehörige Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} |z|^k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Daher ist die Folge $(z^k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ absolut summierbar, d. h., die geometrische Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} z^k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert absolut. Gemäss Satz 3.40 mit $\varphi = \mathrm{id}$ konvergiert daher die geometrische Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} z^k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Bemerkung: Das zeigten wir schon in Beispiel 3.9(iii), wo wir auch den Grenzwert $\frac{1}{1-z}$ berechneten.

- Mittels des gleichen Arguments folgt, dass für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ und jede bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ die umgeordnete geometrische Reihe $\left(\sum_{j=0}^{n} z^{\varphi(j)}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert. Betrachten wir zum Beispiel die Abbildung

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
$\varphi(j)$	0	1	2	4	3	5	6	8	10	7	9	11	...

(1 gerade Zahl, 1 ungerade Zahl, 2 gerade Zahlen, 2 ungerade Zahlen, 3 gerade Zahlen, 3 ungerade Zahlen, ...) Der Grenzwert der umgeordneten Reihe ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} &z^0 + z^1 + z^2 + z^4 + z^3 + z^5 + z^6 + z^8 + z^{10} + z^7 + z^9 + z^{11} + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k = z^0 + z^1 + z^2 + z^3 + \cdots \qquad \text{(gemäss Satz 3.40)} \\ &= \frac{1}{1-z}. \end{aligned}$$

- Wir definieren die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ durch

$$x_k := \begin{cases} 2^{-k}, & \text{falls } 3|k, \\ -2^{-k}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

und $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ als die zu $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gehörige Reihe. Gemäss Beispiel 3.7 konvergiert die zu $\left(|x_k| = \frac{1}{2^k}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gehörige Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Daher ist die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ absolut summierbar, d. h., die zugehörige Reihe $\left(s_n = \sum_{k=0}^{n} x_k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert absolut. Der Grenzwert

$$2^{-0} - 2^{-1} - 2^{-2} + 2^{-3} - 2^{-4} - 2^{-5} \pm \cdots = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32} \pm \cdots$$

existiert also. Das zeigten wir auch schon in Beispiel 3.18(i).

Bemerkungen. [Umordnung einer nicht absolut konvergenten Reihe]

(i) Für jedes $S \in [-\infty, \infty]$ kann eine konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe so umgeordnet werden, dass sie gegen S konvergiert. (Im Fall $S = \pm\infty$ bedeutet das, dass die Reihe bestimmt nach $\pm\infty$ divergiert.) Das ist die Aussage des Riemannschen Umordnungssatzes. (Siehe [Wal97, 5.17 Riemannscher Umordnungssatz, S. 105].)

In [Stra, Beispiel 3.8.1, S. 45] wird zum Beispiel gezeigt, wie wir die alternierende harmonische Reihe so umordnen können, dass sie divergiert.Wir können diese Reihe auch so umordnen, dass die umgeordnete Reihe gegen die Hälfte des Grenzwertes der alternierenden harmonischen Reihe konvergiert. Durch Umordnung der alternierenden harmonischen Folge $\left(a_k := \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ erhalten wir nämlich die Folge $1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{10}, -\frac{1}{12}, \dots$. Die zugehörige Reihe konvergiert mit Grenzwert gegeben durch

$$\begin{aligned}
&\left(1-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} \pm \dots \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} \pm \dots \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \pm \dots\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \text{Grenzwert der alternierenden harmonischen Reihe.}
\end{aligned}$$

(ii) Bemerkung (i) steht nicht im Widerspruch zur Kommutativität der Addition, da diese im Allgemeinen nur für endliche Summen gilt.

Seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0} := a$ und $(b_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}_0} := b$ zwei Folgen in $\mathbb{C}$.

Definition 3.41 (Faltung, Cauchy-Produkt)**.** *(i) Wir definieren die* Faltung *(oder das* Faltungsprodukt*) von a und b als die Folge*

$$a * b : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}, \qquad (a*b)_m := (a*b)(m) := \sum_{k,\ell\in\mathbb{N}_0 : k+\ell=m} a_k b_\ell = \sum_{k=0}^{m} a_k b_{m-k}.$$

(ii) Wir definieren das Cauchy-Produkt *der zu a und b gehörigen Reihen als die zur gefalteten Folge $a*b$ gehörige Reihe, also*

$$\textit{Cauchy-Produkt von } \left(\sum_{k=0}^{K} a_k\right)_{K\in\mathbb{N}_0} \textit{ und } \left(\sum_{\ell=0}^{L} b_\ell\right)_{L\in\mathbb{N}_0} := \left(\sum_{m=0}^{M} (a*b)_m = \sum_{k=0}^{m} a_k b_{m-k}\right)_{M\in\mathbb{N}_0}.$$

Beispiele. [Faltung]

- Die Faltung von $a \equiv 1$ mit sich selbst ist gegeben durch

$$(a*a)_m = \sum_{k=0}^{m} 1 \cdot 1 = m+1.$$

- Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Die Faltung der Folgen

$$a, b : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}, \qquad a_k := \frac{z^k}{k!}, \qquad b_\ell := \frac{w^\ell}{\ell!} \tag{3.25}$$

ist gegeben durch

$$\begin{aligned}(a * b)_m &= \sum_{k=0}^{m} \frac{z^k w^{m-k}}{k!(m-k)!} \\ &= \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} z^k \cdot w^{m-k} \quad \text{(Binomialkoeffizient: } \binom{m}{k} := \frac{m!}{k!(m-k)!}\text{)} \\ &= \frac{1}{m!}(z+w)^m \text{(gemäss dem binomischen Lehrsatz).} \end{aligned} \tag{3.26}$$

Satz 3.42 (Cauchy-Produkt zweier Reihen)**.** *Seien $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ und $b = (b_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}_0}$ absolut summierbare Folgen in $\mathbb{C}$. Dann ist die Faltung $a * b$ absolut summierbar, und es gilt*

$$\sum_{m=0}^{\infty} (a * b)_m = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{n} (a * b)_m = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell. \tag{3.27}$$

Beweis: [Bla03, (5.18), S. 189] oder [Stra, Satz 3.8.2., S. 47]

Bemerkungen. [Produkt zweier Reihen]

- Dieser Satz besagt:
  - Das Cauchy-Produkt zweier absolut konvergenter Reihen konvergiert absolut.
  - Der Grenzwert des Cauchy-Produktes solcher Reihen ist gleich dem Produkt der Grenzwerte der Reihen.

- Wir betrachten den Fall, dass $a_k \neq 0$ für nur endliche viele k und $b_\ell \neq 0$ für nur endlich viele ℓ. Das bedeutet, dass es Zahlen $K, L \in \mathbb{N}_0$ gibt so, dass $a_k = 0$ für $k > K$ und $b_\ell = 0$ für $\ell > L$. Dann folgt die Aussage von Satz 3.42 aus dem

Distributivgesetz. Genauer gesagt gilt

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty}(a*b)_m &= \sum_{m=0}^{K+L}(a*b)_m \\ &= \sum_{m=0}^{K+L}\sum_{k=0,\dots,K,\,\ell=0,\dots,L:\,k+\ell=m} a_k b_\ell \qquad \text{(gemäss Definition 3.41)} \\ &= \sum_{k=0,\dots,K,\,\ell=0,\dots,L} a_k b_\ell \\ &= \left(\sum_{k=0}^{K} a_k\right)\sum_{\ell=0}^{L} b_\ell \qquad \text{(gemäss dem Distributivgesetz).}\end{aligned}$$

- Der interessante Aspekt von Satz 3.42 ist, dass die Identität (3.27) auch gilt, falls $a_k \neq 0$ für unendlich viele k oder $b_\ell \neq 0$ für unendlich viele ℓ.

- Ohne die Voraussetzung, dass a und b absolut summierbar sind, ist die Aussage des Satzes 3.42 im Allgemeinen falsch, selbst wenn die zu a und b gehörigen Reihen konvergieren. Ein Gegenbeispiel ist gegeben durch

$$a : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C},\ a_k := \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}, \qquad b := a.$$

Die zu a gehörige Reihe konvergiert gemäss Satz 3.34 (Konvergenzkriterium von Leibniz für alternierende Reihen). Die zum Cauchy-Produkt $a*a$ gehörige Reihe konvergiert jedoch nicht, und daher ist die Aussage des Satzes 3.42 für dieses $a = b$ falsch. Sei nämlich $m \in \mathbb{N}_0$. Gemäss Satz 2.13 (Youngsche Ungleichung) mit $x := \sqrt{k+1}$, $y := \sqrt{m-k+1}$ und $c := 1$ gilt

$$\sqrt{k+1}\sqrt{m-k+1} \leq \frac{1}{2}\big((k+1)+(m-k+1)\big) = \frac{m+2}{2}. \tag{3.28}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}(a*a)_m &= \sum_{k=0}^{m} a_k * a_{m-k} \\ &= \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k(-1)^{m-k}}{\sqrt{k+1}\sqrt{m-k+1}} \\ &= (-1)^m \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{m-k+1}}.\end{aligned}$$

Mittels (3.28) folgt daraus, dass

$$|(a * a)_m| \geq \sum_{k=0}^{m} \frac{2}{m+2} = \frac{2(m+1)}{m+2} \geq 1.$$

Mittels Proposition 3.20 (Cauchy-Kriterium für Konvergenz einer Reihe in $\mathbb{R}^d$) folgt daraus, dass die zu $a * a$ gehörige Reihe nicht konvergiert. (Warum?)

Bemerkung: Die Folge a ist nicht absolut summierbar. (Warum?) Es ergibt sich daher kein Widerspruch zu Satz 3.42.

Korollar 3.43 (Additionstheorem für die Exponentialfunktion)**.** *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w).$$

Beweis des Korollars 3.43: Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Wir definieren a und b wie in (3.25). Gemäss Definition 3.25 gilt

$$\begin{aligned}
\exp(z+w) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{(z+w)^m}{m!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{n} (a * b)_m \qquad \text{(wegen (3.26))} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell \qquad \text{(gemäss Satz 3.42)} \\
&= \exp(z)\exp(w).
\end{aligned}$$

Das beweist Korollar 3.43. □

3.6 Die Exponentialfunktion, die trigonometrischen Funktionen Kosinus und Sinus, Eulersche Formel

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96a, 2.5] und [Stra, 3.9, 5.3]. An rationalen Stellen ist die Exponentialfunktion durch Potenzieren von e gegeben. Die Exponentialfunktion hängt über die Eulersche Formel mit den trigonometrischen Funktionen Kosinus und Sinus zusammen.

Wir definieren e wie in Definition 3.11 ($e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$). Wir erinnern uns an folgende Definition aus dem Gymnasium. Für Zahlen $b \in]0, \infty[$ und $r \in \mathbb{Q}$ definieren

wir die r-te Potenz von b als

$$b^r := \sqrt[n]{b^m}, \tag{3.29}$$

wobei $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ so gewählt sind, dass $r = \frac{m}{n}$.

Bemerkungen.
- Für jedes $y \in [0, \infty[$ ist die Wurzel $\sqrt[n]{y}$ als die eindeutige Zahl $x \in [0, \infty[$ definiert so, dass $x^k = y$. Siehe Definition 4.47.
- b^r ist wohldefiniert, d. h. es gibt tatsächlich ein solches Paar (m, n) und die rechte Seite von (3.29) hängt nicht von der Wahl von (m, n) (so, dass $r = \frac{m}{n}$) ab.

Satz 3.44 (Exponentialfunktion, Eulersche Zahl)**.** *Für jede rationale Zahl r gilt*

$$e^r = \exp(r).$$

Beweis: [Stra, Satz 3.9.2, S. 49]

Bemerkung. Insbesondere gilt

$$e = \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots$$

(Siehe Übungsserie 6, Eulersche Zahl und Exponentialfunktion.)

Sei $z \in \mathbb{C}$.

Definition 3.45 (komplexe Potenz von e)**.** *Wir definieren*

$$e^z := \exp(z).$$

Bemerkung. Für ein rationales $z = r$ haben wir e^r schon mittels (3.29) definiert. Wegen Satz 3.44 fallen für ein solches z die Definitionen (3.29) und 3.45 zusammen. Daher ist die Definition 3.45 sinnvoll.

Um den Zusammenhang der Exponentialfunktion mit der Kosinus- und der Sinusfunktion zu erklären, benötigen wir folgende Definition.

Definition 3.46 (Kosinus- und Sinusreihe)**.** *Wir definieren die* Kosinusreihe zu z *als die zur Folge* $\left(\frac{(-1)^j z^{2j}}{(2j)!}\right)_{j \in \mathbb{N}_0}$ *gehörige Reihe, also als die Folge* $\left(\sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^j z^{2j}}{(2j)!}\right)_{m \in \mathbb{N}_0}$.

Wir definieren die Sinusreihe zu z *als die zur Folge* $\left(\frac{(-1)^j z^{2j+1}}{(2j+1)!}\right)_{j \in \mathbb{N}_0}$ *gehörige Reihe, also als die Folge* $\left(\sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^j z^{2j+1}}{(2j+1)!}\right)_{m \in \mathbb{N}_0}$.

Bemerkung 3.47. Die Kosinus- und die Sinusreihe konvergiert (für jedes $z \in \mathbb{C}$). Das folgt aus Satz 3.22 (Quotientenkriterium). (Überprüfen Sie das!)

Definition 3.48 (Cos, Sin)**.** *Wir definieren die Funktionen*

$$\mathrm{Cos}, \mathrm{Sin} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad \mathrm{Cos}(z) := \lim_{m\to\infty} \sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^j z^{2j}}{(2j)!}, \qquad \mathrm{Sin}(z) := \lim_{m\to\infty} \sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^j z^{2j+1}}{(2j+1)!}.$$

Um den nächsten Satz zu formulieren, benötigen wir folgende Definitionen. Seien X_0, Y_0 Mengen, $X \subseteq X_0$ und $f : X_0 \to Y_0$. Wir definieren die *Einschränkung* (oder *Restriktion*) *von* f *auf* X_0 als die Abbildung

$$f|_X := f \restriction_X \left(X, Y_0, \left\{(x, f(x)) \,\middle|\, x \in X\right\}\right).$$

($\restriction$ stellt eine Harpune dar.) $f : X \to Y_0$ ist also die gleiche Funktion wie f, ist aber nur auf X definiert. Wir erinnern uns an Definition 2.21 (cos, sin).

Satz 3.49 (Kosinus, Sinus)**.** *Die Einschränkung von* Cos *auf* $\mathbb{R}$ *ist durch* cos *gegeben und die Einschränkung von* Sin *auf* $\mathbb{R}$ *durch* sin*, d. h.*

$$\mathrm{Cos}\,|_{\mathbb{R}} = \cos, \qquad \mathrm{Sin}\,|_{\mathbb{R}} = \sin.$$

Beweis: Das folgt aus dem Beweis der Existenzaussage von Lemma 2.20 (S. 204). Siehe Bemerkung 5.29.

Korollar 3.50 (Eulersche Formel)**.** *Für jedes* $\varphi \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$e^{i\varphi} = \mathrm{cis}\,\varphi = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}
e^{i\varphi} &= \exp(i\varphi) \qquad \text{(gemäss Definition 3.45)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(i\varphi)^k}{k!} \\
&= \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{j=0}^{m} \frac{(i\varphi)^{2j}}{(2j)!} + \sum_{j=0}^{m} \frac{(i\varphi)^{2j+1}}{(2j+1)!} \right) \\
&= \lim_{m\to\infty} \sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^j \varphi^{2j}}{(2j)!} + i \lim_{m\to\infty} \sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^j \varphi^{2j+1}}{(2j+1)!} \\
&= \mathrm{Cos}\,\varphi + i\,\mathrm{Sin}\,\varphi \qquad \text{(gemäss Definition 3.48)} \qquad (3.30) \\
&= \cos\varphi + i\sin\varphi \qquad \text{(gemäss Satz 3.49).} \qquad (3.31)
\end{aligned}$$

Das beweist Korollar 3.50. □
Als eine Anwendung der Eulerschen Formel und des Additionstheorems erhalten wir folgendes Korollar.

Korollar 3.51 (Periodizität der komplexen Exponentialfunktion)**.** *Es gilt*

$$\mathrm{Exp}(z + 2\pi i) = \mathrm{Exp}(z), \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Beweis: Für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Exp}(z + 2\pi i) &= \mathrm{Exp}(z)\,\mathrm{Exp}(2\pi i) \qquad \text{(gemäss Korollar 3.43)} \\ &= \mathrm{Exp}(z) \cdot 1 \qquad \text{(wegen Korollar 3.50 und } \cos(2\pi) = 1,\ \sin(2\pi) = 0). \end{aligned}$$

Das beweist Korollar 3.51. □

Kapitel 4

Stetigkeit, Topologie

Dieses Kapitel entspricht [Bla96a, 2.2, 2.3] und [Stra, Kapitel 4]. Ein zentraler Begriff dieses Kapitels ist die Stetigkeit einer Funktion mehrerer Veränderlicher. Anschaulich gesprochen, ist eine Funktion stetig, falls wir ihren Graphen zeichnen können, ohne den Bleistift vom Papier zu heben. Das bedeutet, dass sich ihre Werte nur wenig ändern, wenn das Argument sich wenig ändert. Stetigkeit ist eine Voraussetzung vieler Sätze. Zum Beispiel ist jede stetige Funktion auf einem abgeschlossenen und beschränkten Intervall Riemann-integrierbar. (Siehe [Stra, Satz 6.2.2].)

Wir werden Stetigkeit mit Hilfe von Topologie charakterisieren. Die Topologie ist ein Teilgebiet der Mathematik, das sich mit offenen Mengen befasst. Eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ heisst offen, falls sie die Vereinigung von offenen Bällen (= offene Vollkugeln) ist. (Im eindimensionalen Fall ist ein offener Ball dasselbe wie ein offenes Intervall.) Eine auf einer offenen Menge definierte Funktion f ist genau dann stetig, wenn das Urbild unter f jeder offenen Menge wieder offen ist. Das charakterisiert Stetigkeit mittels Topologie.

4.1 Stetigkeit, Stetigkeit erhalten unter Rechenoperationen und Verknüpfung, durch Potenzreihe definierte Funktion ist stetig

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96b, 2.2] und [Stra, 4.2]. Seien $n, n' \in \mathbb{N}$, $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $S' \subseteq \mathbb{R}^{n'}$ und $f : S \to S'$ eine Funktion.

Definition 4.1 (Stetigkeit)**.** *(i) Sei $x_0 \in S$. f heisst* an der Stelle x_0 [1] stetig *g. d. w.*

$$\forall \varepsilon \in]0, \infty[\exists \delta \in]0, \infty[\forall x \in S : \|x - x_0\| \leq \delta \Rightarrow \big\|f(x) - f(x_0)\big\| \leq \varepsilon. \qquad (4.1)$$

[1] oder *im Punkt* x_0 oder schlichtweg *in* x_0



Abbildung 4.1: Karl Weierstraß, 1815–1897, deutscher Mathematiker, Vater der Epsilontik (= Wissenschaft des ε).

(Hierbei bezeichnet $\|\cdot\|$ die euklidische Norm. Siehe (1.8)*.)*

(ii) f *heisst* stetig *g. d. w.* f *an jeder Stelle seines Definitionsbereiches stetig ist.*

Bemerkungen 4.2. [Stetigkeit]

(i) Ausgesprochen lautet die Stetigkeitsbedingung (4.1):

Für jedes $\varepsilon \in]0,\infty[$ gibt es ein $\delta \in]0,\infty[$ so, dass für jedes $x \in S$ gilt: Falls der (euklidische) Abstand zwischen x und x_0 kleiner gleich δ ist, dann ist der Abstand zwischen $f(x)$ und $f(x_0)$ kleiner gleich ε. Das bedeutet, dass sich der Wert von f nur wenig ändert, wenn sich ihr Argument x_0 ändert.

(ii) Die Bedingung (4.1) heisst das *Weierstraßsche ε-δ-Kriterium*. Sie ist nach Karl Weierstraß benannt. (Siehe Abbildung 4.1.)

(iii) In (4.1) dürfen wir die Bedingung "$\ldots \leq \delta$" durch "$\ldots < \delta$" ersetzen. Wir dürfen auch die Bedingung "$\ldots \leq \varepsilon$" durch "$\ldots < \varepsilon$" ersetzen. Dadurch ergeben sich äquivalente Definitionen.

(iv) In [Stra, Definition 4.1.3., S. 52] wird Stetigkeit an einer Stelle anders definiert. Diese Definition und Definition 4.1 sind äquivalent.

(v) Die Funktion f ist an der Stelle x_0 *unstetig*, d. h. *nicht stetig* g. d. w. gilt

$$\begin{aligned}
&\neg\left(\forall\varepsilon\in]0,\infty[\exists\delta\in]0,\infty[\forall x\in S:\ \|x-x_0\|\le\delta\Rightarrow\big\|f(x)-f(x_0)\big\|\le\varepsilon\right)\\
=&\neg\forall\varepsilon\exists\delta\forall x\ldots \text{ (Der Übersichtlichkeit halber kürzen hier } \forall\varepsilon\in]0,\infty[\text{ zu } \forall\varepsilon \text{ ab, usw.)}\\
\Leftrightarrow&\exists\varepsilon\neg\exists\delta\ldots \qquad \text{(gemäss Bemerkung 1.21, (1.12))}\\
\Leftrightarrow&..\forall\delta\neg\forall x\ldots \qquad \text{(gemäss Bemerkung 1.21, (1.13))}\\
\Leftrightarrow&\ \ \ldots\exists x\neg\left(\|x-x_0\|\le\delta\Rightarrow\big\|f(x)-f(x_0)\big\|\le\varepsilon\right)\\
\Leftrightarrow&\qquad\ \ \ldots\left(\|x-x_0\|\le\delta\wedge\big\|f(x)-f(x_0)\big\|\not\le\varepsilon\right)\\
\Leftrightarrow&\exists\varepsilon\in]0,\infty[\forall\delta\in]0,\infty[\exists x\in S:\|x-x_0\|\le\delta\wedge\big\|f(x)-f(x_0)\big\|>\varepsilon. \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

Beispiele 4.3. [Stetigkeit]

(i) Jede konstante Funktion ist stetig. (Überprüfen Sie das!)

(ii) Für jede Teilmenge $S\subseteq\mathbb{R}^n$ ist die Identitätsabbildung $\mathrm{id}:=\mathrm{id}_S:S\to S$ stetig. Seien nämlich $x_0\in S$ und $\varepsilon\in]0,\infty[$. Wir definieren $\delta:=\varepsilon$. Sei $x\in S$ so, dass $\|x-x_0\|\le\delta$. Dann gilt

$$\big\|\mathrm{id}(x)-\mathrm{id}(x_0)\big\|=\|x-x_0\|\le\delta=\varepsilon.$$

Daher ist id für jedes $x_0\in S$ an der Stelle x_0 stetig. Also ist $\mathrm{id}=\mathrm{id}_S$ stetig.

(iii) Sei $n\in\mathbb{N}$ und $i\in\{1,\ldots,n\}$. Wir definieren die (*kanonische*) *i-te Projektion* (oder *Projektion auf die i-te Koordinatenachse*) als die Funktion

$$\mathrm{pr}_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\qquad \mathrm{pr}_i(x):=x_i. \qquad (4.3)$$

Diese Abbildung ist stetig. (Siehe Übungsserie 6.)

(iv) Für jede Teilmenge A von $\mathbb{R}^n$ definieren wir die *Indikatorfunktion* (oder *charakteristische Funktion*) *der Menge A* als

$$\chi_A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\qquad \chi_A(x):=\begin{cases}1, & \text{falls } x\in A\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases} \qquad (4.4)$$

Die Funktion

$$f:=\chi_{\{0\}}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

ist an der Stelle $x_0=0$ unstetig. Um das zu sehen, überprüfen wir die Bedingung (4.2). Wir definieren $\varepsilon:=\frac{1}{2}$. Sei $\delta\in]0,\infty[$. Wir wählen ein $x\in\mathbb{R}$ so, dass $x\neq x_0=0$ und $|x|\le\delta$ (zum Beispiel $x:=\delta$). Es gilt

$$|x-0|\le\delta,\qquad \big|\chi_{\{0\}}(x)-\chi_{\{0\}}(0)\big|=|0-1|=1>\frac{1}{2}=\varepsilon.$$

Daher ist die Bedingung (4.2) erfüllt. Gemäss Bemerkung 4.2(v) ist $\chi_{\{0\}}$ daher an der Stelle $x_0=0$ unstetig.

(v) Wir definieren die *Dirichletsche Sprungfunktion* als $\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die charakteristische Funktion der rationalen Zahlen. Diese Funktion ist in jedem Punkt unstetig. Siehe [Stra, Beispiel 4.1.3. v), S. 53]. Die Funktion ist nach Peter Gustav Lejeune Dirichlet[2] benannt.

Satz 4.4 (Stetigkeit, Rechenoperationen, Komponenten)**.** *(i) Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division komplexer Zahlen sind stetige Funktionen.*

(ii) Seien $n \in \mathbb{N}$, $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $f, g : S \to \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$ und $x_0 \in S$ so, dass f und g in x_0 stetig sind. Dann sind die Funktionen

$$f + g, \qquad a \cdot f, \qquad f \cdot g$$

in x_0 stetig. Falls $g(x_0) \neq 0$, dann ist die Funktion $\frac{f}{g}$ in x_0 stetig. (Diese Funktion ist auf der Menge aller $x \in S$ definiert, wofür $g(x) \neq 0$.)

(iii) Seien $n, n' \in \mathbb{N}$, $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $S' \subseteq \mathbb{R}^{n'}$, $f = \big(f_1, \ldots, f_{n'}\big) : S \to S'$ und $x_0 \in S$. Die Funktion f ist in x_0 stetig g. d. w. für jedes $i \in \{1, \ldots, n'\}$ die Funktion f_i in x_0 stetig ist.

Beweis: [Bla03, (3.6,3.7,3.5)]

Bemerkungen. [Stetigkeit, Rechenoperationen]

- (i): Addition komplexer Zahlen ist die Abbildung

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad +(z, w) = z + w.$$

  Subtraktion und Multiplikation sind analoge Abbildungen. Division ist die Abbildung

$$\div : \mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \to \mathbb{C}, \qquad \div(z, w) := \frac{z}{w}.$$

- Seien $f : S \to S'$ eine Funktion, $A \subseteq S$ und $x_0 \in A$. Falls f in x_0 stetig ist, dann ist die eingeschränkte Funktion $f|_A$ in x_0 stetig. Aus Teil (i) des Satzes 4.4 folgt daher, dass Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division *reeller* Zahlen stetige Funktionen sind.

- (iii): Die Funktionen $f_1, \ldots, f_{n'} : S \to \mathbb{R}$ sind die (*Standard-*)*Komponenten* der Funktion $f : S \to S'$. Betrachten wir zum Beispiel die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad f(x) := \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

[2] 1805-1859, deutscher Mathematiker

(x_1, x_2 sind die Komponenten von x, d. h. $x = (x_1, x_2)$.) Die Komponenten von f sind gegeben durch

$$f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f_1(x) = x_1 + x_2, \qquad f_2(x) = x_1 x_2.$$

Beispiele 4.5. [Stetigkeit der Rechenoperationen und eines Polynoms]

(i) Seien $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$. **Behauptung:** Die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := a_1 x + a_0,$$

ist stetig.

Beweis: Für jede Menge X und jede Zahl $c \in \mathbb{R}$ schreiben wir die Funktion auf X, die konstant gleich c ist, als

$$c_X : X \to \mathbb{R}, \qquad c_X(x) := c, \, \forall x \in X.$$

Die Funktion $x \mapsto a_1 x$, also $a_1 \,\mathrm{id}$ ist gemäss Beispiel 4.3(ii) und Satz 4.4(ii) stetig. Die Funktion $(a_0)_{\mathbb{R}}$ ist gemäss Beispiel 4.3(i) stetig. Da $f = a_1 \,\mathrm{id} + (a_0)_{\mathbb{R}}$, folgt daher aus Satz 4.4(ii), dass f stetig ist. Das zeigt die Behauptung.

(ii) Jedes reelle Polynom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig. Das folgt aus Beispiel 4.3((i),(ii)), Satz 4.4(ii) und Induktion über den Grad des Polynoms. (Überlegen Sie sich das!)

(iii) Jedes komplexe Polynom $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist stetig. Das folgt analog zum Beispiel (ii).

Definition 4.6 (Polynom in mehreren Veränderlichen)**.** *Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heisst* Polynom (auf $\mathbb{R}^n$) *g. d. w. sie eine (endliche) Linearkombination von Funktionen der Form*

$$x \mapsto x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

ist, wobei $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}_0$. ($x_i$ bezeichnet die i-te Komponente von $x \in \mathbb{R}^n$.) Der Grad des Polynoms f ist die grösste Zahl $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ so, dass der Term $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ in f (mit einem nichtverschwindenden Koeffizienten) auftritt.

Beispiel. [Polynom in mehreren Variablen] Ein Beispiel für ein Polynom auf $\mathbb{R}^3$ ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := -x_1^2 + 3x_1 x_2^2 - \frac{1}{2} x_2^3 x_3.$$

Der Grad dieses Polynoms ist 4, da für $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 1$ der Term $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}$ in f auftritt und kein Term höherer Ordnung auftritt.

Beispiel 4.7. [Stetigkeit eines Polynoms in mehreren Variablen, Rechenoperationen, Komponenten] **Behauptung:** Jedes Polynom auf $\mathbb{R}^n$ ist stetig.

Beweis: Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}_0$ und $i \in \{1, \ldots, n\}$. Gemäss Beispiel 4.3(iii) ist die Projektion $\mathrm{pr}_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig. Mittels Satz 4.4(ii) folgt hieraus, dass $\mathrm{pr}_i^{\alpha_i}$ stetig ist und daher $\mathrm{pr}_i^{\alpha_1} \cdots \mathrm{pr}_n^{\alpha_n}$ stetig ist. Indem wir Satz 4.4(ii) nochmals anwenden, folgt daraus, dass jede Linearkombination von Funktionen der Form $\mathrm{pr}_i^{\alpha_1} \cdots \mathrm{pr}_n^{\alpha_n}$ stetig ist. Eine solche Linearkombination ist dasselbe wie ein Polynom auf $\mathbb{R}^n$. (Das folgt aus der Tatsache, dass $\left(\mathrm{pr}_i^{\alpha_1} \cdots \mathrm{pr}_n^{\alpha_n}\right)(x) = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$.) Das beweist die Behauptung.

Die Verknüpfung zweier stetiger Funktionen ist stetig. Das ist der Inhalt des folgenden Satzes.

Satz 4.8 (Verknüpfung stetiger Funktionen)**.** *Seien $n, n', n'' \in \mathbb{N}$, $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $S' \subseteq \mathbb{R}^{n'}$, $S'' \subseteq \mathbb{R}^{n''}$, $f : S \to S'$, $g : S' \to S''$ Funktionen und $x_0 \in S$ ein Punkt so, dass f in x_0 stetig ist und g in $f(x_0)$ stetig ist. Dann ist die verknüpfte Funktion $g \circ f : S \to S''$ in x_0 stetig.*

Beweis: [Bla03, (3.2), S. 108]

Bemerkung 4.9. [Wurzelfunktionen stetig] Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die n-te Wurzelfunktion $\sqrt[n]{} : [0, \infty[\to [0, \infty[$ stetig. Siehe Beispiel 4.53(i).

Beispiel. [Verknüpfung stetiger Funktionen] **Behauptung:** Die Funktion

$$h : [-1, \infty[\to \mathbb{R}, \qquad h(x) := \sqrt{x+1},$$

ist stetig. **Beweis:** Sei $x_0 \in [-1, \infty[$. Wir definieren die Funktionen

$$f : [-1, \infty[\to [0, \infty[, \qquad f(x) := x + 1, \qquad g := \sqrt{} : [0, \infty[\to [0, \infty[.$$

Es gilt

$$h = g \circ f.$$

Gemäss Beispiel 4.5(i) ist die Funktion f im Punkt x_0 stetig. Gemäss Bemerkung 4.9 ist die Funktion g im Punkt $f(x_0)$ stetig. Aus Satz 4.8 folgt daher, dass die Funktion h im Punkt x_0 stetig ist.

Sei $(c_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Wir schreiben ρ für den zugehörigen Konvergenzradius. (Siehe Definition 3.27.) Wir definieren die Funktion

$$f : B_\rho^2(0) \to \mathbb{C}, \qquad f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} c_k z^k.$$

Satz 4.10 (Durch Potenzreihe definierte Funktion ist stetig.)**.** *Die Funktion f ist stetig.*

Beweis: Siehe Korollar 4.62.

Bemerkung. Gemäss Definition 3.27(ii) ist die zu $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gehörige *Konvergenzkreisscheibe* durch $B^2_\rho(0)$ gegeben. Gemäss Bemerkung 3.30(i) ist das die grösste offene Kreisscheibe, auf der die Potenzreihe konvergiert. Satz 4.10 besagt, dass die durch die Potenzreihe definierte Funktion auf der Konvergenzkreisscheibe stetig ist.

Beispiele 4.11. [Exponentialfunktion, Kosinus, Sinus stetig] Die Funktionen[3] $\exp, \mathrm{Cos}, \mathrm{Sin} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind stetig. Das folgt aus Satz 4.10 und der Tatsache, dass die Konvergenzradien der Potenzreihen, die $\exp, \mathrm{Cos}, \mathrm{Sin}$ definieren, gleich ∞ sind. (Siehe Beispiel 3.24 und Bemerkung 3.47.)

Beispiel. [komplizierte stetige Funktion] Wir betrachten die Funktion

$$f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad f(x) := \begin{pmatrix} \sqrt{\exp(x_1x_2) + x_2^4} \\ x_1^2 + x_2^2 \end{pmatrix}.$$

Behauptung: Diese Funktion ist stetig.

Beweis: Wir definieren die Funktionen

$$p, q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad p(x) := x_1x_2, \qquad q(x) := x_2^4.$$

Es gilt

$$f_1 = \sqrt{} \circ \big(\exp \circ p + q\big). \tag{4.5}$$

(Überprüfen Sie das!) Die Funktion p ist ein Polynom (in zwei Variablen). Gemäss Beispiel 4.7 ist p daher stetig. Gemäss Beispiel 4.11 ist exp stetig. Gemäss Satz 4.8 ist daher $\exp \circ p$ stetig.

Die Funktion q ist ein Polynom (in zwei Variablen). Gemäss Beispiel 4.7 ist q daher stetig. Gemäss Satz 4.4(i) folgt hieraus, dass $\exp \circ p + q$ stetig ist. Gemäss Bemerkung 4.9 ist die Quadratwurzelfunktion $\sqrt{}$ stetig. Gemäss Satz 4.8 folgt hieraus, dass $\sqrt{} \circ \big(\exp \circ p + q\big)$ stetig ist. Gemäss (4.5) stimmt diese Funktion mit f_1 überein. Daher ist f_1 stetig.

Die Komponente f_2 ist ein Polynom. Gemäss Beispiel 4.7 ist f_2 daher stetig. Da f_1 und f_2 stetig sind, ist gemäss Satz 4.4(iii) die Funktion f stetig. Das beweist die Behauptung.

Bemerkung. In diesem Beispiel haben wir das Problem, Stetigkeit von f zu beweisen, in Teilprobleme aufgeteilt: Zeige, dass $p, \exp, \exp \circ p, \exp \circ p + q, f_1$ und f_2 stetig sind. Wir haben also die Methode *Divide et impera!* (Teile und herrsche!) verwendet.

[3] Siehe Definitionen 3.25 und 3.48.

4.2 Topologie: Offen- und Abgeschlossenheit einer Menge, Inneres, Abschluss, Rand, Konvergenz einer Funktion, Kompaktheit, stetige Funktion auf kompakter Menge

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96b, 2.3] und [Stra, 4.1, 4.3]. Topologie befasst sich mit offenen und abgeschlossenen Mengen. Eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ heisst offen g. d. w. sie die Vereinigung von offenen Bällen (= offene Vollkugeln) ist. Sie heisst abgeschlossen g. d. w. ihr Komplement offen ist. Mit Hilfe von Topologie können wir Stetigkeit einer Funktion charakterisieren. Eine auf einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ definierte Funktion ist nämlich genau dann stetig, falls das Urbild jeder offenen Teilmenge unter der Funktion offen ist.

Eine Funktion konvergiert an einer Stelle x_0 gegen einen Wert y_0, falls ihre Werte sich immer mehr y_0 nähern, wenn sich ihr Argument der Stelle x_0 nähert.

Ein zentraler Begriff der Topologie ist *Kompaktheit*. Dieser Begriff ist zum Beispiel darum wichtig, weil jede auf einer kompakten nicht leeren Menge definierte stetige Funktion ihr Supremum annimmt.

Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Wir bezeichnen mit $B_r^n(x_0)$ den offenen Ball um x_0 mit Radius r. (Siehe Definition 1.18.)

Definition 4.12 (innerer Punkt, Inneres, Offenheit)**.** *(i) Ein Punkt $x \in S$ heisst* innerer Punkt von S *g. d. w. es ein $r \in]0, \infty[$ gibt so, dass*

$$B_r^n(x) \subseteq S.$$

Wir definieren $\operatorname{Int} S$*, das* Innere von S *(oder den* offenen Kern von S*), als die Menge aller ihrer inneren Punkte,*

$$\operatorname{Int} S := \operatorname{Int}(S) := \overset{\circ}{S} := \big\{\textit{innerer Punkt von } S\big\}.$$

(ii) S heisst offen (in $\mathbb{R}^n$) *g. d. w. jeder Punkt von S ein innerer Punkt ist.*

Bemerkungen.

- "Int" steht für *interior*.
- Das Innere von S ist in S enthalten,

$$\operatorname{Int} S \subseteq S.$$

- Eine Menge ist offen g. d. w. sie gleich ihrem Inneren ist.

- Definition 4.12(ii) erklärt die in Beispiel 1.1(iv) erwähnte Struktur *Standard-Topologie auf* $\mathbb{R}^n$.

Beispiele 4.13. [innerer Punkt, Inneres, Offenheit]

(i) Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $R \in [0, \infty] = [0, \infty[\cup \{\infty\}$.

Behauptung: Jeder Punkt des offenen Balles $S := B_R^n(x_0)$ ist ein innerer Punkt. Das Innere des offenen Balles ist daher der offene Ball, und der offene Ball ist offen. Das rechtfertigt den Namen "offener Ball". Insbesondere ist $\mathbb{R}^n = B_\infty^n(0)$ offen.

Beweis der Behauptung: Sei $x \in S = B_R^n(x_0)$. Wir setzen $r := R - \|x - x_0\|$. Sei $y \in B_r^n(x)$. Da $y - x_0 = (y - x) + (x - x_0)$, gilt gemäss der Dreiecksungleichung (Satz 2.12)[4]

$$\|y - x_0\| \leq \|y - x\| + \|x - x_0\| < r + \|x - x_0\| = R.$$

Daher liegt y in $S = B_R^n(x_0)$. Also ist $B_r^n(x)$ in S enthalten und daher x ein innerer Punkt von S, wie behauptet.

(ii) Jedes offene Intervall I ist offen, da es um jeden Punkt in I einen offenen Ball gibt, der in I enthalten ist. (Warum?)

(iii) Das Innere des abgeschlossenen Balles ist der offene Ball, genauer

$$\operatorname{Int}\left(\overline{B}_R^n(x_0)\right) = B_R^n(x_0).$$

(Siehe Übungsserie 7 (Inneres).)

(iv) Seien $a < b$ reelle Zahlen. Wir betrachten das halb-offene Intervall $S := [a, b[$. Gemäss (ii) ist jeder Punkt im offenen Intervall $]a, b[$ ein innerer Punkt von $]a, b[$ und daher ein innerer Punkt von $S = [a, b[$. Andererseits ist $x_0 := a$ kein innerer Punkt von S. (Warum?) Das halb-offene Intervall $[a, b[$ ist daher nicht offen. Wir haben gezeigt, dass das Innere des halb-offenen Intervalls $S = [a, b[$ das offene Intervall $]a, b[$ ist,

$$\operatorname{Int}[a, b[=]a, b[.$$

(v) Jedes nicht leere beschränkte abgeschlossene Intervall ist nicht offen, da keiner der Randpunkte ein innerer Punkt ist. Insbesondere ist für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ die Einpunktmenge $\{x_0\}$ nicht offen.

[4]Die Aussagen gelten auch im Fall $R = \infty$.

Im Folgenden benötigen wir die Vereinigungsmenge einer beliebigen Kollektion (= Menge) von Mengen. Diese Menge ist wie folgt definiert. Sei $\mathcal{S}$ eine Kollektion von Mengen.

Definition (Vereinigung, Durchschnitt)**.** *(i) Wir definieren $\bigcup\mathcal{S}$, die* Vereinigung von $\mathcal{S}$ *(oder* Vereinigungsmenge von $\mathcal{S}$ *oder* Vereinigung aller Elemente von $\mathcal{S}$*) als die Menge aller Objekte, die Element (mindestens) eines Elementes von $\mathcal{S}$ sind, d. h.*

$$\bigcup\mathcal{S} := \bigcup_{S\in\mathcal{S}} S := \big\{x \,\big|\, \exists S \in \mathcal{S} : x \in S\big\}.$$

(ii) Wir nehmen jetzt an, dass $\mathcal{S}$ nicht leer ist. Wir definieren $\bigcap\mathcal{S}$, den (Durch-)Schnitt von $\mathcal{S}$ *(oder die* Schnittmenge von $\mathcal{S}$ *oder den* Schnitt aller Elemente von $\mathcal{S}$*) als die Menge aller Objekte, die Element aller Elemente von $\mathcal{S}$ sind, d. h.*

$$\bigcap\mathcal{S} := \bigcap_{S\in\mathcal{S}} S := \big\{x \,\big|\, \forall S \in \mathcal{S} : x \in S\big\}.$$

Bemerkungen. [Vereinigung, Durchschnitt]

- Wenn $\mathcal{S}$ aus zwei Mengen A und B besteht, d. h. $\mathcal{S} = \{A, B\}$, dann ist

$$\bigcup\{A, B\} = A \cup B, \qquad \bigcap\{A, B\} = A \cap B.$$

- Sei jetzt I eine Menge (die "Indexmenge") und S eine Abbildung, die jedem $i \in I$ eine Menge $S_i := S(i)$ zuordnet. Wir schreiben $(S_i)_{i\in I} := S$ und nennen dies eine *indizierte Familie von Menge*. Wir setzen

$$\mathcal{S} := \big\{S_i \,\big|\, i \in I\big\}.$$

  Es gilt

$$\bigcup\mathcal{S} = \bigcup_{i\in I} S_i, \qquad \bigcap\mathcal{S} = \bigcap_{i\in I} S_i.$$

Bemerkung. Eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist offen g. d. w. sie die Vereinigung offener Bälle ist, d. h. die Vereinigung einer beliebigen Kollektion (= Menge) offener Bälle. (Die Kollektion darf unendlich viele Elemente besitzen.) Die Implikation "offen $\Longleftarrow$ Vereinigung ..." folgt aus Beispiel 4.13(i). (Überprüfen Sie das!)

Folgender Satz fasst wichtige Eigenschaften von offenen Mengen zusammen.

Satz 4.14 (Eigenschaften offener Mengen)**.** *Es gilt:*

(i) $\emptyset, \mathbb{R}^n$ *sind offen in* $\mathbb{R}^n$.

(ii) Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.

(iii) Jede Vereinigung offener Mengen ist offen.

Beweis: [Stra, Satz 4.3.1, S. 59]

Beispiele. • Wir definieren den "offenen Halbmond" S als den Durchschnitt des offenen Einheitsballes in $\mathbb{R}^2$ und der offenen rechten Halbebene, also

$$S := B_1^2(0) \cap \big(]0, \infty[\times \mathbb{R}\big).$$

(Zeichnen Sie diese Menge!) Gemäss Satz 4.14(ii) ist der "offene Halbmond" offen.

- Gemäss Satz 4.14(iii) und Beispiel 4.13(ii) sind die Mengen

$$]0,1[\cup]2,4[, \qquad \bigcup \Big\{]i, i+1[\;\Big|\; i \in \mathbb{Z} \Big\} = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}}]i, i+1[, \qquad \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} \Big] \frac{1}{2^i}, \frac{3}{2^{i+1}} \Big[$$

offen. (Zeichnen Sie diese Mengen!)

Bemerkung. Die Aussage (ii) des Satzes 4.14 ohne das Wort *endlich* ist falsch. D. h., der Durchschnitt *un*endlich vieler offener Teilmengen ist im Allgemeinen *nicht* offen. Zum Beispiel gilt

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} B_{\frac{1}{k}}^n(0) = \{0\}.$$

Diese Menge ist gemäss Beispiel 4.13(v) nicht offen.

Als Nächstes behandeln wir den topologischen Begriff einer abgeschlossenen Menge. Dieser Begriff ist zum Beispiel darum wichtig, da eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ genau dann kompakt ist, falls sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Definition 4.15 (Abgeschlossenheit)**.** *Eine Teilmenge* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *heisst* abgeschlossen (in $\mathbb{R}^n$) *g. d. w. ihr Komplement* $A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$ *offen ist.*

Bemerkung. Dieser Begriff wurde von Georg Cantor eingeführt, in [Can84], wo er auf S. 388 eine abgeschlossene Menge *ensemble fermé* nennt.

Beispiele 4.16. [(Nicht-)Abgeschlossenheit]

(i) Jedes abgeschlossene Intervall ist abgeschlossen. Sei I zum Beispiel ein nicht leeres beschränktes abgeschlossenes Intervall, d. h., $I = [a, b]$ mit $a \leq b$. Das Komplement von I ist $I^c =]-\infty, a[\cup]b, \infty[$, also die Vereinigung zweier offener Intervalle. Gemäss Satz 4.14(iii) ist diese Vereinigung offen. Also ist I abgeschlossen. Für *un*beschränktes abgeschlossenes Intervall folgt Abgeschlossenheit aus einem ähnlichen Argument.

(ii) Jeder abgeschlossene Ball[5] ist abgeschlossen. Das folgt aus der Dreiecksungleichung für die euklidische Norm. (Siehe Übungsserie 7.)

(iii) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Das offene Intervall $]a, b[$ und die halb-offenen Intervalle $[a, b[$ und $]a, b]$ sind nicht abgeschlossen. (Warum?)

Aus Satz 4.14 folgt das nächste Korollar, das Analoges für abgeschlossene Mengen aussagt.

Korollar 4.17 (Eigenschaften abgeschlossener Mengen)**.** *Es gilt:*

(i) $\emptyset, \mathbb{R}^n$ *sind abgeschlossen in* $\mathbb{R}^n$*.*

(ii) Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

(iii) Jeder Durchschnitt abgeschlossener Mengen[6] *ist abgeschlossen.*

Bemerkung. Aussage (ii) ohne das Wort *endlich* ist falsch. D. h., die Vereinigung *un*endlich vieler abgeschlossener Teilmengen ist im Allgemeinen *nicht* abgeschlossen. Es ist sogar so, dass jede Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Vereinigung von abgeschlossenen Teilmengen ist, da

$$S = \bigcup_{x \in S} \{x\}.$$

(Die Einpunktmenge $\{x\}$ ist abgeschlossen.)

Bemerkungen. [Unterschied zwischen Teilmengen und Türen]

- Gemäss Satz 4.14(i) und Korollar 4.17(i) sind die leere Menge und der ganze Raum $\mathbb{R}^n$ sowohl offen als auch abgeschlossen. Andererseits gibt es Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, die weder offen noch abgeschlossen sind, zum Beispiel halboffene Intervalle. (Siehe Beispiele 4.13(iv) und 4.16(iii).

[5] Siehe Definition 1.18.

[6] Damit meinen wir den Durchschnitt einer beliebigen nicht leeren Kollektion von abgeschlossenen Mengen. Diese Kollektion kann unendlich viele Elemente besitzen.

Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ sind also keine Türen. Ein Tür ist nämlich entweder offen oder geschlossen[7]. Eine Teilmenge dagegen kann offen, abgeschlossen, beides oder keines von beiden sein.

- Die Mengen $\emptyset$ und $\mathbb{R}^n$ sind die einzigen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind. Siehe [Stra, Korollar 4.6.1., S. 72].

Beweis des Korollars 4.17: Für $n =$ i, ii, iii folgt Aussage (n) aus Satz 4.14(n), indem wir das Komplement betrachten und die de Morganschen Gesetze anwenden.[8] Details des Beweises von ((i),(iii)): Siehe Übungsserie 7.

Details des Beweises von (ii): Seien $k \in \mathbb{N}$ und $A_1, \ldots, A_k \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossene Mengen. Gemäss Definition sind dann die Mengen $A_1^c, \ldots, A_k^c$ offen. Gemäss Satz 4.14(ii) ist daher der Durchschnitt $A_1^c \cap \cdots \cap A_k^c$ offen. Gemäss einem de Morganschen Gesetz[9] gilt

$$(A_1 \cup \cdots \cup A_k)^c = A_1^c \cap \cdots \cap A_k^c.$$

Da diese Menge offen ist, ist $A_1 \cup \cdots \cup A_k$ abgeschlossen. Das beweist (ii). □

Folgender Satz charakterisiert Abgeschlossenheit.

Satz 4.18 (Folgenkriterium für Abgeschlossenheit)**.** *Für jede Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:*

(a) S ist abgeschlossen.

(b) (Folgenabgeschlossenheit) Der Grenzwert jeder konvergenten Folge in S liegt wiederum in S, d. h.

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \, \forall (x_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \text{ Folge in } S \Big((x_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \to x \Rightarrow x \in S \Big). \tag{4.6}$$

Beweis: [Stra, Satz 4.3.5, S. 62]

Bemerkung. [Folgenkriterium für Abgeschlossenheit]Die Bedingung (4.6) ist logisch äquivalent zur Bedingung

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \left(\Big(\exists (x_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \text{ Folge in } S : \, (x_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \to x \Big) \Rightarrow x \in S \right). \tag{4.7}$$

[7] Wir setzen hier *abgeschlossen* mit *geschlossen* gleich.

[8] Die de Morganschen Gesetze gelten für beliebige (auch unendliche) Vereinigungen und Durchschnitte. Siehe Übungsserie 6.

[9] Siehe Übungsserie 2 (Mengenoperationen).

Das folgt daraus, dass für jede Aussagenform $A(y)$ und jede Aussage B gilt:

$$\forall y\big(A(y) \Rightarrow B\big) \equiv \big(\exists y_0 A(y_0)\big) \Rightarrow B.$$

(Wir verwenden das mit

$$A(y) := \text{“}y \text{ ist Folge in } S \text{ und } y \to x\text{”}, \qquad B := \text{“}x \in S\text{”}.$$

Die Bedingung (4.6) wird in [Stra, Satz 4.3.5, S. 62] verwendet. Die Formulierung (4.7) scheint mir natürlicher, da sie die Form $\forall x \in \mathbb{R}^n\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)$ besitzt, wobei

$$P(x) := \text{“}\exists (x_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \text{ Folge in } S : (x_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \to x\text{”}, \qquad Q(x) := \text{“}x \in S\text{”}.$$

Beispiel. Das halb-offene Intervall $S :=]0, 1]$ ist nicht abgeschlossen.

Beweis: Das Kontraponierte der Implikation (a)⇒(b) ist ¬(b)⇒ ¬(a). Gemäss Satz 4.18 gilt diese Aussage. Die Folge $x_k := \frac{1}{k}$ $(k \in \mathbb{N})$ liegt in $S =]0, 1]$, aber ihr Grenzwert $x := \lim_{k\to\infty} x_k = 0$ liegt nicht in S. Daher ist die Bedingung (b) nicht erfüllt. Da ¬(b)⇒ ¬(a), folgt, dass (a) nicht erfüllt ist, also, dass $S =]0, 1]$ nicht abgeschlossen ist, wie behauptet.

Der Grenzwert einer Funktion ist in Punkten im Abschluss des Definitionsgebiets der Funktion definiert. Der Abschluss einer Menge S ist die kleinste abgeschlossene Menge, die S enthält. Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definition 4.19 (Abschluss)**.** *Wir definieren den Abschluss von S als den Durchschnitt aller abgeschlossenen Obermengen von S* [10]*,*

$$\overline{S} := \operatorname{clos}(S) := \bigcap_{A\subseteq\mathbb{R}^n \text{ abgeschlossen: } S\subseteq A} A.^{11} \tag{4.8}$$

Bemerkungen 4.20. [Abschluss]

(i) Der Abschluss von S enthält S (als Teilmenge),

$$\overline{S} \supseteq S.$$

(ii) Der Abschluss einer Menge S ist ein Durchschnitt abgeschlossener Mengen. Gemäss Korollar 4.17(iii) ist der Abschluss von S daher abgeschlossen. Daraus folgt, dass der Abschluss von S die *kleinste* abgeschlossene Menge ist, die S enthält.

[10] Eine Obermenge von S ist eine Menge, die S als Teilmenge enthält.
[11] Die Notation clos steht für *closure*.

(iii) Eine Menge ist genau dann abgeschlossen, wenn sie mit ihrem Abschluss übereinstimmt.

(iv) In [Stra, Definition 4.1.1., S.51] wird der Abschluss auf eine andere Weise, mittels Folgen, definiert. Diese Definition ist äquivalent zu Definition 4.19. Siehe [Stra, Satz 4.3.3, S. 61].

Beispiel. [Abschluss] **Behauptung:** Für $S :=]0,1]$ haben wir $\overline{S} = [0,1]$.

Beweis: $A := [0,1]$ ist eine abgeschlossene Obermenge von S. Gemäss (4.8) gilt daher

$$\overline{S} \subseteq [0,1] \tag{4.9}$$

Jeder offene Ball um $x_0 := 0$ schneidet die Menge S. Jede offene Menge, die 0 enthält, schneidet daher die Menge S. Sei jetzt A eine abgeschlossene Obermenge von S. Dann ist $A^{\complement} = \mathbb{R} \setminus A$ offen. Da $A^{\complement}$ die Menge S nicht schneidet, folgt, dass $0 \notin A^{\complement}$, d. h. $0 \in A$. Da $]0,1] = S \subseteq A$, folgt daraus, dass $[0,1] \subseteq A$. Es gilt daher

$$[0,1] \subseteq \bigcap_{A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ abgeschlossen: } S \subseteq A} A = \overline{S}.$$

Mit Hilfe von (4.9) folgt daraus, dass $\overline{S} = [0,1]$.

Wir erinnern uns an Definition 1.18 (offener und abgeschlossener Ball, Sphäre).

Beispiel 4.21. [Abschluss] Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $r \in [0,\infty] = [0,\infty[\cup \{\infty\}$. Der Abschluss des offenen Balles ist der abgeschlossene Ball, d. h.

$$\overline{B_r^n(x_0)} = \overline{B}_r^n(x_0).$$

Siehe [Stra, Beispiel 4.1.2 iii), S. 52].

Folgender Satz beschreibt das Innere einer Menge mittels offener Mengen und den Abschluss mittels Folgen.

Satz 4.22 (Charakterisierung des Inneren und des Abschlusses)**.** *Für jede Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt:*

(i) Das Innere von S ist die Vereinigung aller offenen Teilmengen von S,

$$\operatorname{Int} S = \overset{\circ}{S} = \bigcup_{U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen: } U \subseteq S} U.$$

(ii) Der Abschluss *von S ist gegeben durch*

$$\overline{S} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \exists (x_k)_{k \in \mathbb{N}_0} : \quad \text{Folge in } S : (x_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \to x \right\}.$$

Beweis von Satz 4.22: (i) folgt aus Definition 4.12 (innerer Punkt, Offenheit).

(ii): [Stra, Satz 4.3.3, S. 61] □

Bemerkungen.
- Gemäss Satz 4.22(i) ist das Innere einer Menge S eine Vereinigung offener Mengen. Gemäss Satz 4.14(iii) ist das Innere von S daher offen. Wegen Satz 4.22(i) ist das Innere von S die *grösste* offene Menge U, die in S enthalten ist.
- Eine Menge ist genau dann offen, wenn sie mit ihrem Innern übereinstimmt.

Im Integralsatz von Gauß, den wir in Analysis 2 behandeln werden, kommt ein Integral über den Rand eines Gebietes vor. Anschaulich ist der Rand die Begrenzung des Gebietes. Die nächste Definition macht diesen Begriff präzise. Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definition 4.23 ((topologischer) Rand)**.** *Wir definieren ∂S, den* (topologischen) Rand von S *als das Komplement des Inneren von S im Abschluss von S,*

$$\partial S := \overline{S} \setminus \operatorname{Int} S.$$

Bemerkungen. Das Zeichen ∂ ist ein geschwungenes d. Es wird "del" ausgesprochen, in Anlehnung an den griechischen Buchstaben δ (delta). Es steht für den letzten Buchstaben im Wort *Rand*.

Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $r \in]0, \infty[$. Wir definieren $S_r^{n-1}(x_0)$, die Sphäre mit Mittelpunkt x_0 und Radius r, als die Menge aller Punkte in $\mathbb{R}^n$, die Abstand r zu x_0 haben,

$$S_r^{n-1}(x_0) := \big\{ x \in \mathbb{R}^n \,\big|\, \|x - x_0\| = r \big\}. \tag{4.10}$$

Beispiel. [Rand] Der Rand des offenen Balles ist die Sphäre, genauer

$$\partial B_r^n(x_0) = \overline{B}_r^n(x_0) \setminus B_r^n(x_0) = S_r^{n-1}(x_0).$$

Das folgt aus Definition 4.23 und den Beispielen 4.21 und 4.13(i).

Der Rand des *abgeschlossenen* Balles ist ebenfalls die Sphäre, genauer

$$\partial \overline{B}_r^n(x_0) = \overline{B}_r^n(x_0) \setminus B_r^n(x_0) = S_r^{n-1}(x_0). \tag{4.11}$$

Aus der Definition 4.19 (Abschluss) und Beispiel 4.16(ii) folgt nämlich, dass $\overline{B}_r^n(x_0)$ sein eigener Abschluss ist. Mittels Beispiel 4.13(iii) folgt daraus (4.11).

Bemerkung. Der Rand einer Menge S ist abgeschlossen, da

$$\partial S = \overline{S} \setminus \operatorname{Int} S = \overline{S} \cap (\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{Int} S)$$

und gemäss Korollar 4.17(iii) die rechte Seite abgeschlossen ist.

Folgender Satz charakterisiert den Rand einer Menge.

Satz 4.24 (Charakterisierung des Randes)**.** *Der Rand einer Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die Menge aller Punkte x, für die jeder Ball um x sowohl S als auch das Komplement von S schneidet, also*

$$\partial S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \forall r \in]0, \infty[\colon\ B_r^n(x) \cap S \neq \emptyset \neq B_r^n(x) \setminus S \right\}.$$

Beweis: [Stra, Satz 4.3.4, S. 62].

Eine Funktion konvergiert an einer Stelle x_0 gegen einen Wert y_0, falls ihre Werte sich immer mehr y_0 nähern, wenn sich ihr Argument der Stelle x_0 nähert. Um das zu präzisieren, betrachten wir $n, p \in \mathbb{N}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^p$, $x_0 \in \overline{X}$, $f : X \to Y$ und $y_0 \in \mathbb{R}^p$.

Definition 4.25 (Konvergenz und Grenzwert einer Funktion)**.** *Wir sagen, dass die Funktion f* an der Stelle x_0 [12] gegen y_0 konvergiert *g. d. w.*

$$\forall \varepsilon \in]0, \infty[\exists \delta \in]0, \infty[\forall x \in X : \|x - x_0\| \leq \delta \Rightarrow \left\| f(x) - y_0 \right\| \leq \varepsilon. \tag{4.12}$$

In diesem Fall schreiben wir

$$f \to y_0 \quad \textit{in } x_0 \qquad \textit{oder} \qquad f(x) \to y_0 \quad (x \to x_0),$$

nennen wir y_0 den Grenzwert von f an der Stelle x_0 *und definieren wir*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) := \lim_{x_0} f := y_0.$$

Bemerkungen 4.26. [Konvergenz und Grenzwert einer Funktion]

(i) Der Grenzwert von f an der Stelle x_0 ist wohldefiniert, d. h., eindeutig (falls er existiert). Wir verwenden hier, dass x_0 im Abschluss des Definitionsbereichs X von f liegt. Falls das nicht der Fall ist, ist die Bedingung (4.12) für jedes y_0 erfüllt, d. h. f "konvergiert in x_0 gegen jeden Punkt y_0". (In diesem Fall haben wir Konvergenz in x_0 allerdings gar nicht definiert.)

(ii) Falls $x_0 \in X$ und f an der Stelle x_0 konvergiert, dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

(iii) Falls $x_0 \in X$, dann konvergiert f an der Stelle x_0 g. d. w. f in x_0 stetig ist.

[12] oder *im Punkt* x_0 oder schlichtweg *in* x_0

(iv) Die Bedingungen (4.12) und (4.1) sind ähnlich. Der Unterschied liegt darin, dass in (4.12) y_0 dort steht, wo in (4.1) $f(x_0)$ steht. f braucht im Punkt x_0 nicht definiert zu sein, um über *Konvergenz* von f in x_0 sprechen zu können. Im Gegensatz dazu muss f in x_0 definiert sein, um über *Stetigkeit* von f in x_0 sprechen zu können.

(v) Definition 4.25 (Konvergenz einer Funktion an einer Stelle) und Definition 3.13 (Konvergenz einer Folge) sind ähnlich. δ und x spielen dabei die Rollen von n_0 und n.

(vi) In [Stra, Definition 4.1.2., S. 52] wird der Grenzwert einer Funktion an einer Stelle anders definiert. Diese Definition und der Begriff eines Grenzwertes wie in Definition 4.25 sind äquivalent.

(vii) In gewissen Büchern wird in der Definition der Konvergenz, also in (4.12), angenommen, dass $x \neq x_0$. Diese Definition ist nicht äquivalent mit Definition 4.25. Ein Vorteil der Definition 4.25 ist, dass damit die Substitutionsregel für Grenzwerte gilt. (Siehe [DK04a, Theorem 1.4.2, p. 17])

Beispiele 4.27. [Konvergenz und Grenzwert einer Funktion]

(i) Seien $n, p \in \mathbb{N}$, $\widetilde{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, $X \subseteq \widetilde{X}$, $Y \subseteq \mathbb{R}^p$, $\widetilde{f} : \widetilde{X} \to Y$ und $x_0 \in \overline{X} \cap \widetilde{X}$. Wir definieren $f := \widetilde{f}|_X : X \to Y$. Falls $\widetilde{f}$ im Punkt x_0 stetig ist, dann konvergiert f an der Stelle x_0 gegen $y_0 := \widetilde{f}(x_0)$.

Beispiel: $\widetilde{X} := \mathbb{R}$, $X := \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $Y := \mathbb{R}$, $\widetilde{f} := \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, $x_0 := 0$. In diesem Fall ist f gegeben durch

$$f := \mathrm{id}_{\mathbb{R}}|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x.$$

Die Funktion $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ ist stetig, da sie ein Polynom ist. Daher konvergiert f an der Stelle $x_0 := 0$ gegen $y_0 := \mathrm{id}_{\mathbb{R}}(0) = 0$.

Bemerkung: Die Funktion f ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht definiert. Daher ist es nicht sinnvoll, über Stetigkeit von f an dieser Stelle zu sprechen.

(ii) Wir betrachten

$$f :]0, 1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{1}{n}, \text{ falls } x \in \left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right], \ n \in \mathbb{N}$$

Diese Funktion konvergiert im Punkt $x_0 := 0$ gegen $y_0 := 0$. (Überprüfen Sie das!)

(iii) Wir betrachten

$$f := \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{e^x - 1}{x}.$$

Diese Funktion konvergiert an der Stelle $x_0 := 0$ gegen $y_0 := 1$, d. h.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Das folgt aus Beispiel 5.3(iii) und der Tatsache $e^0 = \exp(0) = 1$.

(iv) Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{1}{x}.$$

Diese Funktion konvergiert an der Stelle $x_0 := 0$ nicht.

Bemerkung 4.28. [Divergenz einer Funktion in einem Punkt] Seien $n, p \in \mathbb{N}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^p$, $x_0 \in \overline{X}$ und $f : X \to Y$. Die Funktion *divergiert im Punkt* x_0, d. h. sie konvergiert im Punkt x_0 *nicht*, g. d. w.

$$\forall y_0 \in Y \exists \varepsilon \in]0, \infty[\forall \delta \in]0, \infty[\exists x \in X : \|x - x_0\| \leq \delta \wedge \|f(x) - y_0\| > \varepsilon. \qquad (4.13)$$

(Siehe Übungsserie 7, Konvergenz und Grenzwert einer Funktion an einer Stelle.)

Ein zentraler Begriff der Topologie ist *Kompaktheit*. Dieser Begriff ist zum Beispiel darum wichtig, weil jede auf einer kompakten nicht leeren Menge definierte stetige Funktion ein Maximum besitzt. Um den Begriff definieren zu können, benötigen wir Folgendes.

Definition 4.29 (Beschränktheit)**.** *Eine Teilmenge von* $\mathbb{R}^n$ *heisst* beschränkt *g. d. w. sie in einem abgeschlossenen Ball enthalten ist, der nicht ganz* $\mathbb{R}^n$ *ist.*

Definition 4.30 (Kompaktheit)**.** *Eine Teilmenge von* $\mathbb{R}^n$ *heisst* kompakt *g. d. w. sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Bemerkung. [Kompaktheit] In [Stra, Definition 4.2.2., S. 57] wird Kompaktheit anders definiert. Gemäss [Stra, Satz 4.3.6., S. 63] sind diese Definition und Definition 4.30 äquivalent.

Beispiele. [(Nicht-)Kompaktheit]

- Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $r \in]0, \infty[$. Der abgeschlossene Ball $\overline{B}_r^n(x_0)$ ist gemäss Beispiel 4.16(ii) abgeschlossen. Da er auch beschränkt ist, ist er kompakt. Insbesondere ist jedes abgeschlossene und beschränkte Intervall [13] kompakt.

[13] Das ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ der Form $I = [a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \leq b$.

- Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Das offene Intervall $]a, b[$ und die halb-offenen Intervalle $[a, b[$ und $]a, b]$ sind nicht kompakt, da sie gemäss Beispiel 4.16(iii) nicht abgeschlossen sind.

- Die Menge $\mathbb{R}^n$ ist nicht kompakt, da sie nicht beschränkt ist.

Für weitere (Nicht-)Beispiele siehe [Stra, Beispiel 4.2.2. i)].

Jede auf einer kompakten nicht leeren Menge definierte stetige Funktion besitzt ein Maximum. Das folgt aus dem nächsten Satz.

Satz 4.31 (Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung)**.** *Das Bild einer kompakten Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ unter einer stetigen Abbildung $f : K \to \mathbb{R}^p$ ist kompakt.*

Beweis: [Stra, Satz 4.2.3, S. 58].

Sei X eine Menge und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Ein Punkt $x_+ \in X$ heisst *Maximalstelle von f* g. d. w.

$$f(x_+) \geq f(x), \qquad \forall x \in X. \tag{4.14}$$

Falls f eine Maximalstelle x_+ besitzt, dann definieren wir das *Maximum von f* als

$$\max f := \max_X f := \max_{x \in X} f(x) := f(x_+).$$

In diesem Fall sagen wir auch, dass f ein *Maximum besitzt.*

Bemerkung. Das Maximum ist wohldefiniert, d. h., es hängt nicht von der Maximalstelle ab.

Analog definieren wir den Begriff einer *Minimalstelle* und die Sprechweise *ein Minimum besitzen.*

Beispiel 4.32. [Maximalstelle, Maximum einer Funktion] Wir betrachten die Funktion

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x = 0, \\ x, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Punkte 0 und 1 sind Maximalstellen von f. Es gilt

$$\max f = f(0) = f(1) = 1.$$

Die Funktion f besitzt kein Minimum.

Bemerkungen.

- Die Funktion f kann mehrere Maximalstellen besitzen. Das ist im Beispiel 4.32 der Fall. f besitzt jedoch höchstens *ein* Maximum. Im Beispiel 4.32 ist dieses Maximum gleich 1.

- Es gilt
$$\max f = \max \operatorname{im}(f).$$

- Anstelle von "f besitzt ein Maximum" sagen wir auch "f nimmt ihr Maximum an" (und zwar im Punkt x_+ wie oben). Bei dieser Sprechweise sind wir uns allerdings bewusst, dass dieses Maximum nur existiert, wenn es angenommen wird.

- Das Supremum $\sup A$ einer Teilmenge A von $\mathbb{R}$ ist die kleinste obere Schranke von A. (Siehe Definition 2.17.) Das Supremum existiert immer.[14] Sei X eine Menge und $f : X \to \mathbb{R}$. Wir definieren das Supremum von f als das Supremum des Bildes von f, d. h.
$$\sup f := \sup_{x \in X} f(x) := \sup \operatorname{im}(f). \tag{4.15}$$
Die Funktion f besitzt genau dann ein Maximum, wenn sie ihr Supremum annimmt, d. h., wenn es einen Punkt $x_+ \in X$ gibt so, dass $f(x_+) = \sup f$. In diesem Fall ist das Supremum von f gleich dem Maximum von f,
$$\sup f = \max f.$$

- Analoge Bemerkungen gelten für das Infimum einer Teilmenge von $\mathbb{R}$ und einer Funktion.

Korollar 4.33 (stetige Funktion auf kompakter Menge, Maximum, Minimum)**.** *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und nicht leer. Jede stetige reellwertige Funktion f auf K besitzt ein Maximum und ein Minimum.*

Um dieses Korollar zu beweisen, benötigen wir folgendes Lemma.

Lemma 4.34. *Für jede nicht leere kompakte Teilmenge Q von $\mathbb{R}$ gilt:*
$$\sup Q,\ \inf Q \ \in Q.$$

Beweis: S. 148.

[14] Falls A leer ist, dann verwenden wir die Konvention $\sup A = -\infty$. Falls A nach oben unbeschränkt ist, dann verwenden wir die Konvention $\sup A = \infty$.

Beweis des Korollars 4.33: Da K nicht leer ist, ist $Q := \mathrm{im}(f) = f(K)$ nicht leer. Gemäss Satz 4.31 ist Q kompakt. Gemäss Lemma 4.34 gilt daher

$$\sup Q \in Q = \mathrm{im}(f),$$

d. h., es gibt ein $x_+ \in K$ so, dass

$$\sup Q = f(x_+).$$

Da $\sup Q$ eine obere Schranke für Q ist, gilt für jedes $y \in Q$, dass $y \leq \sup Q$. Das bedeutet, dass

$$\forall x \in K : f(x) \leq \sup Q = f(x_+).$$

Daher ist x_+ eine Maximalstelle von f. Die Funktion f besitzt also ein Maximum.

Ein analoges Argument zeigt, dass f ein Minimum besitzt. Das beweist Korollar 4.33. □

Im Beweis des Lemmas 4.34 werden wir folgende Bemerkung verwenden.

Bemerkung 4.35. [obere Schranke für eine abgeschlossene Menge]Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen und $b \in A^{\complement} = \mathbb{R} \setminus A$ eine obere Schranke für A. Dann gibt es eine obere Schranke für A, die (strikt) kleiner als b ist. (Warum?)

Beweis des Lemmas 4.34: Da Q kompakt ist, ist es beschränkt, also nach oben beschränkt. Da Q nicht leer ist, liegt $\sup Q$ daher in $\mathbb{R}$. Da Q kompakt ist, ist es abgeschlossen. Da $\sup Q$ die kleinste obere Schranke für Q ist, folgt daher aus Bemerkung 4.35 mit $A := Q$ und $b := \sup Q$, dass $\sup Q \in Q$.

Ein analoges Argument zeigt, dass $\inf Q \in Q$. Das schliesst den Beweis des Lemmas 4.34 ab. □

Beispiel 4.36. [Maximum einer stetigen Funktion auf einer kompakten Menge]Wir betrachten die Menge

$$K := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1^4 + x_2^4 \leq 1 \right\}$$

und die Funktion

$$f : K \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2.$$

Die Menge K ist abgeschlossen. (Siehe Beispiel 4.39(iii) unten.) Sie ist beschränkt, da sie im Ball $\overline{B}^2_{\sqrt{2}}(0)$ enthalten ist. (Überprüfen Sie das!)Gemäss Definition 4.30 ist K daher kompakt.

Die Menge K ist nicht leer, da $x := 0$ in K liegt. Gemäss Beispiel 4.3(ii) ist f stetig. Gemäss Satz 4.33 besitzt f daher ein Maximum und ein Minimum.

Bemerkungen. [Voraussetzungen des Korollars]

- Ohne die Voraussetzung, dass K kompakt ist, ist die Aussage des Korollars 4.33 falsch. Ein Gegenbeispiel ist dann gegeben durch $f : [0,1[\to \mathbb{R}$, $f(x) := x$. Diese Funktion besitzt kein Maximum. Dieses Beispiel steht nicht im Widerspruch zu Korollar 4.33, da der Definitionsbereich von f nicht kompakt ist. (Warum?)
- Ohne die Voraussetzung, dass f stetig ist, ist die Aussage des Korollars 4.33 falsch. Ein Gegenbeispiel ist dann gegeben durch

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x = 0, \\ x, & \text{sonst.} \end{cases}$$

  Diese Funktion besitzt kein Minimum. Dieses Beispiel steht nicht im Widerspruch zu Korollar 4.33, da f nicht stetig ist.

4.3 Topologische Charakterisierungen der Stetigkeit

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96b, 2.2] und [Stra, 4.5]. In diesem Abschnitt charakterisieren wir Stetigkeit einer Funktion mit Hilfe von offenen und abgeschlossenen Mengen. Wir charakterisieren auch Stetigkeit an einer Stelle. Dazu brauchen wir den Begriff einer Umgebung eines Punktes.

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definition 4.37 (relative Offen- und Abgeschlossenheit)**.** *(i) Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heisst* relativ offen in X *(oder schlichtweg* offen in X *oder* relativ offen*) g. d. w. es eine offene Teilmenge $\widetilde{U}$ von $\mathbb{R}^n$ gibt so, dass $U = \widetilde{U} \cap X$.*

(ii) Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heisst relativ abgeschlossen in X [15] *g. d. w. es eine abgeschlossene Teilmenge $\widetilde{A}$ von $\mathbb{R}^n$ gibt so, dass $A = \widetilde{A} \cap X$.*

Beispiele.
- Sei $X := [0,2[$. Die Menge $U := [0,1[$ ist (relativ) offen in X. (Wie können wir $\widetilde{U}$ wählen?) Die Menge $A := [1,2[$ ist (relativ) abgeschlossen in X. (Wie können wir $\widetilde{A}$ wählen?)

Seien $n, p \in \mathbb{N}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^p$ und $f : X \to Y$.

Satz 4.38 (Charakterisierung von Stetigkeit mittels (relativ) offener und abgeschlossener Mengen)**.** *Folgende Bedingungen sind äquivalent:*

[15] oder schlichtweg *abgeschlossen in X* oder *relativ abgeschlossen*

(a) f ist stetig (in jedem Punkt $x_0 \in X$).

(b) Das Urbild $U = f^{-1}(V)$ jeder relativ offenen Menge $V \subseteq Y$ ist relativ offen (in X).

(c) Das Urbild $A = f^{-1}(B)$ jeder relativ abgeschlossenen Menge $B \subseteq Y$ ist relativ abgeschlossen.

Beweis: [Stra, Satz 4.5.2, S. 67]

Als Anwendung dieses Satzes erhalten wir, dass eine mittels einer strikten Ungleichung definierte Menge offen ist, falls "die Bedingung stetig" ist:

Beispiele 4.39. [Anwendung von Satz 4.38]

(i) **Behauptung:** Die Menge

$$U := \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^5 + x < 1 \right\}$$

ist offen (in $\mathbb{R}$).

Beweis: Wir definieren $X := \mathbb{R}$, $Y := \mathbb{R}$, die Funktion $f : X \to Y$, $f(x) := x^5 + x$ und $V :=]-\infty, 1[$. Diese Funktion ist ein Polynom und daher gemäss Beispiel 4.3(ii) stetig. Es gilt

$$U = f^{-1}(V).$$

Gemäss Beispiel 4.13(ii) ist das Intervall $V =]-\infty, 1[$ offen (in $Y = \mathbb{R}$). Gemäss Satz 4.38 ist die Menge $U = f^{-1}(V)$ daher offen (in $X = \mathbb{R}$).

(ii) **Behauptung:** Die Menge

$$U := \left\{ x \in [0, \infty[\,\middle|\, x^5 + x < 1 \right\}$$

ist offen in $[0, \infty[$.

Beweis: Die Aussage folgt analog zu (i) mit $X := [0, \infty[$.

(iii) Die Menge

$$A := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1^4 + x_2^4 \leq 1 \right\}$$

ist abgeschlossen (in $X := \mathbb{R}^2$).

Beweis: Wir definieren

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x_1^4 + x_2^4, \qquad B :=]-\infty, 1].$$

Es gilt

$$A = f^{-1}(B).$$

Die Funktion f ist polynomial und daher gemäss Beispiel 4.3(ii) stetig. Das Komplement von B ist das offene Intervall $]1, \infty[$, welches gemäss Beispiel 4.13(ii) offen ist (in $\mathbb{R}$). Daher ist die Menge B abgeschlossen. Gemäss Satz 4.38(a)⇒(c) ist die Menge $A = f^{-1}(B)$ daher abgeschlossen.

Bemerkung: Wir haben dieses Beispiel in Beispiel 4.36 verwendet.

Wir charakterisieren jetzt Stetigkeit einer Funktion in einem Punkt mittels Umgebungen. Dafür brauchen wir also den folgenden Begriff. Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $x_0 \in X$.

Definition 4.40 (Umgebung)**.** *Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heisst* Umgebung von x_0 relativ zu X *(oder* in X*) g. d. w. es einen offenen Ball um x_0 gibt, dessen Durchschnitt mit X in U enthalten ist, d. h. es gibt ein $r \in]0, \infty[$ so, dass*

$$B_r^n(x_0) \cap X \subseteq U.$$

Im Fall $X = \mathbb{R}^n$ nennen wir ein solches U auch schlichtweg eine Umgebung von x_0*.*

Beispiele.

- Seien $X := \mathbb{R}$ und $a < x_0 < b$ reelle Zahlen. Die Intervalle $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$ und $[a, b]$ sind Umgebungen von x_0 (in $X = \mathbb{R}$).
- Seien $X := [0, \infty[$. Das Intervall $[0, 1]$ ist eine Umgebung von $x_0 := 0$ in X. Es ist jedoch keine Umgebung von 0 in $\mathbb{R}$.

Seien $n, p \in \mathbb{N}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^p$, $f : X \to Y$ und $x_0 \in X$. Wir definieren Stetigkeit an einer Stelle wie in Definition 4.1.

Satz 4.41 (Charakterisierung von Stetigkeit in einem Punkt mittels und Umgebungen)**.** *Folgende Bedingungen sind äquivalent:*

(a) f ist stetig an der Stelle x_0.

(b) (Umgebungskriterium) Das Urbild jeder Umgebung von $f(x_0)$ in Y unter f ist eine Umgebung von x_0 in X.

Bemerkung. Die Bedingung (b) bedeutet: Für jede Umgebung V von $f(x_0)$ (in Y) ist $U := f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x_0 in X.

Beweis des Satzes 4.41: [Stra, Satz 4.5.1, S. 66].

Beispiele. [Charakterisierung von Stetigkeit in einem Punkt mittels Umgebungen]

- Wir betrachten $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^5 + x$, $x_0 := 1$, $V := [0, 3]$. Die Funktion f ist stetig. Der Punkt $f(x_0) = 2$ ist in der offenen Menge $]0, 3[$ enthalten, die eine Teilmenge von V ist. Die Menge V ist daher eine Umgebung von $f(x_0)$. Aus Satz 4.41(a)→(b) folgt daher, dass $f^{-1}(V) = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^5 + x \in [0, 3]\right\}$ eine Umgebung von $x_0 = 1$ ist.

- Wir betrachten die charakteristische Funktion der Menge $\{0\}$,

  $$\chi_{\{0\}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

  (Siehe Beispiel 4.3(iv).)

  Behauptung: Diese Funktion ist an der Stelle $x_0 := 0$ unstetig.

  Beweis: Das Urbild U der Umgebung $V :=]0, \infty[$ von $\chi_{\{0\}}(0) = 1$ in $Y := \mathbb{R}$ ist keine Umgebung von 0 in $X = \mathbb{R}$. (Was ist $U := f^{-1}(V)$?) Also gilt ¬(b). Das Kontraponierte der Aussage (a)→(b) von Satz 4.41 ist ¬(b)→ ¬(a) Mittels des Modus Ponens folgt ¬(a), d. h. $\chi_{\{0\}}$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ unstetig. Das beweist die Behauptung.

  Bemerkung: Wir haben diese Behauptung schon in Beispiel 4.3(iv) bewiesen.

4.4 Zwischenwertsatz, Stetigkeit der Umkehrfunktion, Logarithmus

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96a, 2.2] und [Stra, 4.6]. Der Zwischenwertsatz besagt, dass eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall jeden Wert annimmt, der zwischen den Werten der Funktion an den Endpunkten des Intervalls liegt. Mit Hilfe dieses Satzes können wir das Bild gewisser Funktionen bestimmen. Wir werden ihn verwenden, um zu zeigen, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ die k-te Potenzfunktion $p_k : [0, \infty[\to [0, \infty[$, $p_k(x) := x^k$, surjektiv ist. Die Funktion $p_k : [0, \infty[\to [0, \infty[$ ist auch injektiv und daher bijektiv.[16] Damit können wir die k-te Wurzelfunktion als die Umkehrfunktion der k-ten Potenzfunktion definieren. Ebenso werden wir den Zwischenwertsatz verwenden, um zu zeigen, dass die reelle Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ surjektiv ist. Diese Funktion ist auch injektiv und daher bijektiv. Damit können wir die Logarithmusfunktion als die Inverse der reellen Exponentialfunktion definieren.

Satz 4.42 (Zwischenwertsatz)**.** *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $a \leq b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig so, dass $f(a) \leq f(b)$, und $y \in \big[f(a), f(b)\big]$. Dann gibt ein $x \in [a, b]$ so, dass $f(x) = y$.*

Beweis: [Stra, Satz 4.6.1., S. 68]

[16] Für k ungerade ist die k-te Potenzfunktion auch eine bijektive Funktion *von* $\mathbb{R}$ *nach* $\mathbb{R}$.

Bemerkungen. [Zwischenwertsatz]

- Im Fall $f(a) > f(b)$ gilt diese Aussage mit "$\big[f(a), f(b)\big]$" ersetzt durch "$\big[f(b), f(a)\big]$".
- Die Voraussetzung $f(a) \leq f(b)$ kann auch erfüllt sein, falls f nicht monoton steigend ist. (Kennen Sie ein Beispiel dafür?)

Beispiele 4.43. [Anwendungen des Zwischenwertsatzes: Quadratwurzel von 2, Bild der Potenzfunktion und der reellen Exponentialfunktion]

(i) (Quadratwurzel aus 2) **Behauptung:** Es gibt eine Zahl $x \in [0, 2]$ so, dass $x^2 = 2$.

Beweis: Wir definieren

$$a := 0, \qquad b := 2, \qquad f : [a, b] = [0, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) := x^2, \qquad y := 2.$$

Gemäss Beispiel 4.3(ii) ist die Funktion f stetig. Es gilt $y \in [0, 4] = \big[f(0), f(2)\big]$. Gemäss Satz 4.42 gibt es daher ein $x \in [0, 2]$ so, dass $x^2 = f(x) = 2$. Das beweist die Behauptung.

Bemerkung: Die Behauptung folgt auch aus Proposition 2.6. (Überprüfen Sie das!)

(ii) (gerade Potenzfunktion) Sei $k \in \mathbb{N}$ gerade. Wir betrachten die k-te Potenzfunktion auf $[0, \infty[$, d. h. die Funktion

$$p_k : [0, \infty[\to \mathbb{R}, \qquad p_k(x) := x^k.$$

Behauptung: Das Bild dieser Funktion ist das abgeschlossene Intervall $[0, \infty[$, d. h.

$$\mathrm{im}(p_k) = p_k([0, \infty[) = [0, \infty[. \tag{4.16}$$

Beweis: Für jedes $x \in [0, \infty[$ gilt $x^k \geq 0$. Daher gilt

$$\mathrm{im}(p_k) \subseteq [0, \infty[.$$

Wir zeigen die umgekehrte Inklusion "$\supseteq$": Sei $y \in [0, \infty[$. Wir definieren $z := \max\{y, 1\} :=$ das Maximum von y und 1. Es gilt

$$\begin{aligned} p_k(0) &= 0 \\ &\leq y \qquad (\text{da } y \in [0, \infty[) \\ &\leq z \qquad (\text{da } z = \max\{y, 1\}) \\ &\leq z^k \qquad (\text{da } z \geq 1) \\ &= p_k(z). \end{aligned}$$

Also gilt $y \in [p_k(0), p_k(z)]$. Gemäss Beispiel 4.3(ii) ist die Funktion p_k stetig. Daher folgt aus Satz 4.42 (Zwischenwertsatz), dass es ein $x \in [0, z]$ gibt so, dass $p_k(x) = y$. Da $[0, z] \subseteq [0, \infty[$, folgt daraus, dass $y \in p_k([0, \infty[) = \mathrm{im}(p_k)$. Daher gilt die Inklusion

$$\mathrm{im}(p_k) \supseteq [0, \infty[.$$

Da auch die Inklusion "$\subseteq$" gilt, folgt daraus, dass $\mathrm{im}(p_k) = [0, \infty[$, d. h. (4.16). Das beweist die Behauptung.

(iii) (ungerade Potenzfunktion) Sei $k \in \mathbb{N}$ ungerade. Wir betrachten die k-te Potenzfunktion auf $\mathbb{R}$, d. h. die Funktion

$$p_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad p_k(x) := x^k.$$

Ein Argument wie in (ii) zeigt, dass $p_k([0, \infty[) = [0, \infty[$. Daraus folgt, dass $p_k(]-\infty, 0]) =]-\infty, 0]$. (Warum?) Daraus folgt, dass das Bild von p_k gegeben ist durch $\mathrm{im}(p_k) = p_k(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

(iv) **Behauptung:** Das Bild der reellen Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist das offene Intervall $]0, \infty[$, d. h.

$$\mathrm{im}(\exp|_{\mathbb{R}}) = \exp(\mathbb{R}) =]0, \infty[. \tag{4.17}$$

Beweis: Wir zeigen "$\subseteq$": Es gilt

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq \frac{x^0}{0!} = 1 > 0, \qquad \forall x \in [0, \infty[. \tag{4.18}$$

Sei jetzt $x \in]-\infty, 0]$. Aus Satz 3.43 (Additionstheorem) folgt, dass

$$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)}.$$

(Warum?) Da $-x \geq 0$, gilt gemäss (4.18), dass $\exp(-x) > 0$. Es folgt, dass $\exp(x) > 0$. Daher gilt

$$\exp(\mathbb{R}) \subseteq]0, \infty[, \tag{4.19}$$

d. h. die Inklusion "$\subseteq$" in (4.17). Wir zeigen die umgekehrte Inklusion $\exp(\mathbb{R}) \supseteq]0, \infty[$: Sei $y \in]0, \infty[$.

Fall $y \geq 1$: Es gilt $y = \frac{y^1}{1!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} = \exp(y)$, also $y \in \big[1, \exp(y)\big]$. Da $1 = \exp(0)$ und $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist, folgt darum aus Satz 4.42 (Zwischenwertsatz), dass es ein $x \in [0, y] \subseteq \mathbb{R}$ gibt so, dass $\exp(x) = y$. Daraus folgt, dass $y \in \exp(\mathbb{R})$.

Fall $y < 1$: Dann gilt

$$\widetilde{y} := \frac{1}{y} > 1.$$

Wie wir soeben gezeigt haben, gibt es daher ein $\widetilde{x} \in \mathbb{R}$ so, dass $\exp(\widetilde{x}) = \widetilde{y}$. Wir definieren $x := -\widetilde{x}$. Wir haben

$$\exp(x) = \exp(-\widetilde{x}) = \frac{1}{\exp(\widetilde{x})} = \frac{1}{\widetilde{y}} = y.$$

Daraus folgt, dass $y \in \exp(\mathbb{R})$.

Also gilt die Inklusion $\exp(\mathbb{R}) \supseteq]0, \infty[$, d. h. die Inklusion "$\supseteq$" in (4.17). Mit Hilfe von (4.19) folgt daraus, dass $\exp(\mathbb{R}) =]0, \infty[$. Das beweist die Behauptung.

Bemerkung: Dieses Beispiel war Teil einer Aufgabe in Übungsserie 2 (Bild, Urbild).

Für weitere Beispiele siehe [Stra, Beispiel 4.6.1., S. 69].

Als nächstes zeigen wir, dass für $k \in \mathbb{N}$ die Potenzfunktion p_k und die reelle Exponentialfunktion injektiv sind. Dazu verwenden wir folgendes Kriterium. Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ und $f : X \to \mathbb{R}$.

Definition 4.44 ((strenge) Monotonie)**.** *(i) Wir nennen f* monoton wachsend *g. d. w. für alle $x, x' \in X$ gilt, dass*

$$x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x').$$

(ii) Wir nennen f streng monoton wachsend *g. d. w. für alle $x, x' \in X$ gilt, dass*

$$x < x' \Rightarrow f(x) < f(x').$$

Bemerkung 4.45. [strenge Monotonie und Injektivität] Falls f streng monoton wachsend ist, dann ist f injektiv. (Überprüfen Sie das!)

Beispiele 4.46. [Potenzfunktion, reelle Exponentialfunktion streng monoton wachsend]

(i) Sei $k \in \mathbb{N}$. Die k-te Potenzfunktion p_k ist auf $[0, \infty[$ streng monoton wachsend. (Das folgt aus der Tatsache, dass $\big(\mathbb{R}, +, \bullet, \leq\big)$ ein geordneter Körper ist, d. h. die Eigenschaften A.i)-iv), M.i)-iv), D), O.i)-iv), K.i),ii) in [Stra, 2.2 Die reellen Zahlen] besitzt.) Daraus folgt, dass p_k für *ungerades* k auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist. (Überprüfen Sie das!) Gemäss Bemerkung 4.45 ist die Funktion p_k daher für gerades k auf $[0, \infty[$ und für ungerades k auf $\mathbb{R}$ injektiv.

(ii) Die reelle Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend. Siehe Übungsserie 8.



Abbildung 4.2: Jost Bürgi, 1552–1632, Schweizer Uhrmacher und Mathematiker.



Abbildung 4.3: John Napier, 1550–1617, schottischer Mathematiker.

Aus den Beispielen 4.46(i) und 4.43(ii) folgt, dass für gerades k die k-te Potenzfunktion eine bijektive Funktion von $[0,\infty[$ nach $[0,\infty[$ ist. Aus den Beispielen 4.46(i) und 4.43(iii) folgt, dass für ungerades k die k-te Potenzfunktion eine bijektive Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist. Die folgende Definition ergibt daher Sinn. Wir erinnern uns an Definition 1.32 (Umkehrfunktion $f^{-1} = f^{\langle -1\rangle}$ einer bijektiven Funktion $f : X \to Y$).

Definition 4.47 (k-te Wurzelfunktion)**.** *Für jede gerade Zahl $k \in \mathbb{N}$ definieren wir die* k-te Wurzelfunktion $\sqrt[k]{}$ *als die Umkehrfunktion der k-ten Potenzfunktion $p_k : [0,\infty[\to [0,\infty[$, d. h.*

$$\sqrt[k]{} := p_k^{-1} : [0,\infty[\to [0,\infty[.$$

Für jede ungerade Zahl $k \in \mathbb{N}$ definieren wir die k-te Wurzelfunktion $\sqrt[k]{}$ *als die Umkehrfunktion der k-ten Potenzfunktion $p_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, d. h.*

$$\sqrt[k]{} := p_k^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Aus den Beispielen 4.46(ii) und 4.43(iv) folgt, dass die Exponentialfunktion eine bijektive Funktion von $\mathbb{R}$ nach $]0,\infty[$ ist. Die folgende Definition ergibt daher Sinn.

Definition 4.48 (Logarithmus)**.** *Wir definieren den (*natürlichen*)* Logarithmus log *als die Umkehrfunktion von* $\exp : \mathbb{R} \to]0,\infty[$*, d. h.*

$$\log := \exp^{-1} :]0,\infty[\to \mathbb{R}.$$

Logarithmen wurden von Jost Bürgi und John Napier erfunden. (Siehe Abbildungen 4.2 und 4.3.)

Bemerkungen. [Logarithmus] In der höheren Mathematik bezeichnet log den natürlichen Logarithmus, also den Logarithmus zur Basis e. Gewisse Autoren verwenden dafür die Schreibweise ln, was für *logarithmus naturalis* steht. Ausserhalb der Mathematik wird log manchmal für den Logarithmus zur Basis 10 gebraucht.

Der Logarithmus verwandelt Multiplikation in Addition. Das ist der Inhalt des folgenden Korollars zu Satz 3.43 (Additionstheorem für Exp).

Korollar 4.49 (Produktregel für den Logarithmus)**.** *Für alle $x, y \in]0, \infty[$ gilt*

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y).$$

Beweis: Übungsserie 8.

Bemerkung. [Produktregel für den Logarithmus, Rechenschieber] Gemäss diesem Korollar gilt

$$xy = \exp\big(\log(x) + \log(y)\big), \qquad \forall x, y \in]0, \infty[$$

Wir können daher das Produkt von x und y berechnen, indem wir in einer Logarithmentafel $\log(x)$ und $\log(y)$ nachschlagen, diese Zahlen addieren und danach in der Logarithmentafel auf der linken Seite die Zahl z suchen, die der Summe $\log(x)+\log(y)$ entspricht. Die Zahl z ist dann das gesuchte Produkt xy.

Diese Methode erspart gegenüber der schriftlichen Multiplikation [17] viel Rechenzeit. Sie bildete die Basis für den Rechenschieber, eines mechanischen Geräts zur Multiplikation zweiere Zahlen. Die Methode kann natürlich auch von einem Computer ausgeführt werden.

Folgende Sätze liefern Kriterien für die Stetigkeit einer Umkehrfunktion. Seien $n, p \in \mathbb{N}$, $K \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^p$ und $f : K \to Y$.

Satz 4.50 (Stetigkeit der Umkehrfunktion bei kompaktem Definitionsbereich)**.** *Wir nehmen an, dass f bijektiv und stetig ist und dass K kompakt ist. Dann ist die inverse Funktion $f^{-1} = f^{\langle -1\rangle} : Y \to K$ ist stetig.*

Beweis des Satzes 4.50: Wir überprüfen die Bedingung (c) des Satzes 4.38 mit f ersetzt durch $f^{\langle -1\rangle}$. Sei $A \subseteq K$ relativ abgeschlossen. Es gilt

$$\left(f^{\langle -1\rangle}\right)^{-1}(A) = f(A). \tag{4.20}$$

(Überprüfen Sie das!)

[17] Das ist die Standardmethode für die Multiplikation, die Sie in der Schule gelernt haben.

Behauptung 1. *A ist kompakt.*

Beweis der Behauptung 1: Gemäss Definition 4.37(ii) gibt es eine abgeschlossene Teilmenge $\widetilde{A}$ von $\mathbb{R}^n$ so, dass $A = \widetilde{A} \cap K$. Da K kompakt ist, ist K abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$. Gemäss Satz 4.17(iii) ist daher der Durchschnitt $K \cap \widetilde{A} = A$ abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$. Da K kompakt ist, ist K beschränkt. Daher ist A beschränkt. Es folgt, dass A kompakt ist. Das beweist Behauptung 1. □

Da f stetig ist, ist wegen Behauptung 1 und Satz 4.31 das Bild $f(A)$ kompakt. Daher ist $f(A)$ abgeschlossen in $\mathbb{R}^p$. Da $f(A) = f(A) \cap Y$, folgt, dass $f(A)$ abgeschlossen in Y ist. Wegen (4.20) folgt daraus, dass das Urbild $\left(f^{\langle -1\rangle}\right)^{-1}(A)$ abgeschlossen in Y ist. Gemäss Satz 4.38(c)⇒(a) ist die inverse Funktion $f^{\langle -1\rangle}$ daher stetig. Das beweist Satz 4.50. □

Beispiel. [Stetigkeit der Umkehrfunktion bei kompaktem Definitionsbereich] Sei $k \in \mathbb{N}$. Wir definieren

$$K := [0,1], \qquad Y := [0,1], \qquad f : [0,1] \to [0,1],\ f(x) := x^k.$$

Gemäss Beispiel 4.46(i) ist diese Funktion injektiv. Aus Satz 4.42 (Zwischenwertsatz) folgt, dass f surjektiv ist. (Überprüfen Sie das!) Die Umkehrfunktion ist die k-te Wurzelfunktion auf dem Intervall $[0,1]$,

$$f^{-1} = \sqrt[k]{} : [0,1] \to [0,1].$$

Gemäss Beispiel 4.3(ii) ist f stetig. Da $Y = [0,1]$ kompakt ist, folgt daher mittels Satz 4.50, dass die Wurzelfunktion $\sqrt[k]{} : [0,1] \to [0,1]$ stetig ist.

Bemerkung 4.51. [Voraussetzung der Kompaktheit des Definitionsbereiches] Ohne die Voraussetzung, dass der Definitionsbereich kompakt ist, ist die Aussage des Satzes 4.50 im Allgemeinen falsch. Um das zu sehen, betrachten wir zum Beispiel

$$X := [-1,0] \cup]1,2], \qquad Y := [-1,1], \qquad f : X \to Y,\ f(x) := \begin{cases} x, & \text{falls } x \leq 0, \\ x-1, & \text{falls } x > 1. \end{cases}$$

Diese Funktion ist bijektiv und stetig. Ihre Umkehrfunktion ist gegeben durch

$$f^{-1} : Y \to X, \qquad f^{-1}(y) = \begin{cases} y, & \text{falls } y \leq 0, \\ y+1, & \text{falls } y > 0. \end{cases}$$

Diese Funktion ist im Punkt $y_0 = 0$ unstetig. Daher ist die Aussage des Satzes 4.50 für f falsch.

Bemerkung: Der Definitionsbereich X von f ist nicht kompakt. (Warum?) Daher ergibt sich kein Widerspruch zu Satz 4.50.

Sei jetzt I ein Intervall. (I darf offen, halb-offen oder abgeschlossen sein. Es darf beschränkt oder unbeschränkt sein.)

Satz 4.52 (Bild, strenge Monotonie und Stetigkeit der Umkehrfunktion einer Funktion von einem Intervall nach $\mathbb{R}$)**.** *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:*

(i) Das Bild von f ist ein Intervall.

(ii) Falls f streng monoton wachsend ist, dann ist die Umkehrfunktion der Funktion $f : I \to \mathrm{im}(f)$ streng monoton wachsend und stetig.

Bemerkung. Unter der Voraussetzung von (ii) ist $f : I \to \mathbb{R}$ gemäss Bemerkung 4.45 injektiv. Daher ist die Funktion $f : I \to \mathrm{im}(f)$ bijektiv. Ihre Umkehrfunktion ist daher wohldefiniert.

[Ende 2025 11 06

to do next time: **Semesterumfrage:**

Studenten **während Vorlesung** Zeit für Ausfüllen der Umfrage geben (in Pause anfangen)

Wichtig zu wissen, was Sie **gut** fanden, damit ich es beibehalte.

Auch wichtig zu wissen, was ich verbessern kann.

2025 11 12:

Ich habe auf Moodle eine Nachricht an die Studenten verschickt:

Teilnahme an der Vorlesung, Umfrage dazu per Clicker

Bilder:

Brouwer

Semesterumfrage:

Vielen **Dank** für Ihre Teilnahme und Ihre wertvollen Rückmeldungen.

Ich richte mich auch an diejenigen von Ihnen, die die **Videoaufnahme** dieser Vorlesung anschauen.

Ich freue mich darüber, dass die Übungen **sehr positiv** und die Vorlesungen im Allgemeinen positiv beurteilt wurden.

Es freut mich auch, dass viele von Ihnen regelmässig die **Serien** bearbeiten. (mw = 4.1)

Kritik + Anregungen von Ihrer Seite:

Einige von Ihnen wünschen sich **weniger Beweise**.

[Wandtafel:] **1. Beweise:**

Ich möchte ein wenig ausholen, da es mir scheint, dass Sie hier ein wichtiges Thema anschneiden.

Es geht in dieser Vorlesung darum, Ihnen ein **theoretisches Grundverständnis** des Teiles der Analysis zu vermitteln, den sie später anwenden werden oder jetzt schon anwenden.

Zu Beginn dieser Vorlesung habe ich einige **Beweise** von Sätzen behandelt.

Es ging mir dabei darum, Ihnen zu vermitteln, was ein Beweis überhaupt ist.

Damit wollte ich Ihnen helfen, Ihr **mathematisches Denken** zu schärfen.

Seither habe ich in der Vorlesung nur noch wenige **Sätze** und einige **Korollare** bewiesen.

Es ging mir bei den Beweisen der Korollare darum, Ihnen zu zeigen, wie die Sätze **angewandt** werden können.

Ich habe viele Beispiele zu Definitionen und Sätzen behandelt.

In diesen Beispielen haben wir jeweils **bewiesen**, dass eine gewisse Eigenschaft erfüllt ist, zum Beispiel, dass eine Folge konvergiert.

Der Zweck davon war, Ihnen zu vermitteln, wie man **mathematisch präzise** zeigt, dass eine gewisse Eigenschaft erfüllt ist.

Es ist eines meiner **Lehrziele**, Ihnen diese mathematische Präzision zu vermitteln.

Bemerkung: Ein anderes meiner **Lehrziele** ist es, Ihnen die Fähigkeit zu vermitteln, Probleme zu lösen.

Dazu lernen Sie in dieser Vorlesung und den Übungen gewisse *Rechenfertigkeiten*.

Diese Fertigkeiten sind ein **Mittel**, um Begriffe zu verstehen.

Sie sind nicht der **endgültige Zweck**.

Sie werden nach Ihrem Studium nämlich vermutlich nichts mehr selber berechnen, da das der Computer für Sie tun wird.

Rein **mechanische**, d. h. **algorithmische** Tätigkeiten hat der Computer nämlich viel besser im Griff als jeder Mensch.

Wenn Sie sich davon überzeugen möchten, dann googlen Sie mal **SageMathCell** und lassen dieses Programm zum Beispiel eine Ableitung oder ein Integral berechnen,

[auf Wandtafel schreiben:]

```
diff(x^2,x)
```

```
integral(exp(x),x)
```

```
https://sagecell.sagemath.org/
```

freie Software

kommerzielle Alternative: **Wolfram alpha**

Heutzutage rechnen Menschen darum fast nichts mehr selber aus.

Es scheint mir daher nicht sinnvoll, meinen Unterricht zu sehr auf **Rechenmethoden** zu fixieren.

Ich erhoffe mir stattdessen, dass Sie **verstehen**, was die Rechnungen **bedeuten**.

Dazu gehört zum Beispiel zu verstehen, was eine **Ableitung** ist.

Das ist der Grund, warum ich in dieser Vorlesung gewisse theoretische Konzepte behandle, wie zum Beispiel den Begriff des **Grenzwertes** einer Funktion an einer Stelle.

Wir werden diesen Begriff diese Woche brauchen, um den Begriff einer Ableitung zu definieren.

Wir fangen diese Woche also mit etwas **Konkreterem** an, nämlich mit dem **Ableiten**.

Einige von Ihnen wünschen sich **mehr praktische Aufgaben** und **Anwendungen**.

[Wandtafel:] **2. Anwendungen in der Elektrotechnik und der Elektrodynamik:**

1. gewöhnliche Differentialgleichung (Anfang von Analysis 2): elektrischer Schwingkreis

2. Satz von Stokes (Ende Analysis 2): faradaysches Induktionsgesetz (Elektrodynamik)

3. Satz von Gauss (Ende Analysis 2): gausssches Gesetz (Elektrostatik)

Anwendung 1 in der ersten Vorlesung erwähnt.

Anwendungen 2 und 3: Anfang nächstes Semester kurz etwas sagen

Stokes + Gauss ausführlich Ende Analysis 2 behandeln

Sie benötigen also noch etwas **Geduld**, was die Anwendungen betrifft.

Ziel Woche: Satz 5.13, Kettenregel

Ziel: Definition 5.1, Tangente an Graphen

Wiederholung:

- relative Offen- und Abgeschlossenheit
- topologische Charakterisierung von Stetigkeit, d. h. mittels (relativ) offener und abgeschlossener Mengen
- Umgebung
- Charakterisierung von Stetigkeit in einem Punkt mittels Umgebungen
- Zwischenwertsatz
- Anwendung: Bild der Potenzfunktion und der reellen Exponentialfunktion
- Umkehrfunktion

  Beispiele: Potenzfunktion $\to$ Wurzelfunktion

  reelle Exponentialfunktion $\to$ Logarithmus
- Stetigkeit der Umkehrfunktion

Heute:

- Stetigkeit der Umkehrfunktion (Invarianz des Gebietes)
- punktweise und gleichmässige Konvergenz
- Potenzreihe konvergiert gleichmässig auf kompakter Kreisscheibe.
- Stetigkeit erhalten unter gleichmässiger Konvergenz
- Anwendung: Durch Potenzreihe definierte Funktion ist auf Konvergenzkreisscheibe stetig.
- Differentialrechnung auf $\mathbb{R}$
- Differenzierbarkeit, Ableitung

$\rfloor$

Bemerkung. [Voraussetzung, dass der Definitionsbereich ein Intervall ist] Ohne die Voraussetzung, dass der Definitionsbereich von f ein Intervall ist, sind beide Aussagen des Satzes 4.52 im Allgemeinen falsch. Um das für Aussage (ii) zu sehen, betrachten wir X, f wie in Bemerkung 4.51. Die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(X) \to X$ ist nicht stetig. Daher ist (ii) für f nicht erfüllt. Daraus ergibt sich kein Widerspruch zu Satz 4.52, da der Definitionsbereich $X = [-1, 0]\cup]1, 2]$ von f kein Intervall ist.

Beweis des Satzes 4.52: (i) folgt aus dem Zwischenwertsatz 4.42.

(ii): [Bla03, (4.24) Hauptsatz über monotone Funktionen, S. 166]. (Siehe auch [Stra, Satz 4.6.2., S. 70, Satz 4.6.3., S. 70].)

Beispiele 4.53. [Monotonie und Stetigkeit der Wurzelfunktion und des Logarithmus]

(i) Sei $k \in \mathbb{N}$ gerade. Die Potenzfunktion $p_k : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $p_k(x) := x^k$, stetig. Da ihr Definitionsbereich $[0, \infty[$ ein Intervall ist, folgt daher aus Satz 4.52(i), dass das Bild von p_k ein Intervall ist. Das hatten wir schon in Beispiel 4.43(ii) herausgefunden. (Das Bild von p_k ist nämlich das Intervall $[0, \infty[$.)

Gemäss Beispiel 4.46(i) ist p_k streng monoton wachsend. Gemäss Satz 4.52(ii) ist die Umkehrfunktion von $p_k : [0, \infty[\to \mathrm{im}(p_k) = [0, \infty[$, also die k-te Wurzelfunktion $\sqrt[k]{} : [0, \infty[\to [0, \infty[$, daher streng monoton wachsend und stetig.

(ii) Ein analoges Argument zeigt, dass für ungerades k die die k-te Wurzelfunktion $\sqrt[k]{} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und stetig ist.

(iii) Ein analoges Argument zeigt, dass die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion, d. h. die Logarithmusfunktion $\log :]0, \infty[\to \mathbb{R}$, streng monoton wachsend und stetig ist. (Überlegen Sie sich das!)

Satz 4.54 (Stetigkeit der Umkehrfunktion bei offenem Definitionsbereich)**.** *Seien $n, p \in \mathbb{N}$ so, dass $n \geq p$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht leer und offen und $f : U \to \mathbb{R}^p$ stetig und injektiv. Dann gilt:*

(i) Es gilt $n = p$.

(ii) Das Bild $\mathrm{im}(f) = f(U)$ ist offen (in $\mathbb{R}^n$).

(iii) Die Umkehrfunktion der Funktion $f : U \to \mathrm{im}(f)$ ist stetig.

Bemerkung. [Stetigkeit der Umkehrfunktion bei offenem Definitionsbereich] Ohne die Voraussetzung $n \geq p$ sind alle drei Aussagen dieses Satzes im Allgemeinen falsch. Ein Gegenbeispiel zu den ersten beiden Aussagen ist dann gegeben durch die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) := (x, 0)$.



Abbildung 4.4: Luitzen Egbertus Jan Brouwer, 1881-1966, niederländischer Mathematiker.

Beweis des Satzes 4.54: ((i),(ii)) folgen aus [Hat02, Theorem 2B.3., p. 172].

(iii): Sei $U' \subseteq U$ eine offene Menge. Es gilt

$$\Big(\big(f : U \to \mathrm{im}(f)\big)^{\langle -1\rangle}\Big)^{-1}(U') = f(U'). \tag{4.21}$$

(Überlegen Sie sich das!) Gemäss (ii) ist $f(U')$ offen in $\mathbb{R}^n$. Daher ist $f(U') = f(U') \cap f(U)$ offen in $f(U)$. Mittels (4.21) und Satz 4.38((b)⇒(a)) folgt daraus, dass $\big(f : U \to \mathrm{im}(f)\big)^{\langle -1\rangle}$ stetig ist. Das beweist (iii). □

Bemerkungen. [Invarianz des Gebietes]

- Teil (ii) des Satzes 4.54 heisst *Invarianz des Gebietes*. Mit *Gebiet* meinen wir hier eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.[18] Teil (ii) des Satzes besagt, dass die Eigenschaft, ein Gebiet zu sein, invariant ist [19] unter jeder injektiven stetigen Funktion mit Zielbereich $\mathbb{R}^n$. Das erklärt den Namen *Invarianz des Gebietes*.
- Satz 4.54 wurde durch Luitzen Egbertus Jan Brouwer bewiesen. Siehe Abbildung 4.4.

Beispiel. [Stetigkeit der Umkehrfunktion bei offenem Definitionsbereich, Polarkoordinaten] Wir definieren die *Polar-Kartesisch-Transformation* als die Abbildung

$$f : U :=]0, \infty[\times]-\pi, \pi[\to \mathbb{R}^2, \qquad f(r, \varphi) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

[18] Normalerweise wird auch vorausgesetzt, dass ein Gebiet nicht leer und zusammenhängend ist. Das braucht hier nicht der Fall zu sein.

[19] d. h. sich nicht ändert

Diese Abbildung ist stetig und injektiv. (Überlegen Sie sich das!) Gemäss Satz 4.54 ist daher das Bild $\mathrm{im}(f) = f(U)$ offen und die Umkehrfunktion der Funktion $f : U \to \mathrm{im}(f)$ stetig.

Wir können diese Tatsachen auch direkt überprüfen. Das Bild von f ist nämlich gegeben durch

$$\mathrm{im}(f) = V := \mathbb{R}^2 \setminus \big(]-\infty, 0] \times \{0\}\big) = \big\{x \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, x_1 > 0 \vee x_2 \neq 0\big\}.$$

(Überlegen Sie sich das!) Diese Menge ist offen.

Die Einschränkung der Umkehrfunktion von $f : U \to V$ auf $V' :=]0, \infty[\times \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f^{-1} : V' \to U, \qquad f^{-1}(x) = \begin{pmatrix} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \arctan\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right) \end{pmatrix}.$$

(arctan bezeichnet den *Arkustangens*, d. h. die Umkehrfunktion des Tangens.) Diese Einschränkung ist stetig. (Überlegen Sie sich das!) Man kann auch auf ähnliche Weise zeigen, dass die Einschränkungen $f^{-1} : \mathbb{R} \times]0, \infty[\to U$ und $f^{-1} : \mathbb{R} \times]-\infty, 0[\to U$ stetig sind. Daher ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : V \to U$ stetig, wie behauptet.

4.5 Punktweise und gleichmässige Konvergenz, Stetigkeit unter gleichmässiger Konvergenz erhalten, Anwendung auf Potenzreihe

Dieser Abschnitt entspricht [Stra, 4.8]. Wir sagen, dass eine Folge von Funktionen *punktweise* konvergiert, falls die Folge der Punkte konvergiert, die wir erhalten, indem wir die Funktionen an einer beliebigen festen Stelle auswerten. Wir sagen, dass eine Folge $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ von Funktionen *gleichmässig* konvergiert, falls es eine Funktion f gibt so, dass das Supremum der Norm des Unterschieds zwischen f_m und f gegen 0 konvergiert für $m \to \infty$. Falls eine Folge von Funktionen gleichmässig konvergiert, dann konvergiert sie punktweise, aber nicht umgekehrt.

Der gleichmässige Limes stetiger Funktionen ist stetig, d. h., Stetigkeit bleibt unter gleichmässigen Limites erhalten. Als Anwendung davon erhalten wir, dass jede durch eine Potenzreihe definierte Funktion auf ihrer Konvergenzkreisscheibe stetig ist.

Seien $n, p \in \mathbb{N}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f, f_m : X \to \mathbb{R}^p$ für $m \in \mathbb{N}_0$.

Definition 4.55 (punktweise Konvergenz)**.** *Wir sagen, dass die Folge* $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ punktweise gegen f konvergiert *g. d. w.*

$$\forall x \in X : (f_m(x))_{m\in\mathbb{N}_0} \to f(x) \text{ [20]} \tag{4.22}$$

Bemerkung. [punktweise Konvergenz]Ausgesprochen lautet Bedingung (4.22):

Für jedes $x \in X$ konvergiert die Folge $(f_m(x))_{m\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{R}^p$ gegen den Punkt $f(x)$.

Diese Art der Konvergenz heisst *punktweise Konvergenz*, da wir *für jeden Punkt* $x \in X$ fordern, dass sein Bild unter der Funktion f_m gegen sein Bild unter f konvergiert. In Quantoren ausgeschrieben lautet diese Bedingung

$$\forall x \in X \forall \varepsilon \in]0,\infty[\exists m_0 \in \mathbb{N}_0 \forall m \in \mathbb{N}_0 : m \geq m_0 \Rightarrow \big\|f_m(x) - f(x)\big\| \leq \varepsilon. \tag{4.23}$$

Der Index m_0 darf hier von x abhängen, da $\forall x$ vor $\exists m_0$ steht.

Beispiel 4.56. [punktweise Konvergenz] Wir betrachten die Folge $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ gegeben durch

$$f_m : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f_m(x) := x^m.$$

Diese Folge konvergiert *punktweise* gegen die Funktion

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 1, \\ 1, & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

(Siehe Übungsserie 9.)

Definition 4.57 (gleichmässige Konvergenz)**.** *Wir sagen, dass die Folge* $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ gleichmässig gegen f konvergiert *g. d. w.*

$$\Big(\sup_{x\in X} \big\|f_m(x) - f(x)\big\|\Big)_{m\in\mathbb{N}_0} \to 0. \tag{4.24}$$

Bemerkungen. [gleichmässige Konvergenz] Ausgesprochen lautet Bedingung (4.24):

Das Supremum über alle $x \in X$ der euklidischen Norm von $f_m(x) - f(x)$ konvergiert gegen 0 für m gegen unendlich. Diese Bedingung ist logisch äquivalent zu folgender Bedingung:

$$\forall \varepsilon \in]0,\infty[\exists m_0 \in \mathbb{N}_0 \forall m \in \mathbb{N}_0 \forall x \in X : m \geq m_0 \Rightarrow \big\|f_m(x) - f(x)\big\| \leq \varepsilon. \tag{4.25}$$

Der Index m_0 darf hier *nicht* von x abhängen, da $\exists m_0$ vor $\forall x$ steht. (Zum Zeitpunkt, in dem wir m_0 einführen, gibt es noch kein x. Der Index m_0 kann daher nicht von x abhängen.) Das bedeutet, dass die Bilder der Punkte $x \in X$ unter den Funktionen f_m *in gleichem Masse* gegen ihre Bilder unter f konvergieren. Das erklärt den Namen *gleichmässige Konvergenz.*

[20] Die Konvergenz auf der rechten Seite ist wie in Definition 3.13 definiert.

Als ein Beispiel konvergiert jede Potenzreihe gleichmässig auf jedem kompakten Ball, der in ihrer Konvergenzkreisscheibe enthalten ist. Das ist der Inhalt folgender Proposition. Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Wir definieren den zur Koeffizientenfolge $c = (c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gehörigen Konvergenzradius wie in Definition 3.27(ii) als

$$\rho := \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}}.$$

Wir nehmen an, dass $\rho > 0$. Sei $r \in]0, \rho[$. Wir definieren die Funktion

$$p : \overline{B}_r^2(0) \to \mathbb{C}, \qquad p(z) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} c_k z^k. \tag{4.26}$$

Gemäss Korollar 3.29(i) ist p wohldefiniert, d. h. der Grenzwert in (4.26) existiert. (Das ist der Grenzwert der zur Koeffizientenfolge $c = (c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gehörigen Potenzreihe im Punkt z.) Sei $m \in \mathbb{N}_0$. Wir definieren das Polynom

$$\widetilde{p}_m : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad \widetilde{p}_m(z) := \sum_{k=0}^{m} c_k z^k.$$

Bemerkung. [Potenzreihe als Folge von Polynomen] Wir können die Potenzreihe $z \mapsto (\sum_{k=0}^{m} c_k z^m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ mit der Folge von Polynomen $(\widetilde{p}_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ identifizieren.

Wir definieren p_m als die Einschränkung

$$p_m := \widetilde{p}_m\big|_{\overline{B}_r^2(0)}. \tag{4.27}$$

Proposition 4.58 (Potenzreihe konvergiert gleichmässig auf kompaktem Ball)**.** *Die Folge $(p_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert gleichmässig gegen p.*

Beweis der Proposition 4.58: Wir überprüfen die Bedingung (4.25) mit $f_m := p_m$ und $f := p$: Sei $\varepsilon \in]0, \infty[$. Wir wählen $s \in (r, \rho)$. Da $s < \rho$, konvergiert gemäss Beispiel 3.39 die zu $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gehörige Potenzreihe in s absolut, d. h. der Grenzwert $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| s^k := \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} |c_k| s^k$ existiert und ist kleiner ∞. Da $\frac{r}{s} < 1$, gibt es daher ein $m_0 \in \mathbb{N}_0$ so, dass

$$\left(\frac{r}{s}\right)^{m_0} \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| s^k \le \varepsilon. \tag{4.28}$$

(Warum?) Sei $m \in \mathbb{N}_0$ so, dass $m \geq m_0$, und $z \in \overline{B}_r^2(0)$. Sei $\ell \in \mathbb{N}_0$ so, dass $\ell \geq m$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=m+1}^{\ell} c_k z^k \right| &\leq \sum_{k=m+1}^{\ell} \left| c_k z^k \right| \qquad \text{(Dreiecksungleichung)} \\
&\leq \sum_{k=m+1}^{\ell} |c_k| r^k \qquad \text{(da } |ww'| = |w||w'| \text{ und } |z| \leq r\text{)} \\
&\leq \sum_{k=m+1}^{\ell} |c_k| r^{m_0} s^{k-m_0} \qquad \text{(da } r < s \text{ und } k \geq m+1 > m_0\text{)} \\
&\leq \varepsilon \qquad \text{(wegen (4.28) und Satz 3.8(iv)).} \qquad (4.29)
\end{aligned}$$

Es gilt $p(z) - p_m(z) = \sum_{k=m+1}^{\infty} c_k z^k = \lim_{\ell \to \infty} \sum_{k=m+1}^{\ell} c_k z^k$. Mittels (4.29) und Satz 3.8(iv) folgt daraus, dass

$$\left| p(z) - p_m(z) \right| \leq \varepsilon.$$

Daher ist Bedingung (4.25) erfüllt, d. h. $(p_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert gleichmässig gegen p. Das beweist die Behauptung. □

Bemerkungen 4.59. [gleichmässige Konvergenz impliziert punktweise Konvergenz]

(i) Mit *Quantifizierung* meinen wir einen Ausdruck der Form $\forall a \in A$ oder $\exists a \in A$. Die Bedingungen (4.23) und (4.25) unterscheiden sich dadurch, dass der Ausdruck $\forall x \in X$ in (4.23) den Anfang der Kette von Quantifizierungen bildet und in (4.25) das Ende der Kette von Quantifizierungen bildet. In (4.23) darf m_0 von x abhängen, aber in (4.25) nicht.

(ii) Falls die Funktionenfolge $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ gleichmässig gegen f konvergiert, dann konvergiert sie punktweise gegen f. Das bedeutet, dass die Bedingung (4.25) die Bedingung (4.23) impliziert. Das folgt aus folgenden Tatsachen:

(a) (Vertauschen von Quantoren gleichen Typs) Es gibt zwei Typen von Quantoren: Allquantoren und Existenzquantoren. Wenn wir Quantoren gleichen Typs vertauschen erhalten wir logisch äquivalente Aussagen. Das bedeutet Folgendes: Sei $P(a, b)$ eine Aussageform in den Variablen a, b. Es gilt

$$\forall a \forall b \, P(a,b) \equiv \forall b \forall a \, P(a,b), \qquad \exists a \exists b \, P(a,b) \equiv \exists b \exists a \, P(a,b).$$

($\equiv$ bedeutet logische Äquivalenz.)

(b) (Nach-Links-Ziehen einer Allquantifizierung) Wenn wir eine Allquantifizierung über eine Existenzquantifizierung hinweg nach *links* ziehen, erhalten wir eine (nicht strikt) schwächere Aussage. Das bedeutet Folgendes: Sei $P(a,b)$ eine Aussageform in den Variablen a, b. Aus $\exists a \forall b : P(a,b)$ folgt $\forall b \exists a : P(a,b)$. Ausgesprochen bedeutet das:
Falls es ein a_0 gibt so, dass für jedes b die Bedingung $P(a_0, b)$ erfüllt ist, dann gibt es für jedes b ein a so, dass $P(a,b)$ erfüllt ist.
Wir können nämlich $a := a_0$ nehmen.[21]

Wir erhalten (4.23) aus (4.25), indem wir $\forall x \in X$ über alle anderen Quantifizierungen hinweg nach links ziehen. Gemäss (a) und (b) folgt (4.23) (punktweise Konvergenz) daher aus (4.25) (gleichmässige Konvergenz).

Wenn wir eine Allquantifizierung über eine Existenzquantifizierung hinweg nach *rechts* ziehen, erhalten wir eine (nicht strikt) *stärkere* Aussage. Diese braucht nicht mehr wahr zu sein, auch wenn die ursprüngliche Aussage wahr ist. Siehe Beispiel 1.20((iii),(iv)). Wie steht es hierbei mit (4.23) und (4.25)?

Frage. *Gilt die Umkehrung von Bemerkung 4.59(ii), d. h., impliziert punktweise Konvergenz gleichmässige Konvergenz?*

Das nächste Beispiel beantwortet diese Frage negativ.

Beispiel 4.60. [punktweise konvergente, nicht gleichmässig konvergente Funktionenfolge] Wir betrachten die Funktionenfolge $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ aus Beispiel 4.56.

Behauptung: Diese Folge konvergiert *nicht gleichmässig*, d. h. für jedes $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist die folgende Bedingung erfüllt:

$$\exists \varepsilon \in]0,\infty[\forall m_0 \in \mathbb{N}_0 \exists m \in \mathbb{N}_0 \exists x \in [0,1] : m \geq m_0 \wedge \big|f_m(x) - f(x)\big| > \varepsilon. \tag{4.30}$$

Beweis: Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Fall: $f = 0$ auf $[0,1[$: Wir wählen $\varepsilon \in]0,1[$. Sei $m_0 \in \mathbb{N}_0$. Wir definieren $m := m_0$. Da f_m im Punkt 1 stetig ist, gibt es ein $x \in]0,1[$ so, dass

$$\big|f_m(1) - f_m(x)\big| < 1 - \varepsilon. \tag{4.31}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \big|f_m(x) - f(x)\big| &= |f_m(x)| \qquad (\text{da } f(x) = 0) \\ &\geq 1 - \big|1 - f_m(x)\big| \qquad (\text{wegen der Dreiecksungleichung}) \\ &> \varepsilon \qquad (\text{wegen } 1 = f_m(1) \text{ und } (4.31)). \end{aligned}$$

[21] Es war hier praktisch, das erste a in a_0 umzubenennen. Gemäss dem Goethe-Prinzip (Prinzip 1.23) ist das erlaubt.

Also ist die Bedingung (4.30) erfüllt.

Fall: Es gibt ein $x \in [0,1[$ so, dass $f(x) \neq 0$: Wir wählen ein solches x. Wir wählen $\varepsilon \in \left]0, |f(x)|\right[$. Sei $m_0 \in \mathbb{N}_0$. Es gibt ein $m \in \mathbb{N}_0$ so, dass $m \geq m_0$ und

$$|f_m(x)| = x^m < |f(x)| - \varepsilon. \tag{4.32}$$

(Warum?) Wegen der Dreiecksungleichung gilt

$$\big|f(x) - f_m(x)\big| \geq |f(x)| - |f_m(x)| > \varepsilon,$$

wobei wir in der letzten Ungleichheit (4.32) verwendet haben. Also ist die Bedingung (4.30) erfüllt.

Da die obigen Fälle alle Möglichkeiten abdecken, ist für jedes $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ die Bedingung (4.30) erfüllt. Das bedeutet, dass die Folge $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ *nicht gleichmässig* konvergiert. Das beweist die Behauptung.

Stetigkeit bleibt unter gleichmässiger Konvergenz erhalten. Das ist die Aussage des folgenden Satzes. Seien $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : X \to \mathbb{R}^p$ und $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von Funktionen von X nach $\mathbb{R}^p$.

Satz 4.61 (Stetigkeit erhalten unter gleichmässiger Konvergenz)**.** *Wir nehmen an, dass für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ die Funktion f_m stetig ist, und dass die Folge $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ gleichmässig gegen f konvergiert. Dann ist f stetig.*

Beweis: [Stra, Satz 4.8.1., S. 76]

Bemerkung. Die Aussage dieses Satzes mit "gleichmässig" ersetzt durch "punktweise" ist falsch, d. h. es gibt eine punktweise konvergente Folge stetiger Funktionen, deren Limes *unstetig* ist. Ein Beispiel dafür ist die Folge $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ aus Beispiel 4.56.

Gemäss Beispiel 4.60 konvergiert diese Folge *nicht* gleichmässig. Es ergibt sich daher kein Widerspruch zu Satz 4.61.

Als eine Anwendung der Proposition 4.58 und des Satzes 4.61 erhalten wir, dass jede durch eine Potenzreihe definierte Funktion auf ihrer Konvergenzkreisscheibe stetig ist. Das ist der Inhalt des folgenden Korollars. Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Wir schreiben ρ für den zugehörigen Konvergenzradius. Wir definieren die Funktion

$$f : B^2_\rho(0) \to \mathbb{C}, \qquad f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} c_k z^k.$$

Korollar 4.62 (durch Potenzreihe definierte Funktion auf Konvergenzkreisscheibe stetig)**.** *Die Funktion f ist stetig.*

Beweis des Korollars 4.62: Sei $r \in]0, \rho[$. Wir definieren p, p_m wie in (4.26,4.27). Sei $m \in \mathbb{N}_0$. Da p_m die Einschränkung eines Polynoms ist, ist diese Funktion gemäss Beispiel 4.3(iii) stetig. Aus Proposition 4.58 und Satz 4.61 folgt daher, dass p stetig ist. Die Funktion p ist die Einschränkung von f auf $\overline{B}_r^2(0)$. Es folgt, dass f stetig ist. (Wir verwenden hier, dass $r \in]0, \rho[$ beliebig ist.) Das beweist Korollar 4.62. □

Beispiel. [Exponentialfunktion, (Ko-)Sinus stetig] Gemäss Definition 3.25, Definition 3.48 und Korollar 4.62 sind die Funktionen $\exp, \mathrm{Cos}, \mathrm{Sin} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig.

Kapitel 5

Differentialrechnung auf $\mathbb{R}$

Dieses Kapitel entspricht [Bla96a, 2.5, 3.1, 3.2, 3.3, 3.4] und [Stra, Kapitel 5 Differentialrechnung auf $\mathbb{R}$]. Intuitiv ist die Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an einer Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ die Steigung der Tangente an den Graphen von f durch den Punkt $\big(x_0, f(x_0)\big)$. Genauer gesagt, ist die Ableitung der Grenzwert der Steigungen der Sekanten durch $\big(x_0, f(x_0)\big)$ und $(x, f(x))$ für x gegen x_0. Die Tangente ist die beste affine Näherung für f (= "Linearisierung") in einer kleinen Umgebung von x_0.

Ableitungen sind daher allgegenwärtig in den Wissenschaften und im Ingenieurwesen. In der Mechanik ist die Geschwindigkeit eines Teilchens zum Beispiel die Ableitung seines Ortes als eine Funktion der Zeit. Als ein anderes Beispiel ist in einem elektrischen Schwingkreis [1] die Stromstärke gleich der Ableitung der Ladung des Kondensators als eine Funktion der Zeit.

5.1 Differenzenquotient, Differenzierbarkeit, Ableitung, Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit, einseitige Differenzierbarkeit und Ableitung

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96a, 3.1] und [Stra, 5.1]. Wir definieren hier Differenzierbarkeit und die Ableitung einer Funktion. Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit. Wir definieren auch rechts- und linksseitige Differenzierbarkeit und Ableitungen. Diese Ableitungen werden neben der gewöhnlichen Ableitung im Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung auftreten.

Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, $p \in \mathbb{N}$, $f : U \to \mathbb{R}^p$ und $x_0 \in U$.

[1] Siehe Abbildung 0.4.

Definition 5.1 (Differenzenquotient, Differenzierbarkeit, Ableitung (in einem Punkt)). *(i)* *Wir definieren den* Differenzenquotienten von f zu x_0 *als die Funktion*

$$Q := Q^f_{x_0} : U \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}^p, \quad Q(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{5.1}$$

(ii) *Wir nennen* f im Punkt x_0 differenzierbar *g. d. w.*

$$Q \text{ konvergiert im Punkt } x_0. \tag{5.2}$$

In diesem Fall definieren wir die Ableitung von f an der Stelle x_0 *als den Grenzwert*

$$f'(x_0) := \lim_{x_0} Q = \lim_{x \to x_0} Q(x). \tag{5.3}$$

(iii) *Wir nennen* f *(*auf U*)* differenzierbar *g. d. w.* f *in jedem Punkt differenzierbar ist. In diesem Fall definieren wir die* Ableitung *von* f *als die Funktion*

$$f' : U \to \mathbb{R}^p$$

gegeben durch (5.3).

Bemerkungen. [Differenzenquotient, Ableitung in einem Punkt]

- Der Quotient (5.1) ist wohldefiniert, da $x - x_0 \neq 0$ für jedes x im Definitionsbereich von F.
- Der Differenzenquotient von f in x_0, ausgewertet bei x, ist die Steigung der Gerade durch die Punkte $\big(x_0, f(x_0)\big)$ und $(x, f(x))$. Diese Gerade schneidet den Graphen von f in mindestens zwei Punkten. Daher ist sie eine Sekante zum Graphen von f.
- Die Ableitung von f in x_0 ist der Grenzwert der Steigungen der Sekanten für x gegen x_0. Intuitiv "konvergieren" die Sekanten gegen die Tangente an den Graphen von f im Punkt $\big(x_0, f(x_0)\big)$. Anschaulich ist die Ableitung von f in x_0 daher die Steigung dieser Tangente.
- Wir haben den Begriff einer Tangente noch nicht definiert. Wir werden das gleich nachholen. Dazu werden wir die Ableitung von f in x_0 *verwenden*. "Konvergenz" der Sekanten haben wir ebenfalls nicht definiert. Wir benötigen diese zwei Begriffe offensichtlich nicht, um die Ableitung von f zu definieren.
- Der Definitionsbereich des Differenzenquotienten Q ist $U \setminus \{x_0\}$. Da U eine offene Menge ist, enthält der Abschluss dieses Definitionsbereichs den Punkt x_0. Der Grenzwert von Q an der Stelle x_0 ist daher wohldefiniert. (Siehe Definition

4.25.) Falls der Definitionsbereich X von f eine allgemeine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist, braucht das nicht der Fall zu sein. Ein Beispiel dafür $X = \{x_0\}$. In diesem Fall ist $\overline{X \setminus \{x_0\}} = \emptyset$. Diese Menge enthält x_0 nicht. Der Grenzwert von Q in x_0 ist nicht wohldefiniert, da Q in x_0 "gegen jeden Punkt $Y_0 \in \mathbb{R}^p$" konvergiert. (Siehe Bemerkung 4.26(i).)

- In [Stra, Definition 5.1.1. ii), S. 79] wird Differenzierbarkeit einer vektorwertigen Funktion komponentenweise definiert. Diese Definition und Definition 5.1 sind äquivalent.

Definition (Tangente an Graphen)**.** *Wir nehmen an, dass f in x_0 differenzierbar ist. Wir definieren die* Tangente an den Graphen von f im Punkt $\big(x_0, f(x_0)\big)$ *als die Gerade durch den Punkt $\big(x_0, f(x_0)\big)$ mit Steigung $f'(x_0)$.*

In Beispiel 5.3(i) werden wir eine affine Funktion betrachten. Dieser Begriff ist wie folgt definiert. Seien V und W reelle Vektorräume. (Für eine Definition des Begriffs eines Vektorraumes siehe die Vorlesung *Lineare Algebra*. Ein Beispiel für einen Vektorraum ist $V = \mathbb{R}^n$.)

Definition (linear, affin)**.** *(i) Eine Abbildung $T : V \to W$ heisst (*reell-*)*linear *g. d. w. gilt*

$$T(av) = aT(v), \qquad T(v + v') = T(v) + T(v'), \qquad \forall a \in \mathbb{R},\, v, v' \in V. \tag{5.4}$$

(ii) Eine Abbildung $f : V \to W$ heisst affin *g. d. w. f die Summe einer linearen und einer konstanten Abbildung ist.*

Beispiel 5.2. [affine Abbildung] Eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann affin, falls es $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ gibt so, dass $f(x) = a_1 x + a_0$.

Bemerkung. Eine Abbildung wie in Beispiel 10.26 wird manchmal unpräzise als "linear" bezeichnet.

Beispiele 5.3. [Differenzierbarkeit und Ableitung einer Funktion in einem Punkt]

(i) (affine Funktion) Seien $x_0, a_0, a_1 \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die affine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := a_1 x + a_0$.

Behauptung: Diese Funktion ist im Punkt x_0 differenzierbar mit Ableitung

$$f'(x_0) = a_1.$$

Beweis: Der Differenzenquotient von f im Punkt x_0 ist die Funktion $Q : \mathbb{R} \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$Q(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{a_1 x + a_0 - (a_1 x_0 + a_0)}{x - x_0} = a_1.$$

Gemäss Beispiel 4.27(i) konvergiert Q an der Stelle x_0 gegen a_1. Daraus folgt, dass f im Punkt x_0 differenzierbar ist mit Ableitung

$$f'(x_0) = \lim_{x_0} Q = \lim_{x \to x_0} Q(x) = a_1.$$

Das beweist die Behauptung.

(ii) (quadratische Funktion) Seien $x_0, a \in \mathbb{R}$. Wir definieren $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := ax^2$. Diese Funktion ist im Punkt x_0 differenzierbar mit Ableitung

$$f'(x_0) = 2ax_0.$$

Siehe Übungsserie 9.

(iii) (Exponentialfunktion) Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist an jeder Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitung

$$\exp'(x_0) = \exp(x_0).$$

(Siehe Übungsserie 9.)

Bemerkung. [Nicht-Differenzierbarkeit in einem Punkt] Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, $x_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}$. Gemäss Bemerkung 4.28 ist die Funktion f *nicht* im Punkt x_0 differenzierbar g. d. w. (4.13) mit f ersetzt durch $Q^f_{x_0}$ erfüllt ist. Das ist die folgende Bedingung:

$$\forall Y_0 \in Y \exists \varepsilon \in]0, \infty[\forall \delta \in]0, \infty[\exists x \in X : \|x - x_0\| \leq \delta \wedge \left|Q^f_{x_0}(x) - Y_0\right| > \varepsilon. \tag{5.5}$$

Beispiel 5.4. [Funktion, die in einem Punkt nicht differenzierbar ist] Wir betrachten die Betragsfunktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := |x|.$$

Behauptung: Diese Funktion ist im Punkt $x_0 := 0$ nicht differenzierbar.

Beweis: Wir schreiben $Q := Q^f_0 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$. Sei $Y_0 \in \mathbb{R}$. Wir definieren $\varepsilon := \frac{1}{2}$. Sei $\delta > 0$.

Fall: $Y_0 \leq 0$: Wir definieren

$$x := \delta. \tag{5.6}$$

Es gilt

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}, \quad |x - x_0| = x = \delta \leq \delta, \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned}\big|Q(x) - Y_0\big| &= \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - Y_0\right| \\ &= \left|\frac{x-0}{x-0} - Y_0\right| \\ &= 1 - Y_0 \qquad \text{(wegen unserer Annahme, dass } Y_0 \leq 0) \\ &> \frac{1}{2} \qquad \text{(nochmals wegen } Y_0 \leq 0) \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

und daher $\big|Q(x) - Y_0\big| > \varepsilon$. Daraus folgt, dass Q im Fall $Y_0 \leq 0$ im Punkt x_0 nicht gegen Y_0 konvergiert. Ein analoges Argument zeigt, dass Q im Fall $Y_0 > 0$ im Punkt x_0 nicht gegen Y_0 konvergiert. (Überprüfen Sie das!) Daher konvergiert Q im Punkt x_0 in keinem Fall gegen Y_0. Daraus folgt, dass Q im Punkt x_0 divergiert. Daher ist f im Punkt x_0 nicht differenzierbar. Das beweist die Behauptung.

Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, $p \in \mathbb{N}$, $f : U \to \mathbb{R}^p$ und $x_0 \in U$.

Bemerkung 5.5. [komponentenweise Differenzierbarkeit und Ableitung] Wir schreiben f_i für die i-te Komponente von f. (Es gilt also $f = (f_1, \ldots, f_p)$.) Die Funktion f ist an der Stelle x_0 differenzierbar g. d. w. für jedes $i \in \{1, \ldots, p\}$ die Funktion f_i an der Stelle x_0 differenzierbar ist. In diesem Fall gilt

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} f_1'(x_0) \\ \vdots \\ f_p'(x_0) \end{pmatrix}.$$

Beispiel. [komponentenweise Differenzierbarkeit und Ableitung] Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad f(x) := \begin{pmatrix} x \\ e^x \end{pmatrix}$$

und $x_0 \in \mathbb{R}$. Gemäss Beispiel 5.3((iii)) und Bemerkung 5.5 ist f an der Stelle x_0 differenzierbar mit Ableitung

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} f_1'(x_0) \\ f_2'(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{x_0} \end{pmatrix}.$$

Satz 5.6 (Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit)**.** *Falls f an der Stelle x_0 differenzierbar ist, dann ist f an der Stelle x_0 stetig.*

Beweis: [Stra, Satz 5.1.1., S. 80]

Beispiele. [Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit]

- Jede affine Funktion f von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist stetig. Das folgt aus Beispiel 5.3(i) (affine Funktion ist differenzierbar) und Satz 5.6.

  Bemerkung: Stetigkeit einer affinen Funktion folgt auch aus den Tatsachen, dass jede affine Funktion ein Polynom ist und jedes Polynom stetig ist. (Siehe Beispiel 4.3(ii).)

- Wir definieren die charakteristische Funktion

  $$f := \chi_{\{0\}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

  wie in (4.4). Diese Funktion ist an der Stelle $x_0 := 0$ nicht differenzierbar. Das folgt aus Beispiel 4.3(iv) ($\chi_{\{0\}}$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ unstetig) und der Kontraposition des Satzes 5.6.

Bemerkung. [Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit] Die Umkehrung des Satzes 5.6 lautet:

"Falls f an der Stelle x_0 stetig ist, dann ist f an der Stelle x_0 differenzierbar."

Diese Aussage ist im Allgemeinen falsch. Ein Gegenbeispiel ist der Absolutbetrag $f := |\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diese Funktion ist stetig. (Überprüfen Sie das!) Gemäss Beispiel 5.4 ist sie jedoch im Punkt $x_0 := 0$ nicht differenzierbar. Es gibt sogar stetige Funktionen, die nirgends [2] differenzierbar sind.

Bemerkung 5.7. [alternative Definition der Ableitung] Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, $p \in \mathbb{N}$, $f : U \to \mathbb{R}^p$ und $x_0 \in U$. Wir definieren

$$\widetilde{U} := \{x - x_0 \,|\, x \in U\}$$

und den *verschobenen Differenzenquotienten von f zu x_0* als

$$\widetilde{Q} : \widetilde{U} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad \widetilde{Q}(h) := \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Die Funktion f ist im Punkt x_0 differenzierbar g. d. w. $\widetilde{Q}$ im Punkt 0 konvergiert. In diesem Fall ist die Ableitung von f im Punkt x_0 gegeben durch

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \widetilde{Q}(h) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Bemerkungen 5.8. [Differenzenquotient, Ableitung als Änderungsrate, infinitesimale Grössen, Differentialquotient, Nichtstandardanalysis, (Nicht-)Schreibweisen, $f(x)$]

[2] d. h. an keiner Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$

(i) (Differenzenquotient) Wir schreiben x für die unabhängige Variable, y für die abhängige Variable und

$$\Delta x := x - x_0, \quad y_0 := f(x_0), \quad y := f(x), \quad \Delta y := y - y_0.$$

Die Differenz Δx ist Änderung von x. Sie misst, wie stark x sich zunimmt, wenn es sich von x_0 nach x ändert. Analog ist Δy die Änderung von y. Der Differenzenquotient von f zu x_0 ist gegeben durch

$$Q(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

(ii) (Ableitung als Änderungsrate) Die Ableitung von f im Punkt x_0 ist der Grenzwert dieses Quotienten für x gegen x_0. Wir können diesen Grenzwert als die *Änderungsrate* von y bei sich änderndem x (im Punkt $x = x_0$) auffassen.

(iii) (infinitesimale Grössen, Differentialquotient) Heuristisch meinen wir mit "infinitesimal" "unendlich klein, aber möglicherweise nicht gleich 0". Philosophisch ist eine "positive infinitesimale Grösse" also eine Grösse, die grösser als 0 ist, aber kleiner als jede positive reelle Zahl. Intuitiv betrachten wir eine "infinitesimale" Differenz $\Delta x \neq 0$, die wir ein "Differential dx" nennen. Wir schreiben "dy" für die zugehörige "infinitesimale" Differenz Δy. Heuristisch ist die Ableitung von f im Punkt x_0 durch den Quotienten dieser "Differentiale" gegeben, d. h.

$$f'(x_0) = \frac{\text{“}dy\text{”}}{\text{“}dx\text{”}}. \tag{5.8}$$

Die Ableitung $f'(x_0)$ wird daher manchmal *Differentialquotient* genannt.

(iv) Gemäss (5.8) können wir dem Quotienten der "Differentiale" "dy" und "dx" einen präzisen Sinn zuerkennen, nämlich den der Ableitung $f'(x_0)$. Intuitiv kann der Quotient zweier "infinitesimaler Grössen" also eine (endliche) Zahl sein.

Der Quotient der "Differentiale dx und dy" hängt gemäss (5.8) *nicht* von der Wahl der infinitesimalen Grösse "dx" ab. Das steht im Unterschied zum Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, der sehr wohl von Δx abhängt. Beim Übergang von endlichen Differenzen zu "Differentialen" verschwindet also diese Abhängigkeit.

(v) (Nichtstandardanalysis) In unserer Vorlesung ist der Begriff einer "infinitesimalen Grösse", wie zum Beispiel "dx" oder "dy", nur ein heuristisches Konzept. Wir können einer solchen Grösse keinen mathematischen Sinn als eine *reelle Zahl* zuerkennen, da es keine (strikt) positive *reelle Zahl* gibt, die kleiner als jede strikt positive reelle Zahl ist. Es ist jedoch möglich, infinitesimale Grössen im Rahmen der sogenannten *Nichtstandardanalysis* [3] auf eine andere Art (mathematisch präzise) zu definieren.

[3] Das ist ein Teilgebiet der Analysis.

(vi) (Schreibweisen) Falls es aus dem Kontext ersichtlich ist, dass x der Name der unabhängigen Variable und y der Name der abhängigen Variable ist, dann schreiben wir die Ableitung von f im Punkt x_0 auch als

$$\frac{dy}{dx}(x_0) := \frac{df}{dx}(x_0) := f'(x_0).$$

Das ist die *Leibniz-Notation*. Der Grund für diese Notation ist die obige heuristische Interpretation der Ableitung als Quotient zweier "infinitesimaler Grössen".

Bemerkung: Wir definieren nur die ganze Notation $\frac{dy}{dx}(x_0)$, nicht die einzelnen Teile "dx, dy, df". Wegen des Goethe-Prinzips 1.23 dürfen wir die Namen der unabhängigen und der abhängigen Variable ändern. Falls wir zum Beispiel den Namen t für die unabhängige Variable verwenden, dann schreiben wir

$$\frac{dy}{dt}(t_0) := \frac{df}{dt}(t_0) := f'(t_0).$$

In diesem Fall schreiben wir auch einen Punkt statt eines Striches, also

$$\dot{f}(t_0) := f'(t_0).$$

Das ist die *Newton-Notation*. Sie ist nach Isaac Newton benannt. (Siehe Abbildung 0.1.) Diese Notation ist in der Physik weitverbreitet, falls t die Rolle der Zeit spielt.

(vii) (Ausdruck $f(x)$) Der Ausdruck $f(x)$ ist keine Funktion, sondern eine reelle Zahl[4]. Betrachten wir zum Beispiel die Funktion $f := \mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{id}(x) := x$ und $x := 0$. Es ist nicht sinnvoll, über die Ableitung von $f(x) = \mathrm{id}(0) = 0$ zu sprechen. Die Ableitung ist nämlich nur für Funktionen, nicht für Zahlen, definiert. Die Ableitung von f an der Stelle x hängt von den Werten von f in einer Umgebung von x ab, nicht nur von $f(x)$. Siehe auch Bemerkung 1.28.

(viii) (Nichtschreibweisen) Im Einklang mit Bemerkung (vii) schreiben wir **nicht**

$$f(x)', \qquad (f(x))'$$

für die Ableitung von f an der Stelle x, sondern $f'(x)$. (Die Reihenfolge der Symbole spielt eine Rolle.)

Bemerkungen. [Ableitung und beste affine Näherung]

(i) Seien x und y physikalische Grössen, wobei y eine Funktion f von x ist. Wie in Bemerkung 5.8(ii) erwähnt, können wir die Ableitung von f im Punkt x_0 als die *Änderungsrate* von y bei sich änderndem x (im Punkt $x = x_0$) auffassen. Wenn wir x um kleines Δx ändern, dann ändert sich y um ein Δy, das ungefähr gleich $f'(x_0)\Delta x$ ist.

[4] für ein gegebenes x, falls f reellwertig ist

(ii) Daraus folgt, dass $f(x)$ ungefähr gegeben ist durch

$$f(x) \approx \varphi(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

falls x nahe bei x_0 ist. Die Funktion φ ist affin (=linear + konstant). Sie beschreibt die Tangente an den Graphen von f durch den Punkt $\big(x_0, f(x_0)\big)$. Sie ist die *beste affine Näherung* von f im Punkt x_0. In dieser Tatsache liegt die Relevanz der Ableitung in vielen Anwendungen.

(iii) Oft wird der Term "lineare Näherung" oder "Linearisierung" statt *beste affine Näherung* verwendet. "Affin" ist präziser, da die Näherung auch den konstanten Term $f(x_0) - f'(x_0)x_0$ enthält.

(iv) In Anwendungen in der Physik wird die Funktion f manchmal durch ihre (beste) affine Näherung ersetzt, um das physikalische Modell zu vereinfachen. Als ein Beispiel dafür betrachten wir einen Federschwinger. (Siehe dazu die Erklärungen auf S. 5.) Die Rückstellkraft der Feder ist eine Funktion der Auslenkung x der Feder. Diese Funktion wird in der *Linearisierung* des Systems durch ihre affine Näherung ersetzt. (In diesem Fall ist das eine lineare Funktion, d. h. der konstante Term ist null.) Das bedeutet, dass wir näherungsweise annehmen, dass die Rückstellkraft proportional zur Auslenkung ist. Diese Annahme heisst das Hookesche Gesetz.

Beispiel. [Geschwindigkeit als Ableitung] Wir betrachten ein Teilchen, das sich auf einer Geraden bewegt. Wir schreiben:

t:= Zeit

x:= Ort des Teilchens, aufgefasst als eine Funktion von t

Für jedes $t_0 \in \mathbb{R}$ ist die Ableitung $x'(t_0) = \dot{x}(t_0) = \frac{dx}{dt}(t_0)$ die (Momentan-)Geschwindigkeit des Teilchens zum Zeitpunkt t_0.

Im Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Satz 6.15) werden neben der gewöhnlichen Ableitung auch die rechts- und linksseitigen Ableitungen auftreten. Diese Ableitungen sind wie folgt definiert. Seien $X \subseteq \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$, $f : X \to \mathbb{R}^p$ und $x_0 \in X$.

Definition 5.9 (rechts- und linksseitige Differenzierbarkeit und Ableitung)**.** *(i) Wir nehmen Folgendes an:*

$$X \cap [x_0, \infty[\text{ ist eine Umgebung von } x_0 \text{ in } [x_0, \infty[. \tag{5.9}$$

Wir definieren den rechtsseitigen Differenzenquotienten von f zu x_0 *als die Abbildung*

$$Q_{x_0}^{f,+} : X \cap]x_0, \infty[\to \mathbb{R}^p, \qquad Q_{x_0}^{f,+}(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Wir nennen f an der Stelle x_0 rechtsseitig differenzierbar *g. d. w.* $Q_{x_0}^{f,+}$ *an der Stelle* x_0 *konvergiert. In diesem Fall definieren wir die* rechtsseitige Ableitung von f an der Stelle x_0 *als den Grenzwert*

$$f'_+(x_0) := \lim_{x \to x_0} Q_{x_0}^{f,+}(x).$$

(ii) Wir definieren den linksseitigen Differenzenquotienten von f zu x_0*, d. h.* $Q_{x_0}^{f,-}$*,* linksseitige Differenzierbarkeit von f an der Stelle x_0 *und die* linksseitige Ableitung von f an der Stelle x_0*, d. h.* $f'_-(x_0)$*, analog. (Wie?)*

Bemerkungen. [rechts- und links-, einseitige Differenzierbarkeit und Ableitung]

- (i): Den Begriff einer Umgebung haben wir in Definition 4.40 festgelegt. Bedingung (5.9) ist äquivalent dazu, dass es ein $x_+ \in]x_0, \infty[$ gibt so, dass $[x_0, x_+[\subseteq X$.
- Wir nehmen an, dass X eine Umgebung von x_0 in $\mathbb{R}$ ist. Dann ist f in x_0 differenzierbar g. d. w. f in x_0 links- und rechtsseitig differenzierbar ist und
$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$
In diesem Fall gilt
$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$
- Wir sagen, dass f in x_0 *einseitig differenzierbar* ist, falls f von jeder Seite differenzierbar ist, für die das sinnvoll ist. Die Funktion muss in x_0 also rechtsseitig differenzierbar sein, falls $X \cap [x_0, \infty[$ eine Umgebung von x_0 in $[x_0, \infty[$ ist usw.

Beispiele. [rechts- und linksseitige Differenzierbarkeit und Ableitung]

- Wir betrachten
$$X := [0, \infty[, \qquad p := 1, \qquad f : [0, \infty[\to \mathbb{R},\ f(x) := x, \qquad x_0 := 0.$$
Die Funktion f ist an der Stelle x_0 rechtsseitig differenzierbar mit rechtsseitiger Ableitung
$$f'_+(x_0) = 1.$$
Die Funktion ist in x_0 also einseitig differenzierbar.
- Wir betrachten
$$X := \mathbb{R}, \qquad p := 1, \qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := |x|, \qquad x_0 := 0.$$
Die Funktion f ist an der Stelle x_0 rechts- und linksseitig differenzierbar mit
$$f'_+(x_0) = 1, \qquad f'_-(x_0) = -1.$$
Die Funktion ist in x_0 also einseitig differenzierbar. Da $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$, ist die Funktion in x_0 nicht differenzierbar. (Das haben wir schon in Beispiel 5.4 gesehen.)

5.2 Summen-, Produkt-, Quotienten- und Kettenregel für Ableitung

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96a, 3.1] und [Stra, 5.1]. Differenzierbarkeit bleibt erhalten unter Summen-, Produkt-, Quotientenbildung und Verknüpfung. In diesem Abschnitt werden wir Rechenregeln für die Ableitung der Summe, des Produktes und des Quotienten zweier Funktionen sehen. Die Kettenregel besagt, dass die Ableitung der Verknüpfung zweier Funktionen die Ableitung der äusseren Funktion, verknüpft mit der inneren Funktion, mal die Ableitung der inneren Funktion ist. Sie ist ein wichtiges Werkzeug zur Berechnung von Ableitungen.

Seien $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, $f, g : U \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in U$.

Satz 5.10 (Summen-, Produkt-, Quotientenregel für Ableitung)**.** *Wir nehmen an, dass f und g an der Stelle x_0 differenzierbar sind. Dann sind die Funktionen $f + g$, $f \cdot g$ und, falls $g(x_0) \neq 0$, auch die Funktion $\frac{f}{g}$ an der Stelle x_0 differenzierbar, und es gilt:*

(i) (Summenregel) $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

(ii) (Produktregel = Leibnizregel) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

(iii) (Quotientenregel) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

Teil (ii) dieses Satzes ist nach Gottfried Wilhelm Leibniz benannt. (Siehe Abbildung 0.2.)

Beweis: (i): Übungsserie 8

((ii),(iii)): [Stra, Satz 5.1.2. ii),iii), S. 81]

Bemerkungen 5.11. [Multiplikation mit Konstante, Linearität des Ableitens]

(i) (Multiplikation mit Konstante, Faktorregel) Sei $a \in \mathbb{R}$. Aus Satz 5.10(ii) mit $g \equiv a$ folgt: Falls f an der Stelle x_0 differenzierbar ist, dann ist die Funktion af an der Stelle x_0 differenzierbar mit Ableitung

$$(af)'(x_0) = af'(x_0).$$

Diese Gleichheit heisst *Faktorregel*.

(ii) (Linearität des Ableitens) Wir definieren die Menge

$$V := \{\text{in } x_0 \text{ differenzierbare Funktion von } U \text{ nach } \mathbb{R}\}$$

und *punktweise Skalarmultiplikation* und *punktweise Addition* auf V als die Abbildungen

$$\bullet : \mathbb{R} \times V \to V, \bullet(c, f) := c \cdot f, \qquad (c \cdot f)(x) := c \cdot (f(x)), \tag{5.10}$$

$$+ : V \times V \to V, +(f, g) := f + g, \qquad (f + g)(x) := f(x) + g(x). \tag{5.11}$$

Das Tripel $(V, \bullet, +)$ ist ein Vektorraum. (Siehe die Vorlesung *Lineare Algebra*.) Wir definieren *Ableiten an der Stelle* x_0 als die Abbildung

$$T : V \to \mathbb{R}, \qquad T(f) := f'(x_0).$$

Ableiten an der Stelle x_0 ist linear, d. h. erfüllt die Bedingungen (5.4). Das folgt aus der Summenregel (Satz 5.10(i)) und Bemerkung (i).

Beispiele 5.12. [Summen-, Produkt-, Quotientenregel für Ableitung] Für $k \in \mathbb{N}_0$ schreiben wir die k-te Potenzfunktion als $p_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p_k(x) := x^k$.

(i) (quadratische Funktion) Sei $x_0 \in \mathbb{R}$.

Behauptung: Die quadratische Funktion p_2 ist an der Stelle x_0 differenzierbar mit Ableitung

$$f'(x_0) = 2x_0.$$

Beweis: Es gilt $p_2 = p_1 p_1$. Gemäss Beispiel 5.3(i) ist p_1 in x_0 differenzierbar. Gemäss Satz 5.10(ii) ist daher die Funktion p_2 in x_0 differenzierbar mit Ableitung

$$p_2'(x_0) = p_1'(x_0)p_1(x_0) + p_1(x_0)p_1'(x_0) = 1 \cdot x_0 + x_0 \cdot 1 = 2x_0.$$

Das beweist die Behauptung.

Bemerkung: In Übungsserie 8 zeigten wir die obige Behauptung direkt mittels der Definition.

(ii) (Potenzfunktion) Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachten die Aussage

$P(n) :=$ "p_n an der Stelle x_0 differenzierbar mit $p_n'(x_0) = nx_0^{n-1}$."

Behauptung: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $P(n)$.

Beweis: Wir verwenden Induktion.

Induktionsverankerung: Für die Funktion p_1 gilt die Aussage gemäss Beispiel 5.3(i), d. h. $P(1)$ gilt. (Überprüfen Sie das!)

Induktionsschritt: Sei $k \in \mathbb{N}$ so, dass $P(k)$ gilt. Das bedeutet, dass p_k in x_0 differenzierbar ist mit $p_k'(x_0) = kx_0^{k-1}$. Gemäss $P(1)$ ist p_1 differenzierbar ist mit

$p_1'(x_0) = 1$. Da $p_{k+1} = p_k p_1$, folgt mittels Satz 5.10(ii) (Leibnizregel), dass p_{k+1} in x_0 differenzierbar ist mit

$$\begin{aligned} p_{k+1}'(x_0) &= p_k'(x_0)p_1(x_0) + p_k(x_0)p_1'(x_0) \\ &= kx_0^{k-1}x_0 + x_0^k \cdot 1 \qquad \text{(gemäss der Induktionsannahme } P(k)) \\ &= (k+1)x_0^k. \end{aligned}$$

Also gilt die Induktionsbehauptung $P(k+1)$. Das schliesst den Induktionsschritt ab.

Mittels Induktion folgt, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $P(n)$ gilt. Das beweist die Behauptung.

(iii) (Polynom) Seien $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Wir definieren das Polynom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) := \sum_{k=0}^n a_k x^k$. Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ ist p an der Stelle x_0 differenzierbar mit

$$p'(x_0) = \sum_{k=0}^{n} k a_k x_0^{k-1}.$$

Das folgt aus Beispiel (ii), Bemerkung 5.11(i), Satz 5.10(i) (Summenregel) und Induktion. (Siehe Übungsserie 9.)

(iv) (rationale Funktion) Seien p, q Polynome mit $q \not\equiv 0$. Wir definieren

$$U := q^{-1}\big(\mathbb{R} \setminus \{0\}\big) = \big\{x \in \mathbb{R} \,\big|\, q(x) \neq 0\big\}, \qquad f := \frac{p}{q} : U \to \mathbb{R}.$$

Die Menge U ist offen. (Warum?) Eine solche Funktion f heisst *rational*. Sei $x_0 \in U$. Gemäss Beispiel (iii) sind p und q in x_0 differenzierbar. Gemäss Satz 5.10(iii) ist f daher an der Stelle x_0 differenzierbar mit

$$f'(x_0) = \frac{p'q - pq'}{q^2}(x_0).$$

Die Ableitung $f' : U \to \mathbb{R}$ ist daher wieder eine rationale Funktion.

Ein wichtiges Werkzeug zur Berechnung von Ableitungen ist die Kettenregel. Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}$ offen, $f : U \to V$ und $g : V \to \mathbb{R}$ Funktionen und $x_0 \in U$. Wir definieren die Verknüpfung von f und g wie in (1.34), d. h.

$$g \circ f : U \to \mathbb{R}, \qquad g \circ f(x) := g(f(x)).$$

Satz 5.13 (Kettenregel)**.** *Falls f in x_0 differenzierbar ist und g in $f(x_0)$ differenzierbar ist, dann ist $g \circ f$ in x_0 differenzierbar mit Ableitung*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0). \tag{5.12}$$

Beweis: [Stra, Satz 5.1.3., S. 82]

Bemerkungen.

- Im Zusammenhang mit der Kettenregel nennen wir g die *äussere Funktion* und f die *innere Funktion*. Die Kettenregel besagt also:

  Die Ableitung der Verknüpfung zweier Funktionen ist die Ableitung der äusseren Funktion, verknüpft mit der inneren Funktion, mal die Ableitung der inneren Funktion.

- Wir verwenden die Notationen

$$y = f(x), \quad z = g(y), \quad \frac{dy}{dx} = f', \quad \frac{dz}{dy} = g', \quad \frac{dz}{dx} = (g \circ f)',$$

  wie in Bemerkung 5.8(vi). Die Gleichheit (5.12) besagt, dass

$$\frac{dz}{dx}(x_0) = \frac{dz}{dy}\big(y_0 := f(x_0)\big)\frac{dy}{dx}(x_0),$$

  oder prägnanter:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}. \tag{5.13}$$

  (Wir müssen uns hier daran erinnern, an welcher Stelle jede Ableitung genommen wird.) In dieser Schreibweise erscheint die Gleichheit (5.12) plausibel. Intuitiv interpretieren wir die Ableitung $f'(x_0) = \frac{dy}{dx}(x_0)$ nämlich als den Quotienten von "dy", der "infinitesimalen Änderung von y", und "dx", der "infinitesimalen Änderung von x" und die Ableitung $g'(y_0) = \frac{dz}{dy}(y_0)$ als den Quotienten der "infinitesimalen Änderungen dz und dy". (Siehe Bemerkung 5.8(iii).) Mit dieser heuristischen Interpretation erhalten wir die Gleichheit (5.13) dadurch, dass wir auf der rechten Seite die beiden "dy" wegstreichen.

- Die vorherige Bemerkung beweist (5.13) nicht, da wir den Begriff einer "infinitesimalen Grösse" nicht definiert haben. Wir können einer solchen Grösse keinen mathematischen Sinn als eine *reelle Zahl* zuerkennen. Es ist jedoch möglich, infinitesimale Grössen im Rahmen der sogenannten *Nichtstandardanalysis* (mathematisch präzise) zu definieren.

- (Name der Kettenregel) Wir können uns eine Funktion wie ein Kettenglied vorstellen und die Verknüpfung von Funktionen wie eine Verkettung. Indem wir die "Kettenglieder" f und g verketten, erhalten wir die (kurze) Kette $g \circ f$.[5] Das erklärt den Namen *Kettenregel*.

Beispiele 5.14. [Kettenregel]

[5] Wir können auch längere Ketten bilden, wie zum Beispiel $f_3 \circ (f_2 \circ f_1)$ und $f_4 \circ \big(f_3 \circ (f_2 \circ f_1)\big)$.

(i) (affine Funktionen) Für $i = 0, 1$ seien $a_i, b_i \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die affinen Funktionen

$$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := a_1 x + a_0, \qquad g(y) := b_1 y + b_0.$$

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Gemäss Beispiel 5.3(i) ist f in x_0 differenzierbar mit Ableitung

$$f'(x_0) = a_1.$$

Des Weiteren ist g in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar mit Ableitung

$$f'(y_0) = b_1.$$

Gemäss Satz 5.13 ist $g \circ f$ daher in x_0 differenzierbar mit Ableitung

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0) = b_1 a_1. \tag{5.14}$$

Bemerkung: Wir können das auch direkt überprüfen. Die Verknüpfung von f mit g ist nämlich gegeben durch

$$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g \circ f(x) = g(f(x)) = b_1(a_1 x + a_0) + b_0 = A_1 x + A_0,$$
$$\text{wobei} \qquad A_1 := b_1 a_1, \qquad A_0 := b_1 a_0 + b_0.$$

Diese Funktion ist ebenfalls affin. Gemäss Beispiel 5.3(i) ist $g \circ f$ daher in x_0 differenzierbar mit Ableitung

$$(g \circ f)'(x_0) = A_1 = b_1 a_1.$$

Das stimmt mit (5.14) überein.

(ii) Seien $c, x_0 \in \mathbb{R}$. Wir definieren

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad h(x) := e^{cx}.$$

Behauptung: Diese Funktion ist in x_0 differenzierbar mit Ableitung

$$h'(x) = ce^{cx_0}.$$

Beweis: Wir definieren

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := cx, \qquad g := \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Es gilt $h = g \circ f$. Gemäss Beispiel 5.3(i) ist f in x_0 differenzierbar mit

$$f'(x_0) = c.$$

Gemäss Beispiel 5.3(iii) ist die Funktion $g = \exp$ in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar mit $\exp'(y_0) = \exp(y_0)$. Gemäss Satz 5.13 ist $h = g \circ f$ daher in x_0 differenzierbar mit Ableitung

$$h'(x_0) = (g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0) = \exp(cx_0)c = ce^{cx_0},$$

wie behauptet.

Für weitere Beispiele siehe [Stra, Beispiel 5.1.4. i),iii), S. 83] und Übungsserie 9.

5.3 Der Mittelwertsatz, unbestimmter Grenzwert der Form 0/0, Regel von Bernoulli-de l'Hospital, Umkehrsatz

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96a, 3.1, 3.3] und [Stra, 5.2]. Der Mittelwertsatz besagt, dass es für jede auf einem kompakten Intervall definierte reellwertige Funktion einen Punkt auf dem Intervall gibt, in dem die Ableitung der Funktion gleich der Steigung der Sekante durch die Endpunkte des Graphen ist.[6] Eine Folgerung aus diesem Satz ist, dass eine Funktion konstant ist, falls ihre Ableitung konstant gleich null ist. Wir werden das anwenden, um zu zeigen, dass die gewöhnliche Differentialgleichung $f' = cf$ eine eindeutige Lösung besitzt, die eine gegebene Anfangsbedingung erfüllt. (Differentialgleichungen beschreiben zahlreiche naturwissenschaftliche Gesetze.)

Eine weitere Anwendung des Mittelwertsatzes ist die Regel von Bernoulli-de l'Hospital. Diese besagt ungefähr, dass der Quotient $\frac{f}{g}$ zweier Funktionen einer reellen Variable an einer Stelle x_0 gegen den Quotienten der Ableitungen $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ konvergiert, falls f und g an der Stelle x_0 gegen 0 konvergieren. Sie liefert also eine Methode, um einen "unbestimmten Grenzwert der Form $\frac{0}{0}$" zu berechnen.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $a < b$, und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Satz 5.15 (Mittelwertsatz)**.** *Wir nehmen an, dass f stetig und auf dem offenen Intervall $]a, b[$ differenzierbar ist. Dann existiert ein $x_0 \in]a, b[$ so, dass*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dieser Satz wurde durch Joseph-Louis Lagrange und Augustin-Louis Cauchy bewiesen. (Siehe Abbildungen 5.1 und 3.6.)

Bemerkung. [Mittelwertsatz] Das bedeutet, dass $f'(x_0)$, die Ableitung von f im Punkt x_0, gleich der Steigung der Sekante zum Graphen von f durch die Punkte $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ ist.

Beweis: [Stra, Satz 5.2.1., S. 84]

Als eine Anwendung dieses Satzes erhalten wir folgendes Korollar.

Korollar 5.16 (verschwindende Ableitung impliziert Konstanz, positive Ableitung strenges Wachstum)**.** *Sei f wie in Satz 5.15. Dann gilt Folgendes:*

[6] Wir nehmen hierbei an, dass die Funktion stetig und im Innern des Intervalls differenzierbar ist.

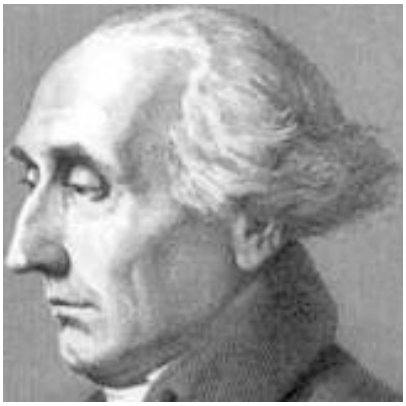


Abbildung 5.1: Joseph-Louis Lagrange, 1736–1813, italienischer Mathematiker und Astronom.

(i) Falls $f' \equiv 0$ *auf* $]a, b[$, *dann ist* f *konstant.*

(ii) Falls $f' \geq 0$ *auf* $]a, b[$, *dann ist* f *monoton wachsend*[7].

(iii) Falls $f' > 0$ *auf* $]a, b[$, *dann ist* f *streng monoton wachsend*[8].

Beweis des Korollars 5.16: (i): Sei $x \in]a, b]$. Gemäss Satz 5.15 gibt es ein $x_0 \in]a, x[$ so, dass

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= f'(x_0) \\ &= 0 \qquad \text{(wegen unserer Voraussetzung } f' \equiv 0\text{)}. \end{aligned}$$

(Wir wenden diesen Satz mit b ersetzt durch x an. Gemäss dem Goethe-Prinzip 1.23 ist das erlaubt.) Also gilt $f(x) = f(a)$. Daher ist f konstant.

((ii),(iii)) folgen mittels eines analogen Arguments. (Überlegen Sie sich das!) Das beweist Korollar 5.16. □

Beispiel. [Mittelwertsatz, Exponentialfunktion] Wir betrachten die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Gemäss Beispiel 5.3(iii) gilt $\exp' = \exp$. Gemäss Beispiel 4.43(iv) ist exp (strikt) positiv. Mittels Korollar 5.16(iii) folgt, dass exp streng monoton wachsend ist.

Bemerkung: Das folgt auch aus Korollar 3.43 (Additionstheorem für die Exponentialfunktion). Siehe Übungsserie 8.

[7] Siehe Definition 4.44(i).
[8] Siehe Definition 4.44(ii).

(Für ein weiteres Beispiel einer Anwendung von Korollar 5.16(iii) siehe [Stra, Beispiel 5.2.1. ii), S. 85].)

Im nächsten Beispiel werden wir Platzhalter verwenden.

Bemerkungen 5.17. [Punktnotation für das Argument, Platzhalter]

(i) In der *Punktnotation für das Argument* schreiben wir einen Punkt $\bullet$ für das Argument einer Funktion. Betrachten wir zum Beispiel die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := e^{2x}.$$

Wir schreiben diese Funktion in der Punktnotation als:

$$f = e^{2\bullet}$$

Der Punkt $\bullet$ ist also ein Platzhalter für das Argument. Gemäss Beispiel 5.14(ii) ist die Ableitung der Funktion $x \mapsto e^{2x}$ gegeben durch

$$\left(x \mapsto e^{2x}\right)' = \left(x \mapsto 2e^{2x}\right).$$

Das können wir mittels der Punktnotation eleganter ausdrücken als

$$\left(e^{2\bullet}\right)' = 2e^{2\bullet}. \tag{5.15}$$

Mit der Punktnotation sparen wir hier also viermal das Zeichen x und zweimal das Zeichen $\mapsto$.

(ii) Wir schreiben (5.15) **nicht** als

$$\left(e^{2x}\right)' = 2e^{2x}.$$

Wie in Bemerkung 5.8(viii) erklärt, ist die linke Seite nämlich nicht sinnvoll. Des Weiteren ist die rechte Seite keine Funktion, sondern eine Zahl (für ein gegebenes x). (Siehe Bemerkung 5.8(vii).)

(iii) Wir können (5.15) jedoch auch schreiben als

$$\frac{d}{dx} e^{2x} = \left(x \mapsto 2e^{2x}\right).$$

Der Ausdruck $\frac{d}{dx}$ bedeutet hier "$x \mapsto \ldots$ ableiten". Er unterscheidet sich von $'$ also dadurch, dass $\frac{d}{dx}$ die Abhängigkeit *von* x ableitet.

Beispiel 5.18. [Mittelwertsatz, gewöhnliche Differentialgleichung] Sei $c \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$f' = cf, \qquad \text{d. h.} \qquad f'(x) = cf(x), \forall x \in \mathbb{R}. \tag{5.16}$$

Behauptung: Es gilt

$$f(x) = f(0)e^{cx}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{5.17}$$

Beweis: Wir verwenden die Punktnotation wie in Bemerkung 5.17(i). Wir definieren

$$g := e^{-c\bullet} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad h := fg.$$

Gemäss Beispiel 5.14(ii) ist g differenzierbar mit $g' = -c\exp(-c\bullet)$. Gemäss der Leibnizregel (Satz 5.10(ii)) ist $h = fg$ daher differenzierbar mit

$$\begin{aligned} h' &= (fg)' \\ &= f'g + fg' \\ &= f'e^{-c\bullet} - cfe^{-c\bullet} \\ &= 0 \qquad \text{(gemäss unserer Voraussetzung (5.16)).} \end{aligned}$$

Gemäss Korollar 5.16(i) ist h daher konstant, d. h. für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{gathered} f(x)g(x) = h(x) = h(0) = f(0)g(0) = f(0)e^{-c\cdot 0} = f(0), \\ \text{d. h.} \qquad f(x) = f(0)g(x)^{-1} = f(0)e^{cx}. \end{gathered}$$

Das beweist die Behauptung (5.17).

Bemerkungen. [gewöhnliche Differentialgleichung]

- Gleichung (5.16) ist eine *gewöhnliche Differentialgleichung* (GDG). Grob gesagt, meinen wir damit eine Gleichung für eine gesuchte Funktion einer reellen Veränderlichen, in der die Funktion und ihre Ableitungen auftreten. Sei $y_0 \in \mathbb{R}$. Gemäss Beispiel 5.18 besitzt die GDG (5.16) zusammen mit der Anfangsbedingung $f(0) = y_0$ die eindeutige Lösung $f := y_0 e^{c\bullet}$. (Gemäss Beispiel 5.14(ii) löst diese Funktion die GDG tatsächlich.)
- Die gewöhnliche Differentialgleichung (5.17) beschreibt zum Beispiel radioaktiven Zerfall mit Zerfallskonstante $-c$. Die Variable $x = t$ spielt dabei die Rolle der Zeit. Die Grösse $f(t)$ ist die Anzahl Atome eines bestimmten Elementes, die zur Zeit t noch nicht zerfallen sind.

Als eine weitere Anwendung des Mittelwertsatzes erhalten wir die Regel von Bernoulli-de l'Hospital. Mit dieser Regel können wir gewisse "unbestimmte Grenzwerte der Form $\frac{0}{0}$" bestimmen. Um die Regel zu formulieren, benötigen wir folgende Begriffe. Seien $x_0 \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$, $y_0 \in \mathbb{R}^p$, $X \subseteq \mathbb{R}$, und $f : X \to \mathbb{R}^p$.

Definition 5.19 (rechts- und linksseitige Konvergenz)**.** *(i) Wir nehmen an, dass es ein $x_+ > x_0$ gibt so, dass $]x_0, x_+[\subseteq X$. Wir sagen, dass f im Punkt x_0* von rechts gegen y_0 konvergiert *g. d. w. die eingeschränkte Funktion $f|_{]x_0,x_+[}$ im Punkt x_0 gegen y_0 konvergiert*[9]*. In diesem Fall schreiben wir*

$$f(x) \to y_0 \quad (x \searrow x_0) \qquad \text{oder} \qquad f(x) \overset{x \searrow x_0}{\longrightarrow} y_0$$

und definieren den rechts-seitigen Grenzwert von f in x_0 *als*

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) := \lim_{x \downarrow x_0} f(x) := y_0. \tag{5.18}$$

(ii) Wir nehmen an, dass es ein $x_- < x_0$ gibt so, dass $]x_-, x_0[\subseteq X$. Wir sagen, dass f im Punkt x_0 von links gegen y_0 konvergiert *g. d. w. die eingeschränkte Funktion $f|_{]x_-,x_0[}$ im Punkt x_0 gegen y_0 konvergiert*[10]*. In diesem Fall schreiben wir*

$$f(x) \to y_0 \quad (x \nearrow x_0) \qquad \text{oder} \qquad f(x) \overset{x \nearrow x_0}{\longrightarrow} y_0$$

und definieren den links-seitigen Grenzwert von f in x_0 *als*

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) := \lim_{x \uparrow x_0} f(x) := y_0.$$

(iii) Wir sagen, dass f im Punkt x_0 von links *(*rechts*)* konvergiert *g. d. w. es ein $y_0 \in \mathbb{R}^p$ gibt wogegen f im Punkt x_0 von* links *(*rechts*) konvergiert.*

Bemerkungen. [Eindeutigkeit des rechts- und linksseitigen Grenzwertes, Schreibweisen dafür, Wert in x_0]

- Das y_0 wie in (i) ist eindeutig (falls es existiert). Der rechtsseitige Grenzwert (5.18) ist daher wohldefiniert.
- Der Wert von f in x_0 spielt im Zusammenhang mit rechts- und linksseitiger Konvergenz keine Rolle.
- In gewissen Büchern werden für den rechtsseitigen Grenzwert die Schreibweisen

$$\lim_{x \to x_0+} f(x), \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x), \qquad f(x_0+), \qquad f(x_0^+)$$

verwendet. Ich tue das nicht, da diese Schreibweisen verwirrend sein könnten. Die Ausdrücke x_0^+ und x_0+ haben nämlich keine selbstständige Bedeutung. Analoges gilt für linksseitige Grenzwerte.

[9] wie in Definition 4.25
[10] wie in Definition 4.25

Beispiel. [rechts- und linksseitige Konvergenz] Wir definieren die *Vorzeichenfunktion* (oder *Signumfunktion*) als

$$f := \operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} -1, & \text{für } x < 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ 1, & \text{für } x > 0. \end{cases} \tag{5.19}$$

Diese Funktion konvergiert im Punkt $x_0 := 0$ von rechts gegen $y_0 := 1$. Sie konvergiert im Punkt $x_0 := 0$ von links gegen $y_0 := -1$. Es gilt also

$$\lim_{x \searrow 0} \operatorname{sgn}(x) = 1, \qquad \lim_{x \nearrow 0} \operatorname{sgn}(x) = -1.$$

Wir können nun die Regel von Bernoulli-de l'Hospital formulieren. Seien $X \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : X \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in X$.

Korollar 5.20 (Regel von Bernoulli-de l'Hospital)**.** *Wir nehmen an, dass es ein* $x_+ \in]x_0, \infty[$ *gibt so, dass Folgendes gilt:*

(a) Es gilt $f(x_0) = 0 = g(x_0)$.

(b) Es gilt $]x_0, x_+[\subseteq X$.

(c) Die Funktionen f, g *sind auf* $[x_0, x_+[$ *stetig und auf* $]x_0, x_+[$ *differenzierbar.*

(d) Es gilt $g' \neq 0$ *auf* $]x_0, x_+[$*, d. h.* $g'(x) \neq 0$*, für jedes* $x \in]x_0, x_+[$.

(e) Der Quotient $\frac{f'}{g'}$ *konvergiert an der Stelle* x_0 *von rechts.*

Dann gilt Folgendes:

(i) $g \neq 0$ *auf* $]x_0, x_+[$ [11]

(ii) $\dfrac{f(x)}{g(x)} \overset{x \searrow x_0}{\longrightarrow} \lim\limits_{x \searrow x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Beweis: S. 199

Dieses Korollar wurde von Johann I Bernoulli entdeckt. Er verkaufte es Guillaume de L'Hospital. (Siehe Abbildungen 5.2 und 5.3.)

Bemerkungen. [Regel von Bernoulli-de l'Hospital, "$\frac{0}{0}$"]

[11] d. h. $g(x) \neq 0$ für jedes $x \in]x_0, x_+[$



Abbildung 5.2: Johann I Bernoulli, 1667–1748, Schweizer Mathematiker und Arzt.



Abbildung 5.3: Guillaume de L'Hospital, 1661–1704, französischer Mathematiker. Manchmal wird *Hôpital* statt *Hospital* geschrieben.

- Unter den Voraussetzungen des Korollars 5.20 gilt gemäss (ii), dass
$$\lim_{x\searrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\searrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$
- Eine analoge Aussage mit *links*seitigen Grenzwerten gilt ebenfalls.
- Gemäss den Voraussetzungen ((a),(c)) sind f und g im Punkt x_0 gleich 0 und stetig auf $[x_0, x_+[$. Gemäss Bemerkung 4.26(iii) konvergieren f und g daher im Punkt x_0 gegen 0. Formal ist der "unbestimmte Grenzwert $\frac{\lim_{x\searrow x_0} f(x)}{\lim_{x\searrow x_0} g(x)} = \frac{0}{0}$" gleich dem Grenzwert $\lim_{x\searrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$. Korollar 5.20 liefert daher eine Methode, den "unbestimmten Grenzwert $\frac{0}{0}$" zu berechnen.

Beispiel 5.21. [Regel von Bernoulli-de l'Hospital] Wir betrachten die Funktionen
$$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x, \qquad g(x) := e^x - 1.$$

Problem: Zeige, dass $\frac{f}{g}$ an der Stelle $x_0 := 0$ von rechts konvergiert und berechne $\lim_{x\searrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Überlegung: Formal ist $\lim_{x\searrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ der "unbestimmte Grenzwert $\frac{\lim_{x\searrow 0} f(x)}{\lim_{x\searrow 0} g(x)} = \frac{0}{0}$". Wir versuchen daher, Korollar 5.20 anzuwenden.

Lösung: Wir wählen $x_+ \in]0, \infty[$. Die Voraussetzungen ((a),(b)) des Korollars 5.20 sind erfüllt. Die Funktionen f, g sind differenzierbar mit Ableitungen
$$f'(x) \equiv 1, \qquad g'(x) = e^x.$$

Die Voraussetzungen ((c),(d)) sind daher erfüllt. Wir verwenden hier Satz 5.6 (Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit) und Beispiel 4.43(iv). Mit Hilfe von Satz 4.4(ii) folgt, dass der Quotient $\frac{f'}{g'}$ an der Stelle $x_0 = 0$ stetig ist. Gemäss Bemerkung 4.26(iii) konvergiert $\frac{f'}{g'}$ daher an der Stelle $x_0 = 0$ gegen $\frac{f'(0)}{g'(0)} = 1$. Daher ist auch die Voraussetzung (e) des Korollars 5.20 erfüllt.

Es gelten daher die Aussagen ((i),(ii)) des Korollars 5.20, d. h.

$$g \neq 0 \text{ auf }]0, x_+[, \qquad \frac{f(x)}{g(x)} \overset{x\searrow 0}{\longrightarrow} \lim_{x\searrow 0}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{e^x}\right) = 1,$$
$$\text{also} \qquad \lim_{x\searrow 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\searrow 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = 1.$$

(Wir konnten das Korollar 5.20 also tatsächlich anwenden, um diesen Grenzwert zu berechnen.)

Manchmal können wir einen "unbestimmten Grenzwert der Form $\frac{0}{0}$" durch mehrmaliges Anwenden der Regel von Bernoulli-de l'Hospital berechnen:

Beispiel. [zweimalige Anwendung von Bernoulli-de l'Hospital] Wir betrachten die Funktionen[12]

$$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x^2, \qquad g(x) := e^{x^2} - e^x + x.$$

Problem: Zeige, dass $\frac{f}{g}$ an der Stelle $x_0 := 0$ von rechts konvergiert und berechne $\lim_{x\searrow 0}\frac{f(x)}{g(x)}$.

Überlegungen: Formal ist $\lim_{x\searrow 0}\frac{f(x)}{g(x)}$ der "unbestimmte Grenzwert $\frac{\lim_{x\searrow 0} f(x)}{\lim_{x\searrow 0} g(x)} = \frac{0}{0}$". Wir versuchen daher, Korollar 5.20 anzuwenden. Aus den Beispielen 5.3((ii),(iii)), der Kettenregel (Satz 5.13) und der Summenregel (Satz 5.10(i)) folgt, dass f und g differenzierbar sind mit Ableitungen

$$f'(x) = 2x, \qquad g'(x) = e^{x^2}2x - e^x + 1. \tag{5.20}$$

Formal ist $\lim_{x\searrow 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ wieder der "unbestimmte Grenzwert $\frac{\lim_{x\searrow 0} f'(x)}{\lim_{x\searrow 0} g'(x)} = \frac{0}{0}$". Wir versuchen daher, das Korollar 5.20 mit f, g ersetzt durch $F := f'$ und $G := g'$ und $x_0 = 0$ anzuwenden, um diesen Grenzwert zu berechnen.

Lösung: Wie wir gesehen haben, sind f und g differenzierbar mit Ableitungen gegeben durch (5.20). Wir definieren

$$F := f', \qquad G := g'.$$

[12] Wir verwenden hier die Konvention $e^{x^k} := e^{(x^k)}$, also nicht $(e^x)^k = e^{kx}$.

Mit Hilfe der Ketten-, Summen- und Produktregel (Satz 5.13 und Satz 5.10((i),(ii)) folgt, dass F und G differenzierbar sind mit Ableitungen

$$F'(x) = 2, \qquad G'(x) = e^{x^2}(2x)^2 + e^{x^2}2 - e^x = e^{x^2}(4x^2+2) - e^x.$$

Es gilt $G'(x_0 = 0) = 1$. Da G' stetig ist, gibt es daher ein $x_+ \in]0, \infty[$ so, dass $G' \neq 0$ auf $]0, x_+[$. Wir wählen ein solches x_+. Die Voraussetzungen ((a),(b),(c),(d)) des Korollars 5.20 für F, G sind dann erfüllt. Mit Hilfe von Satz 4.4(ii) folgt, dass der Quotient $\frac{F'}{G'}$ an der Stelle $x_0 = 0$ stetig ist. Gemäss Bemerkung 4.26(iii) gilt daher

$$\frac{F'(x)}{G'(x)} \overset{x\searrow 0}{\longrightarrow} \frac{F'(0)}{G'(0)} = \frac{2}{1} = 2.$$

Daher ist auch die Voraussetzung (e) des Korollars 5.20 für F, G erfüllt.

Es gelten daher die Aussagen ((i),(ii)) des Korollars 5.20 für F, G, d. h.

$$\begin{aligned} &G \neq 0 \text{ auf }]0, x_+[, \\ &\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{F(x)}{G(x)} \overset{x\searrow 0}{\longrightarrow} \lim_{x\searrow 0} \frac{F'(x)}{G'(x)} = 2. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Somit ist Voraussetzung (e) des Korollars 5.20 für f, g erfüllt. Die Voraussetzungen ((a),(b),(c)) des Korollars 5.20 für f, g sind ebenfalls erfüllt. Die Voraussetzung (d) folgt aus den Tatsachen $g'(0) = G(0) = 0$, $G'(x) > 0$, $\forall x \in]x_0, x_+[$, und Korollar 5.16(iii).

Es gelten daher die Aussagen ((i),(ii)) des Korollars 5.20 für f, g, d. h.

$$\begin{aligned} &g \neq 0 \text{ auf }]0, x_+[, \\ &\frac{f(x)}{g(x)} \overset{x\searrow 0}{\longrightarrow} \lim_{x\searrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \\ &\qquad = 2 \qquad \text{(gemäss (5.21)).} \end{aligned}$$

Es gilt also

$$\lim_{x\searrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\searrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 2.$$

(Wir konnten das Korollar 5.20 also tatsächlich anwenden, um diesen Grenzwert zu berechnen.)

In der nächsten Bemerkung werden wir die folgende Bemerkung verwenden.

Bemerkung 5.22. [Quotientenregel für Konvergenz von Funktionen an einer Stelle] Seien $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f, g : X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{X}$ so, dass f und g an der Stelle x_0 gegen y_0 respektive z_0 konvergieren und $z_0 \neq 0$. Dann konvergiert $\frac{f}{g}$ an der Stelle x_0 gegen $\frac{y_0}{z_0}$.

Bemerkung. [Voraussetzung $f(x_0) = 0 = g(x_0)$ in Bernoulli-de l'Hospital notwendig] Bevor wir Korollar 5.20 anwenden, ist es wichtig, die Voraussetzungen dieses Korollars zu überprüfen, insbesondere Bedingung (a). Falls $f(x_0) \neq 0$ oder $g(x_0) \neq 0$, dann können wir die Regel nicht anwenden. Im folgenden Beispiel geht das Anwenden der Regel auch tatsächlich schief. Wir betrachten

$$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := 1, \qquad g(x) := x + 1, \qquad x_0 := 0.$$

Die Funktion g ist ein Polynom und daher stetig. Gemäss Bemerkung 4.26(iii) konvergiert g daher an der Stelle $x_0 = 0$ gegen $g(0) = 1$. Mittels der Quotientenregel (Bemerkung 5.22) folgt daraus, dass

$$\frac{f}{g} \to \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \text{an der Stelle } x_0 = 0.$$

Es gilt jedoch

$$\frac{f'}{g'} \to 0 \qquad \text{an der Stelle } x_0 = 0 \qquad \text{und daher} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \neq 0 = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Wir dürfen in diesem Beispiel die Regel von Bernoulli-de l'Hospital nicht anwenden, da die Voraussetzung (a) nicht erfüllt ist.

Bemerkungen. [Konvergenz ohne die Regel von Bernoulli-de l'Hospital]

- Oft können wir ohne die Regel von Bernoulli-de l'Hospital auf einfachere Art zeigen, dass ein Quotient zweier Funktionen an einer Stelle konvergiert. Betrachten wir zum Beispiel die Funktionen

  $$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x^3 - 1, \qquad g(x) := x^2 - 1$$

  und den Quotienten $\frac{f}{g} : X := \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \to \mathbb{R}$.

  Behauptung: Der Quotient $\frac{f}{g}$ konvergiert an der Stelle $x_0 := 1$ gegen $\frac{3}{2}$.

  Beweis: Für jedes $x \in X$ gilt $f(x) = x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$, $g(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ und daher

  $$\frac{f}{g}(x) = \frac{F}{G}(x), \qquad F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad F(x) := x^2 + x + 1, \qquad G(x) := x + 1. \tag{5.22}$$

  Die Funktion F ist ein Polynom und daher stetig. Gemäss Bemerkung 4.26(iii) konvergiert F daher an der Stelle $x_0 = 1$ gegen $F(1) = 3$. Aus einem analogen Grund konvergiert G an der Stelle 1 gegen $G(1) = 2$. Mittels (5.22) und der Quotientenregel (Bemerkung 5.22) folgt daraus, dass

  $$\frac{f}{g} \to \frac{F(1)}{G(1)} = \frac{3}{2} \qquad \text{an der Stelle } x_0 = 1,$$

  wie behauptet.

- Wir können diese Konvergenz auch mittels der Regel von Bernoulli-de l'Hospital zeigen. (Überlegen Sie sich das!)
- Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{e^x - 1}{x}.$$

Behauptung: f konvergiert an der Stelle $x_0 := 0$ gegen 1.

Beweis: Gemäss Definition 5.1 (Ableitung) und Bemerkung 5.7 gilt, dass

$$\frac{e^h - 1}{h} \to \exp'(0) \quad (h \to 0).$$

Gemäss dem Goethe-Prinzip 1.23 bedeutet das, dass

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x} \to \exp'(0) = \exp(0) = 1 \quad (x \to 0). \tag{5.23}$$

- Wir können das in Beispiel (5.21) gestellte Problem auch mittels der Quotientenregel für die Konvergenz von Funktionen behandeln. Dazu betrachten wir die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{x}{e^x - 1}.$$

Behauptung: f konvergiert im Punkt $x_0 := 0$ gegen 1.

Beweis: Für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{x}{e^x - 1} &= \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x}} \\ &\xrightarrow{x \to 0} \frac{1}{1} \qquad \text{(gemäss (5.23) und der Quotientenregel, Bemerkung 5.22)} \\ &= 1, \end{aligned}$$

wie behauptet.

Im Beweis des Korollars werden wir folgendes Lemma verwenden. Seien $n, p, q \in \mathbb{N}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^p$, $F : X \to Y$, $G : Y \to \mathbb{R}^q$, $x_0 \in \overline{X}$, $y_0 \in \overline{Y}$ und $z_0 \in \mathbb{R}^q$.

Lemma 5.23 (Konvergenz einer verknüpften Funktion, Substitution für Grenzwerte)**.** *Falls F an der Stelle x_0 gegen y_0 konvergiert und G an der Stelle y_0 gegen z_0 konvergiert, dann konvergiert die verknüpte Funktion $G \circ F$ an der Stelle x_0 gegen z_0.*

Beweis: [DK04a, Theorem 1.4.2, p. 17]

Bemerkung. Unter den Voraussetzungen dieses Lemmas gilt also

$$\lim_{x\to x_0} G\circ F(x) = \lim_{y\to y_0} G(y).$$

Dieses Lemma besagt also, dass wir auf der linken Seite $F(x)$ durch y und $x \to x_0$ durch $y \to y_0$ substituieren (=ersetzen) dürfen. Das ist plausibel, da gemäss Voraussetzung ja $F(x) \to y_0$ für $x \to x_0$ gilt. Wir sollten uns an dieser Stelle jedoch daran erinnern, dass "$y \to y_0$" keine selbstständige (mathematische) Bedeutung hat. Nur der ganze Ausdruck "$G(y) \to z_0$ für $y \to y_0$" (respektive "$\lim_{y\to y_0} G(y)$") hat eine Bedeutung. (Siehe Definition 4.25.)

Beweis des Korollars 5.20: Wir wählen ein x_+ wie in der Voraussetzung des Korollars. (i): Sei $x \in]x_0, x_+[$. Wegen Voraussetzung (c) gibt es gemäss dem Mittelwertsatz (Satz 5.15) ein $y \in]x_0, x[$ so, dass

$$\begin{aligned}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} &= g'(y)\\ &\neq 0 \qquad \text{(wegen der Voraussetzung (d))}.\end{aligned} \tag{5.24}$$

(Gemäss Voraussetzung (b) ist $g(x)$ wohldefiniert.) Gemäss Voraussetzung (a) gilt $g(x_0) = 0$. Mittels (5.24) folgt daraus, dass $g(x) \neq 0$. Das beweist (i).

(ii): Sei $x \in]x_0, x_+[$. Wir definieren die Funktion

$$h := h_x := \frac{f(x)}{g(x)}g - f : [x_0, x] \to \mathbb{R}, \qquad h(y) = \frac{f(x)}{g(x)}g(y) - f(y).$$

Wegen Voraussetzung (c) ist diese Funktion stetig und auf $]x_0, x[$ differenzierbar. Wegen unserer Voraussetzung (a) gilt $h(x_0) = 0$. Es gilt auch $h(x) = 0$. Gemäss dem Mittelwertsatz (Satz 5.15) gibt es daher ein $y_x \in]x_0, x[$ so, dass

$$\begin{aligned}0 = h'(y_x) &= \frac{f(x)}{g(x)}g'(y_x) - f'(y_x),\\ \text{d. h.} \qquad \frac{f'(y_x)}{g'(y_x)} &= \frac{f(x)}{g(x)}.\end{aligned} \tag{5.25}$$

Wir definieren

$$F :]x_0, x_+[\to \mathbb{R}, \quad F(x) := y_x, \qquad G := \frac{f'}{g'} :]x_0, x_+[\to \mathbb{R}, \quad G(y) = \frac{f'(y)}{g'(y)}.$$

Für jedes $x \in]x_0, x_+[$ gilt

$$\begin{aligned}G\circ F(x) &= G(y_x)\\ &= \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{(wegen (5.25))}.\end{aligned} \tag{5.26}$$

Für jedes $x \in]x_0, x_+[$ gilt, dass $x_0 < y_x < x$. Daraus folgt, dass F an der Stelle x_0 gegen x_0 konvergiert. Gemäss unserer Voraussetzung (e) konvergiert G an der Stelle $y_0 := x_0$. Mittels Lemma 5.23 folgt daher, dass $G \circ F$ an der Stelle x_0 gegen $z_0 := \lim_{y \to y_0} G(y)$ konvergiert. Wegen (5.26) konvergiert daher die Einschränkung $\frac{f}{g}\big|_{]x_0, x_+[}$ an der Stelle x_0 gegen z_0, d. h.

$$\frac{f(x)}{g(x)} \overset{x \searrow x_0}{\longrightarrow} \lim_{x \searrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Das beweist (ii) und schliesst den Beweis von Korollar 5.20 ab. □

Als nächstes behandeln wir den Umkehrsatz, welcher Folgendes besagt. Jede auf einem offenen Intervall definierte differenzierbare reellwertige Funktion f ist umkehrbar, falls ihre Ableitung positiv ist. Die Ableitung der Inversen von f in y ist gleich dem Inversen[13] der Ableitung von f in $f^{-1}(y)$. Sei I ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$. Wir definieren $\sup f$ wie in (4.15) und $\inf f$ analog. Es gilt also

$$\sup f = \sup_{x \in I} f(x) = \sup \operatorname{im}(f), \qquad \inf f := \inf_{x \in I} f(x) = \inf \operatorname{im}(f).$$

Wir schreiben

$$J := \big] \inf f, \sup f \big[.$$

Satz 5.24 (Umkehrsatz)**.** *Wir nehmen an, dass f differenzierbar ist und $f' \neq 0$. Dann gilt Folgendes:*

(i) Das Bild von f ist durch das offene Intervall J gegeben,

$$\operatorname{im}(f) = J.$$

(ii) Die Funktion $f : I \to J$ ist bijektiv.

(iii) Die Umkehrfunktion $f^{\langle -1 \rangle} = f^{-1} : J \to I$ ist differenzierbar mit

$$(f^{-1})'(y) = f'\big(f^{-1}(y)\big)^{-1} = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)}, \qquad \forall y \in J. \tag{5.27}$$

Beweis: [Stra, Satz 5.2.2., S. 87]. (Dieser Satz behandelt den Fall $f' > 0$. Der Fall $f' < 0$ kann auf diesen Fall zurückgeführt werden.)

Bemerkungen. [Beweis des Umkehrsatzes, Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion]

[13] Mit dem (*multiplikativ*) *Inversen* einer Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ meinen wir ihren Kehrwert $z^{-1} = \frac{1}{z}$.

- (Beweis) Der Beweis des Satzes 5.24 beruht auf Korollar 5.16(iii) (positive Ableitung impliziert strenge Monotonie) und den Sätzen 5.6 (Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit) und 4.52 (Bild, strenge Monotonie der Umkehrfunktion).

- (Formel für $(f^{-1})'$) Unter der Annahme, dass $f : I \to J$ bijektiv ist und die Umkehrfunktion f^{-1} differenzierbar ist, folgt die Formel (5.27) aus der Kettenregel. Es gilt nämlich
$$\mathrm{id}_J = f \circ f^{-1} \tag{5.28}$$
Sei $y \in J$. Es gilt
$$\begin{aligned} 1 &= \mathrm{id}'(y) \qquad \text{(gemäss Beispiel 5.3(i))} \\ &= f'(f^{-1}(y))(f^{-1})'(y) \qquad \text{gemäss ((5.28) und Satz 5.13 (Kettenregel)).} \end{aligned}$$
Daraus folgt, dass
$$(f^{-1})'(y) = f'(f^{-1}(y))^{-1}.$$
Das beweist (5.27).

Beispiel 5.25. [Differenzierbarkeit und Ableitung des Logarithmus, Umkehrsatz] Gemäss Beispiel 5.3(iii) ist die reelle Exponentialfunktion $\exp|_{\mathbb{R}}$ differenzierbar mit Ableitung $\exp' = \exp$. Diese Funktion ist (strikt) positiv. Gemäss Satz 5.24(i) (Umkehrsatz) ist das Bild von exp durch das offene Intervall $J :=]\inf \exp, \sup \exp[$ gegeben. Gemäss Satz 5.24(iii) ist die Umkehrfunktion $\log = \exp^{-1} : J \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitung
$$\begin{aligned} \log'(y) &= \frac{1}{\exp'(\exp^{-1}(y))} \\ &= \frac{1}{\exp(\exp^{-1}(y))} \\ &= \frac{1}{y}. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Bemerkung. [Bild von $\exp|_{\mathbb{R}}$](Bild von $\exp|_{\mathbb{R}}$) Dass das Bild von $\exp|_{\mathbb{R}}$ ein offenes Intervall ist, haben wir schon in Beispiel 4.43(iv) herausgefunden. Gemäss diesem Beispiel ist dieses Bild nämlich durch $\mathrm{im}\,(\exp|_{\mathbb{R}}) = \exp(\mathbb{R}) =]0, \infty[$ gegeben.

Mittels Beispiel 5.25 können wir die Ableitung der allgemeinen Potenzfunktion berechnen. Diese Funktion ist wie folgt definiert. Sei $a \in \mathbb{R}$.

Definition 5.26 (allgemeine Potenzfunktion)**.** *Wir definieren die* a-te Potenzfunktion *als*
$$p_a :]0, \infty[\to \mathbb{R}, \quad p_a(x) := x^a = e^{a \log x} = \exp\big(a \log x\big). \tag{5.30}$$

Bemerkung. [allgemeine Potenzfunktion, Wurzelfunktion]

- (natürlicher Exponent) Für $a = k \in \mathbb{N}$ stimmt p_a mit der Einschränkung auf $]0,\infty[$ der in Beispiel 4.43((ii),(iii)) definierten Funktion überein. Das folgt aus dem Additionstheorem für exp. (Überprüfen Sie das!)
- (Wurzelfunktion) Sei $k \in \mathbb{N}$. Wir definieren die k-te Wurzelfunktion $\sqrt[k]{\ }$ wie in Definition 4.47 als die Umkehrfunktion der k-ten Potenzfunktion. Die Funktion $p_{\frac{1}{k}}$ (wie in Definition 5.26) ist gegeben durch die Einschränkung von $\sqrt[k]{\ }$ auf $]0,\infty[$,

  $$p_{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{\ }|_{]0,\infty[}.$$

  Das folgt aus

  $$p_{\frac{1}{k}}(x)^k = \left(e^{\frac{1}{k}\log x}\right)^k = e^{\log x} = x, \qquad \forall x \in]0,\infty[,$$

  und Injektivität der eingeschränkten Potenzfunktion $p_k|_{]0,\infty[}$. (Überprüfen Sie das!)

Folgendes Beispiel ist eine Anwendung des Beispiels 5.25 und der Kettenregel.

Beispiel 5.27. [Differenzierbarkeit und Ableitung der allgemeinen Potenzfunktion]

Behauptung: Die Funktion p_a (wie in (5.30)) ist differenzierbar mit Ableitung

$$p_a'(x) = \begin{cases} ax^{a-1}, & \text{falls } a \neq 0, \\ 0, & \text{falls } a = 0. \end{cases}$$

Beweis: Im **Fall** $a = 0$ ist $p_0 \equiv 1$ und die Behauptung darum wahr.

Fall $a \neq 0$: Gemäss (5.30) gilt

$$p_a = \exp \circ (a \log).$$

Gemäss Beispiel 5.25 ist die Funktion log differenzierbar mit Ableitung gegeben durch $\log'(x) = \frac{1}{x}$. Mittels Bemerkung 5.11(i) folgt, dass $a \log$ differenzierbar ist mit Ableitung

$$(a \log)'(x) = \frac{a}{x}. \tag{5.31}$$

Da exp differenzierbar, folgt aus der Kettenregel (Satz 5.13), dass die Funktion $p_a = \exp \circ (a \log)$ differenzierbar ist mit Ableitung

$$\begin{aligned} p_a'(x) &= \exp'\big((a\log)(x)\big)\big(a\log\big)'(x) \\ &= \exp\big(a\log x\big)\frac{a}{x} \qquad \text{(wegen (5.31))} \\ &= a\exp\big(a\log x - \log x\big) \qquad \text{(wegen } \frac{1}{x} = x^{-1} = e^{-\log x} \text{ und des Additionstheorems, Korollar 3.43)} \\ &= a\exp\big((a-1)\log x\big) \\ &= ax^{a-1} \qquad \text{(gemäss (5.30)).} \end{aligned}$$

Das beweist die Behauptung.

Dieses Beispiel verallgemeinert Beispiel 5.12(ii), in welchem $a = n$ eine natürliche Zahl war.

Bemerkung. (Potenzgesetze) Für alle $a, b \in]0, \infty[$, $x, y \in \mathbb{R}$ gelten die Potenzgesetze

$$\begin{aligned} a^{x+y} &= a^x a^y, \\ a^{xy} &= (a^x)^y, \\ (ab)^x &= a^x b^x. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Für (5.32) siehe Übungsserie 10. Für die anderen Gleichheiten siehe [Bla03, (6.6), S. 200].

5.4 Trigonometrische, Arkus-, Hyperbel- und Areafunktionen

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96a, 2.5] und [Stra, 5.3].

5.4.1 Die trigonometrischen Funktionen Kosinus und Sinus, Existenz der cis-Funktion

In Definition 2.21 haben wir $\mathrm{cis} = (\mathrm{cis}_1, \mathrm{cis}_2)$ als die eindeutige differenzierbare Funktion $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definiert, welche folgende Bedingungen erfüllt:

$$\|\gamma\| \equiv 1, \tag{5.33}$$

$$\|\gamma'\| \equiv 1. \tag{5.34}$$

$$\gamma(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5.35}$$

$$\gamma'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{5.36}$$

Wir haben Kosinus und Sinus als die Komponenten der cis-Funktion definiert, d. h.

$$\cos := \mathrm{cis}_1,\ \sin := \mathrm{cis}_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Lemma 2.20 besagt, dass es tatsächlich eine eindeutige Funktion γ wie oben gibt. Wir können die Existenz einer solchen Funktion jetzt beweisen. Sie folgt aus dem folgenden Satz. Wir erinnern uns an die Definitionen 3.25 und 3.48 der Funktionen

$$\mathrm{Exp}, \mathrm{Cos}, \mathrm{Sin} : \mathbb{C} \to \mathbb{C},$$

$$\mathrm{Exp}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad \mathrm{Cos}(z) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{2j}}{(2j)!}, \quad \mathrm{Sin}(z) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{2j+1}}{(2j+1)!}. \tag{5.37}$$

Satz 5.28 $(\mathrm{Cos}, \mathrm{Sin})$**.** *(i) ("Pythagoras-Eigenschaft") Es gilt*

$$\mathrm{Cos}^2\,\varphi + \mathrm{Sin}^2\,\varphi = 1, \qquad \forall \varphi \in \mathbb{R}. \tag{5.38}$$

(ii) Die eingeschränkten Funktionen $\mathrm{Sin}\,|_{\mathbb{R}}$ *und* $\mathrm{Cos}\,|_{\mathbb{R}}$ *sind differenzierbar mit Ableitungen*

$$(\mathrm{Sin}\,|_{\mathbb{R}})' = \mathrm{Cos}\,|_{\mathbb{R}}, \qquad (\mathrm{Cos}\,|_{\mathbb{R}})' = -\,\mathrm{Sin}\,|_{\mathbb{R}}.$$

Beweis der Existenzaussage von Lemma 2.20: Gemäss Satz 5.28 erfüllt die Funktion

$$\gamma := (\mathrm{Cos}, \mathrm{Sin})|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

die Bedingungen (5.33,5.34). Aus (5.37) und Satz 5.28(ii) folgt, dass

$$\gamma(0) = \big(\mathrm{Cos}(0), \mathrm{Sin}(0)\big) = (1, 0), \qquad \gamma'(0) = \big(-\mathrm{Sin}(0), \mathrm{Cos}(0)\big) = (0, 1).$$

Daher erfüllt γ die Bedingungen (5.35,5.36). Daher erfüllt γ alle Bedingungen von Lemma 2.20. Das beweist die Existenzaussage dieses Lemmas. □

Bemerkung 5.29. [Cos, Sin, Kosinus, Sinus] Gemäss diesem Beweis erfüllt die Einschränkung $\gamma := (\mathrm{Cos}, \mathrm{Sin})|_{\mathbb{R}}$ die Bedingungen der Definition 2.21. Daraus folgt, dass $\gamma = \mathrm{cis} = (\cos, \sin)$, d. h.

$$\mathrm{Cos}\,|_{\mathbb{R}} = \cos, \qquad \mathrm{Sin}\,|_{\mathbb{R}} = \sin\,.$$

Das beweist die Aussage von Satz 3.49.

Beweis des Satzes 5.28: (i): Sei $\varphi \in \mathbb{R}$. Gemäss (5.37) gilt

$$\mathrm{Cos}(-\varphi) = \mathrm{Cos}\,\varphi, \qquad \mathrm{Sin}(-\varphi) = -\,\mathrm{Sin}\,\varphi. \tag{5.39}$$

Gemäss (3.30) gilt

$$\mathrm{Exp}(i\varphi) = \mathrm{Cos}\,\varphi + i\,\mathrm{Sin}\,\varphi. \tag{5.40}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{Exp}(i\varphi)} &= \mathrm{Cos}\,\varphi - i\,\mathrm{Sin}\,\varphi \qquad (\text{gemäss (5.40)}) \\ &= \mathrm{Cos}(-\varphi) + i\,\mathrm{Sin}(-\varphi) \qquad (\text{gemäss (5.39)}) \\ &= \mathrm{Exp}(-i\varphi) \qquad (\text{gemäss (5.40)}). \end{aligned} \tag{5.41}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{Cos}^2\varphi + \operatorname{Sin}^2\varphi &= |\operatorname{Exp}(i\varphi)|^2 \qquad \text{(wegen (5.40))}\\ &= \operatorname{Exp}(i\varphi)\overline{\operatorname{Exp}(i\varphi)} \qquad \text{(gemäss (2.29))}\\ &= \operatorname{Exp}(i\varphi)\operatorname{Exp}(-i\varphi) \qquad \text{(gemäss (5.41))}\\ &= 1 \qquad \text{(Additionstheorem, Korollar 3.43).}\end{aligned}$$

Das beweist (i).

(ii): Ein Argument wie in Beispiel 5.3(iii) zeigt, dass die Abbildung $\operatorname{Exp}(i\bullet) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ differenzierbar ist mit Ableitung

$$\operatorname{Exp}(i\bullet)' = i\operatorname{Exp}(i\bullet).$$

(Siehe [Stra, Beispiel 5.1.1. iv)].) Mittels (5.40) folgt daraus, dass $\operatorname{Cos}|_{\mathbb{R}}$ und $\operatorname{Sin}|_{\mathbb{R}}$ differenzierbar sind mit Ableitungen

$$(\operatorname{Cos}|_{\mathbb{R}})' = -\operatorname{Sin}|_{\mathbb{R}}, \qquad (\operatorname{Sin}|_{\mathbb{R}})' = \operatorname{Cos}|_{\mathbb{R}}. \tag{5.42}$$

Das zeigt (ii).

Das schliesst den Beweis des Satzes 5.28 ab. □

5.4.2 Arkusfunktionen

Falls wir den Definitions- und den Zielbereich der trigonometrischen Funktionen geeignet einschränken, werden diese Funktionen bijektiv. Ihre Umkehrfunktionen heissen *Arkusfunktionen* oder *zyklometrische Funktionen*. Die folgende Proposition präzisiert die obige Aussage und gibt die Ableitungen der Arkusfunktionen an.

Proposition 5.30 (Arkusfunktionen, Ableitungen davon)**.** *(i) (eingeschränkter Sinus bijektiv) Die Funktion* $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ *ist bijektiv.*

(ii) (Arkussinus stetig) Die Umkehrfunktion

$$\arcsin := \sin^{\langle -1\rangle} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

ist stetig.

(iii) (Ableitung des Arkussinus) Die Einschränkung $\arcsin|_{]-1,1[}$ *ist differenzierbar mit Ableitung*

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \qquad \forall y \in]-1, 1[.$$

(iv) (eingeschränkter Kosinus bijektiv) Die Funktion $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ *ist bijektiv.*

(v) (Arkuskosinus ist stetig) Die Umkehrfunktion

$$\arccos := \cos^{\langle -1 \rangle} : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

ist stetig.

(vi) (Ableitung des Arkuskosinus) Die Einschränkung $\arccos|_{]-1,1[}$ *ist differenzierbar mit Ableitung*

$$\arccos'(y) = \frac{1}{-\sqrt{1-y^2}}, \qquad \forall y \in]-1, 1[.$$

(vii) (Ableitung des Tangens) Die Funktion $\tan := \frac{\sin}{\cos} : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ *ist differenzierbar mit Ableitung*

$$\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}.$$

(viii) (eingeschränkter Tangens bijektiv) Die Funktion $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ *ist bijektiv.*

(ix) (Arkustangens) Die Umkehrfunktion

$$\arctan := \tan^{\langle -1 \rangle} : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

ist differenzierbar mit Ableitung

$$\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}, \qquad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Bemerkungen. [Umkehrfunktionen der eingeschränkten trigonometrischen Funktionen]

- Aus Definition 2.21 folgt, dass der Sinus Werte in $[-1, 1]$ annimmt. Die eingeschränkte Funktion $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ ist daher sinnvoll. (Wir schränken hier sowohl den Definitions- als auch den Wertebereich ein.)

- Die Umkehrfunktion des Sinus, $\arcsin = \sin^{\langle -1 \rangle}$, heisst *Arkussinus* (von lateinisch *arcus* = Bogen). Für jedes $y \in [0, 1]$ ist $\varphi := x := \arcsin y$ die Länge des Bogens auf dem Einheitskreis vom Punkt $A := (1, 0)$ bis zum Punkt $B := \left(\sqrt{1-y^2}, y\right)$. Siehe Abbildung 5.4.

- Wir verwenden hier die Notation $f^{\langle -1 \rangle}$ für die Umkehrfunktion von f, nicht f^{-1}, da f^{-1} als $\frac{1}{f}$ interpretiert werden kann.

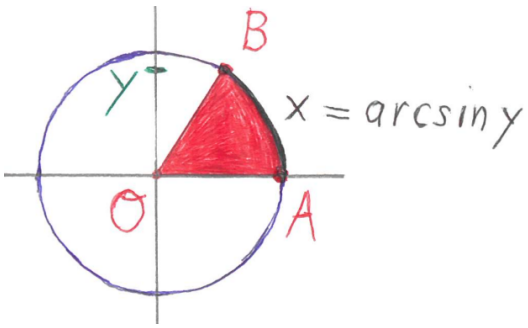


Abbildung 5.4: Blau: Einheitskreis. Schwarz: der Bogen auf dem Einheitskreis. Die Länge dieses Bogens ist gleich $\arcsin y$. Diese Länge ist gleich zweimal der Flächeninhalt des Sektors OAB.

Beweis der Proposition 5.30: (i): Wir zeigen, dass

$$\sin\left(\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)=[-1,1]. \tag{5.43}$$

Die Inklusion "$\subseteq$" folgt aus Definition 2.21. Wir zeigen die umgekehrte Inklusion "$\supseteq$". Es gilt $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$ und $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$. Da der Sinus stetig ist, folgt daraus gemäss dem Zwischenwertsatz (Satz 4.42), dass in (5.43) die Inklusion "$\supseteq$" gilt. Das zeigt (5.43).

Gemäss Satz 3.49 und Satz 5.28(ii) gilt

$$\sin'=\cos\,. \tag{5.44}$$

Gemäss Definition 2.22 ist $\pi:=2\varphi_0$, wobei $\varphi_0\in]0,\infty[$ die kleinste positive Nullstelle von cos ist. Also gilt $\cos>0$ auf $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. Gemäss (5.39) gilt $\cos(-\varphi)=\cos(\varphi)$, für jedes $\varphi\in\mathbb{R}$. Es folgt, dass $\cos>0$ auch in $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$. Mittels (5.44) folgt daraus, dass

$$\sin'=\cos>0 \qquad \text{in} \qquad \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[.$$

Gemäss Korollar 5.16(iii) folgt daraus, dass der Sinus auf dem Intervall $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ streng monoton wachsend ist. Da diese Funktion stetig ist, folgt daraus, dass sie auch auf dem abgeschlossenen Intervall $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ streng monoton wachsend ist. Gemäss Bemerkung 4.45 ist der Sinus daher auf $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ injektiv. Das zeigt (i).

(ii) folgt aus Satz 4.50 oder Satz 4.52(ii).

(iii): Sei $y\in]-1,1[$. Wir schreiben

$$x:=\sin^{\langle -1\rangle}(y).$$

Gemäss dem Umkehrsatz (Satz 5.24(iii)) ist $\sin^{\langle -1\rangle}$ differenzierbar mit Ableitung

$$\begin{aligned}(\sin^{\langle -1\rangle})'(y) &= \frac{1}{\sin'(x)} \\ &= \frac{1}{\cos x} \qquad \text{(gemäss (5.44))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}} \qquad \text{(da } \sin^2+\cos^2=1 \text{ und } \cos>0 \text{ auf } \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\text{)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.\end{aligned}$$

Das beweist (iii).

Die Aussagen ((iv),(v),(vi)) folgen aus analogen Argumenten. Für ((vii),(viii),(ix)) siehe Übungsserie 10. Das schliesst den Beweis der Proposition 5.30 ab. □

5.4.3 Hyperbel- und Areafunktionen

Die *Hyperbelfunktionen* sind eng mit den trigonometrischen Funktionen verwandt. Beispiele davon sind der *hyperbolische Kosinus* cosh. Das ist der gerade Teil der Exponentialfunktion. Der *hyperbolische Sinus* sinh ist der ungerade Teil der Exponentialfunktion. Es gilt die Identität

$$\cosh^2 - \sinh^2 = 1.$$

Das bedeutet, dass die Funktion $(\cosh, \sinh) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ Werte auf der Einheits*hyperbel* annimmt. Die Identität $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$ ist analog zur Identität $\cos^2 + \sin^2 = 1$, welche besagt, dass die Funktion $(\cos, \sin) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ Werte auf dem Einheitskreis annimmt. Das ist der Grund für die Bezeichnung *Hyperbelfunktion* für cosh und sinh.

Der hyperbolische Kosinus tritt in Anwendungen zum Beispiel als Kettenlinie auf.

Die *Areafunktionen* sind die Umkehrfunktionen der (geeignet eingeschränkten) Hyperbelfunktionen. Ein Beispiel davon ist der *Areasinus hyperbolicus* arsinh. Dieser ist durch zweimal die *Fläche* eines bestimmten Hyperbelsektors gegeben. Das ist der Grund für die Bezeichnung *Areafunktion* für arsinh (lateinisch *area* = Fläche).

Definition 5.31 (Hyperbelfunktionen)**.** *Wir definieren den* hyperbolischen Kosinus*, den* hyperbolischen Sinus *und den* hyperbolischen Tangens *als die Funktionen* $\cosh, \sinh, \tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *gegeben durch*

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Siehe Abbildung 5.5.

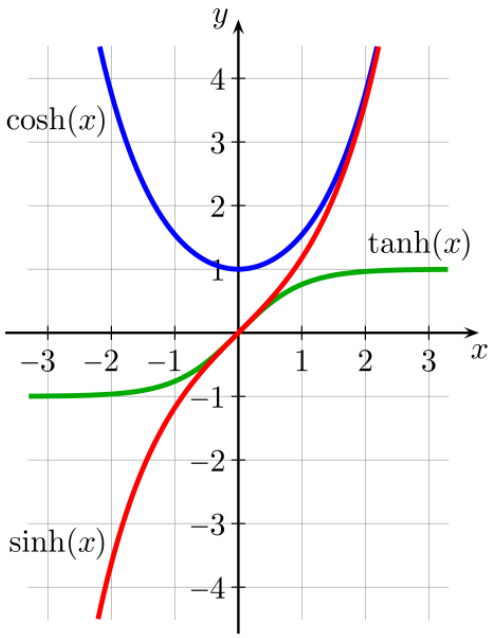


Abbildung 5.5: Der hyperbolische Kosinus, Sinus und Tangens.

Bemerkungen. [Hyperbelfunktionen, Exponentialfunktion]

- Der hyperbolische Kosinus wird auch *Cosinus hyperbolicus* genannt. Analoges gilt für sinh und tanh.
- Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definieren wir ihren *geraden* und *ungeraden* Teil als

  $$f_{\text{even}}, f_{\text{odd}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_{\text{even}}(x) := \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \qquad f_{\text{odd}}(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

  Der gerade Teil von f ist *gerade*, d. h. $f_{\text{even}}(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Der ungerade Teil von f ist *ungerade*, d. h. $f_{\text{odd}}(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- Der hyperbolische Kosinus (bzw. Sinus) ist der gerade (bzw. ungerade) Teil der Exponentialfunktion, d. h.

  $$\cosh = \exp_{\text{even}}, \qquad \sinh = \exp_{\text{odd}}.$$

Die folgende Proposition fasst Eigenschaften der Hyperbelfunktionen zusammen und gibt die Ableitungen der Hyperbel- und Areafunktionen (Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen) an.

Proposition 5.32 (Hyperbel- und Areafunktionen)**.** *Es gilt:*

(i) $\cosh(x) = \mathrm{Cos}(ix)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

(ii) $i\sinh(x) = \mathrm{Sin}(ix)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

(iii) *("hyperbolischer Pythagoras")* $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$

(iv) *(Additionstheorem für* cosh*)* $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

(v) *(Additionstheorem für* sinh*)* $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

(vi) *Die Funktionen* $\cosh, \sinh, \tanh$ *sind differenzierbar.*

(vii) $\cosh' = \sinh$

(viii) $\sinh' = \cosh$

(ix) $\tanh' = 1 - \tanh^2 = \dfrac{1}{\cosh^2}$

(x) *Die (eingeschränkten) Funktionen* $\cosh : [0,\infty[\to [1,\infty[$, $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *und* $\tanh : \mathbb{R} \to]-1,1[$ *sind bijektiv.*

(xi) *Die Umkehrfunktion* $\mathrm{arcosh} := \cosh^{\langle -1\rangle} : [1,\infty[\to [0,\infty[$ *ist stetig.*

(xii) *(Ableitungen der Umkehrfunktionen) Die eingeschränkte Umkehrfunktion* $\mathrm{arcosh} = \cosh^{\langle -1\rangle} :]1,\infty[\to]0,\infty[$ *und die Umkehrfunktionen* $\mathrm{arsinh} := \sinh^{\langle -1\rangle} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{artanh} := \tanh^{\langle -1\rangle} :]-1,1[\to \mathbb{R}$ *sind differenzierbar mit Ableitungen gegeben durch:*

$$\mathrm{arcosh}'\, y = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$$
$$\mathrm{arsinh}'\, y = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$$
$$\mathrm{artanh}'\, y = \frac{1}{1-y^2}$$

Bemerkungen. [Hyperbel- und Areafunktionen, Namen davon, (hyperbolischer) Satz des Pythagoras]

- Gemäss ((i),(ii)) hängen die komplexen trigonometrischen Funktionen $\mathrm{Cos}, \mathrm{Sin}$ und die hyperbolischen Funktionen $\cosh, \sinh$ eng miteinander zusammen.
- (trigonometrische Funktionen, Satz des Pythagoras) Sei $x \in \mathbb{R}$. Gemäss Definition 2.21 gilt
$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1. \tag{5.45}$$

Das bedeutet, dass im rechtwinkligen Dreieck mit Ecken $\binom{0}{0}, \binom{\cos x}{0}, \binom{\cos x}{\sin x}$ die Summe der Quadrate der Längen der Katheten gleich dem Quadrat der Länge der Hypothenuse ist. Das ist der *Satz des Pythagoras*.

Die Identität (5.45) bedeutet, dass das Bild von $\mathrm{cis} = (\cos, \sin)$ im *Einheitskreis*

$$\left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, u^2 + v^2 = 1\right\}$$

enthalten ist.[14]

- (Name *Hyperbelfunktion*, hyperbolischer Satz des Pythagoras) Analog zu (5.45) bedeutet die Aussage (iii) der Proposition 5.32, dass das Bild von $(\cosh, \sinh)$ in der *Einheitshyperbel*
$$\left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, u^2 - v^2 = 1\right\}$$
enthalten ist. Das erklärt den Namen *Hyperbelfunktion*. Wegen der Analogie zu (5.45) können wir (iii) als eine *hyperbolische Version des Satzes von Pythagoras* auffassen.

- Die Additionstheoreme ((iv),(v)) sind analog zu denjenigen für cos und sin, mit teils anderen Vorzeichen.

- Wegen (vi) sind die Aussagen ((vii),(viii),(ix)) sinnvoll.

- Die Ableitungen von $\cosh, \sinh, \tanh$ erfüllen Beziehungen, die analog zu denjenigen für $\cos, \sin, \tan$ sind, mit teils anderen Vorzeichen. Siehe ((vii),(viii),(ix)) und 5.30(vii).

- Wegen (x) sind die Aussagen ((xi),(xii)) sinnvoll.

Im Beweis von Teil (i) der Proposition 5.32 werden wir die folgende Bemerkung verwenden.

Bemerkung 5.33. [komplexe eulersche Formel, Hyperbel- und komplexe trigonometrische Funktionen] Es gilt

$$e^{iz} = \mathrm{Exp}(iz) = \mathrm{Cos}\, z + i\, \mathrm{Sin}\, z, \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Das ist eine komplexe Variante der eulersche Formel. Sie folgt mittels der Rechnung, die wir in (3.30) für ein reelles $z = \varphi$ durchgeführt haben.

[14] Das Bild von cis stimmt sogar mit dem Einheitskreis überein.

Beweis der Proposition 5.32: (i): Sei $x \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\begin{aligned}\cosh(x) &= \frac{e^{i(-i)x} + e^{i\cdot ix}}{2} \\ &= \frac{\mathrm{Cos}(-ix) + \mathrm{Cos}(ix) + i\,\mathrm{Sin}(-ix) + i\,\mathrm{Sin}(ix)}{2} \text{ (wegen Bemerkung 5.33)} \\ &= \mathrm{Cos}(ix) \qquad \text{(wegen (5.39))}.\end{aligned}$$

Das zeigt (i).

((ii)-(v)): Übungsserie 10

((vi)-(xii)): Übungsserie 9

□

Definition 5.34 (Areafunktionen)**.** *Wir definieren:*

(i) Areacosinus hyperbolicus := arcosh := $\cosh^{-1} :]1, \infty[\to]0, \infty[$

(ii) Areasinus hyperbolicus := arsinh := $\sinh^{\langle -1\rangle} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(iii) Areatangens hyperbolicus := artanh := $\tanh^{\langle -1\rangle} :]-1, 1[\to \mathbb{R}$

Wir nennen diese Funktionen Areafunktionen.

Bemerkungen. [Name *Area(co-)sinus hyperbolicus*]

- Für jedes $y \in [0, \infty[$ ist $\operatorname{arsinh} y$ gleich zweimal der Fläche des Sektors der Einheitshyperbel, der durch die Einheitshyperbel und die Strahlen OA und OB begrenzt wird, wobei $O := \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $A := \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix}\sqrt{1+y^2}\\ y\end{pmatrix}$. Siehe Abbildung 5.6. Eine ähnlich Aussage gilt für arcosh. Da *area* das lateinische Wort für *Fläche*, erklärt das den Namen *Area(co-)sinus hyperbolicus*.

- Analog ist für $y \in [0, 1]$ die Zahl $\arcsin y$ zweimal der Flächeninhalt des Sektors des Einheitskreises, der durch den Einheitskreis und die Strahlen OA und OB begrenzt wird, wobei wobei $O := \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $A := (1, 0)$ und $B := \big(\sqrt{1-y^2}, y\big)$. (Überlegen Sie sich das im Fall $y = 1$!) Siehe Abbildung 5.4.

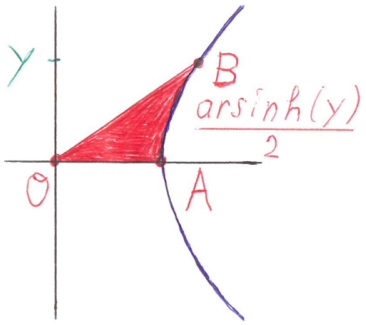


Abbildung 5.6: Blau: rechter Ast der Einheitshyperbel. Rot: der Sektor der Einheitshyperbel. Zweimal der Flächeninhalt dieses Sektors ist gleich $\operatorname{arsinh} y$.

- Manchmal wird der Areasinus auch als arcsinh geschrieben, wobei arc für lateinisch *arcus* = Bogen steht. Da die Funktion nichts mit einer euklidischen Länge einer Kurve zu tun hat, verwende ich diese Notation nicht.[15]

5.5 Höhere (stetige) Differenzierbarkeit, höhere Ableitungen, stetige Differenzierbarkeit eines Limes, durch Potenzreihe definierte Funktion ist gliedweise differenzierbar

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96a, 3.4] und [Stra, 5.4]. Seien $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, $p \in \mathbb{N}$ und $f : U \to \mathbb{R}^p$.

Definition 5.35 (höhere (stetige) Differenzierbarkeit, höhere Ableitungen)**.** *(i) Wir nennen f* 0-mal differenzierbar *(keine Bedingung). Wir definieren ihre* 0-te Ableitung *(oder* Ableitung 0-ter Ordnung*) als*

$$f^{(0)} := f.$$

Rekursiv definieren wir für jedes $k \in \mathbb{N}$:

*Die Funktion f heisst k-*mal differenzierbar *g. d. w. sie $(k-1)$-mal differenzierbar ist und ihre $(k-1)$-te Ableitung differenzierbar ist. Wir definieren ihre k-te* Ableitung *(oder* Ableitung k-ter Ordnung*) als*

$$f^{(k)} := (f^{(k-1)})' : U \to \mathbb{R}^p.$$

[15] Die Zahl $\operatorname{arsinh} y$ ist allerdings die Länge des Bogens auf der Einheitshyperbel in Abbildung 5.6 bezüglich der *Standard-Minkowski-Metrik*.

(ii) *Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Wir nennen f k-mal* stetig differenzierbar *(oder* von der Klasse C^k *oder schlicht C^k) g. d. w. f k-mal differenzierbar ist und $f^{(k)}$ stetig ist. Wir definieren die Menge*

$$C^k(U, \mathbb{R}^p) := C^k(U; \mathbb{R}^p) := \{f : U \to \mathbb{R}^p \mid f \text{ ist } k\text{-mal stetig differenzierbar}\}$$

und kürzen ab:

$$C^k(U) := C^k(U, \mathbb{R}).$$

(iii) *Wir nennen f* beliebig oft differenzierbar *(oder C^∞ oder* glatt*) g. d. w. f k-mal differenzierbar ist für jedes $k \in \mathbb{N}_0$. Wir definieren die Menge*

$$C^\infty(U, \mathbb{R}^p) := C^\infty(U; \mathbb{R}^p) := \{f : U \to \mathbb{R}^p \mid f \text{ ist glatt}\}.$$

Bemerkungen 5.36. [höhere (stetige) Differenzierbarkeit, höhere Ableitungen]

- (Rekursion) Die Definition der k-fachen Differenzierbarkeit beruht auf *Rekursion* über k. In einer rekursiven Definition definieren wir zuerst ein Objekt oder einen Begriff A_0 und dann für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein Objekt oder einen Begriff A_k mittels A_{k-1}. Zum Beispiel ist das Produkt $A_k := kn$ zweier natürlicher Zahlen k, n rekursiv definiert durch

  $$A_0 := 0, \qquad A_k := A_{k-1} + n.$$

  (Überprüfen Sie, dass diese Definition mit Ihrer Intuition des Produktes übereinstimmt!)

  In der Definition 5.35 ist A_k der Begriff der k-fachen Differenzierbarkeit von f zusammen mit dem Begriff der k-ten Ableitung von f.

  Zum Beispiel heisst f gemäss dieser Definition 1-mal differenzierbar g. d. w. f $1 - 1 = 0$-mal differenzierbar ist und $f^{(0)} = f$ differenzierbar ist[16]. Das bedeutet, dass f 1-mal differenzierbar ist g. d. w. f differenzierbar ist. In diesem Fall ist $f^{(1)} := f'$.

  Als ein weiteres Beispiel heisst f gemäss Definition 5.35 2-mal differenzierbar g. d. w. f $2 - 1 = 1$-mal differenzierbar ist und $f^{(1)} = f'$ differenzierbar ist. In diesem Fall ist $f^{(2)} := f''$.

  Allgemein gilt

  $$f^{(0)} = f, \qquad f^{(1)} = f', \qquad f^{(2)} = f'', \qquad f^{(3)} = f''', \qquad \ldots,$$

  falls f entsprechend oft differenzierbar ist.

[16] im Sinn der Definition 5.1

- Jede C^k-Funktion f hat stetige Ableitungen i-ter Ordnung für $i \in \{0, \dots, k\}$. Das folgt aus Satz 5.6 (Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit). Jede C^k-Funktion ist also auch von der Klasse $C^{k-1}, \dots, C^0$.
- Es gilt
$$C^0(U, \mathbb{R}^p) = \{f : U \to \mathbb{R}^p \mid f \text{ ist stetig}\}.$$
- Die Definition von C^k im Skript [Stra] (Definition 5.4.2 ii)., S. 95) ist ein wenig anders formuliert. Sie ist äquivalent zur Definition 5.35. Das folgt aus Bemerkung 5.36.

Beispiele. [glatte Funktionen] Folgende Funktionen sind glatt:

- Jedes Polynom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Das folgt aus Beispiel 5.12(iii) mit Hilfe von Induktion. (Siehe Übungsserie 10.)
- Die rationale Funktion $f := \frac{p}{q} : U \to \mathbb{R}$ für jedes Paar von reellen Polynomen $p, q \not\equiv 0$ und $U := q^{-1}\big(\mathbb{R} \setminus \{0\}\big)$. Das folgt aus Beispiel 5.12(iv) mit Hilfe von Induktion. (Siehe Übungsserie 10.)
- Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Das folgt aus Beispiel 5.3(iii).
- Die trigonometrischen Funktionen $\cos, \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Das folgt aus Satz 3.49 und Satz 5.28(ii).

Beispiel. [differenzierbare Funktion, die nicht C^1 ist]**Behauptung:** Die Funktion
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$
ist differenzierbar. Ihre Ableitung ist im Punkt $x_0 := 0$ unstetig.

Beweis: Für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist f in x differenzierbar mit Ableitung
$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \left(\cos \frac{1}{x}\right)(-x^{-2}) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}. \tag{5.46}$$
(Überprüfen Sie das!) Aus Definition 5.1 folgt, dass f in $x := 0$ differenzierbar ist mit Ableitung $f'(0) = 0$.

Gemäss (5.46) gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$, dass
$$f'\left(\frac{1}{\pi k}\right) = \frac{2}{\pi k} \sin(\pi k) - \cos(\pi k) = -(-1)^k.$$
Daraus folgt, dass f' an der Stelle $x = 0$ nicht stetig ist. (Überprüfen Sie das!) Das beweist die Behauptung.

Bemerkung: Diese Funktion ist also differenzierbar, aber nicht von der Klasse C^1.

Folgender Satz besagt, dass jeder gleichmässige Limes einer Folge von C^1-Funktionen wieder C^1 ist, falls die Folge der Ableitungen ebenfalls gleichmässig konvergiert. Seien $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, $p \in \mathbb{N}$, $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $C^1(U, \mathbb{R}^p)$ und $f, g : U \to \mathbb{R}^p$.

Satz 5.37 (Kriterium für stetige Differenzierbarkeit eines Limes)**.** *Falls $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ gleichmässig gegen f konvergiert und $(f'_m)_{m\in\mathbb{N}}$ gleichmässig gegen g konvergiert, dann gilt $f \in C^1(U, \mathbb{R}^p)$ und $f' = g$.*

Beweis: [Stra, Satz 5.4.1., S. 92]

Bemerkungen 5.38. [Kriterium für stetige Differenzierbarkeit eines Limes]

(i) Aus diesem Satz folgt:

Falls eine Folge von Funktionen $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ von U nach $\mathbb{R}^p$ gleichmässig konvergiert so, dass die Folge der Ableitungen ebenfalls gleichmässig konvergiert, dann ist der Limes von $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ stetig differenzierbar.

(ii) Ohne die Voraussetzung, dass $(f'_m)_{m\in\mathbb{N}}$ gleichmässig konvergiert, ist die Bemerkung (i) im Allgemeinen falsch. Ein Gegenbeispiel ist gegeben durch

$$f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_m(x) := \sqrt{\frac{1}{m^2} + x^2}, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Die Folge $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmässig gegen $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. (Überlegen Sie sich das!) Der Limes $|\cdot|$ ist nicht differenzierbar, also nicht C^1.

Bemerkung: Die Folge der Ableitungen $(f'_m)_{m\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gleichmässig. Daher ist eine Voraussetzung von Satz 5.37 in diesem Beispiel nicht erfüllt. Dieses Beispiel steht daher nicht im Widerspruch zu diesem Satz.

Aus Satz 5.37 folgt, dass jede durch eine Potenzreihe definierte Funktion auf der Konvergenzkreisscheibe differenzierbar ist mit Ableitung gegeben durch gliedweises Differenzieren. Das ist der Inhalt des folgenden Korollars. Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Wir definieren den zugehörigen Konvergenzradius wie in Definition 3.27, d. h.

$$\rho := \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}}.$$

Wir definieren die Funktion

$$f :]-\rho, \rho[\to \mathbb{C}, \qquad f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} c_k x^k.$$

Korollar 5.39 (durch Potenzreihe definierte Funktion ist gliedweise differenzierbar)**.** *(i) Der zur Koeffizientenfolge $((\ell+1)c_{\ell+1})_{\ell\in\mathbb{N}_0}$ gehörige Konvergenzradius ist ebenfalls ρ.*

(ii) Die Funktion f ist differenzierbar mit Ableitung gegeben durch

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^{k-1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} kc_k x^{k-1}. \tag{5.47}$$

Bemerkung. (ii): Sei $x \in]-\rho, \rho[$. Gemäss (i) konvergiert die Folge $\left(\sum_{\ell=0}^{m}(\ell+1)c_{\ell+1}x^{\ell}\right)_{m\in\mathbb{N}_0}$. Daraus folgt, dass die Folge $\left(\sum_{k=1}^{n} kc_k x^{k-1}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen $\lim_{m\to\infty}\sum_{\ell=0}^{m}(\ell+1)c_{\ell+1}x^{\ell}$ konvergiert. (Überprüfen Sie das!) Die rechte Seite von (5.47) ist daher sinnvoll.

Aus diesem Korollar folgt mittels Induktion folgendes Korollar.

Korollar 5.40 (durch Potenzreihe definierte Funktion ist glatt)**.** *Die Funktion f ist glatt.*

Beweis des Korollars 5.39: (i): Das folgt aus der Tatsache $\left(\sqrt[k]{k}\right)_{k\in\mathbb{N}} \to 1$. (Siehe Übungsserie 5, Konvergenz und bestimmte Divergenz einer Folge in $\mathbb{R}^d$.)

(ii): Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir

$$f_n :]-\rho, \rho[\to \mathbb{C}, \qquad f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} c_k x^k.$$

Sei $r \in]0, \rho[$. Gemäss Proposition 4.58 konvergiert die Folge $\left(f_n|_{[-r,r]}\right)$ gleichmässig gegen $f|_{[-r,r]}$. Aus (i) und Korollar 3.29(i) folgt, dass für jedes $x \in]-\rho, \rho[$ die Folge $\left(\sum_{k=1}^{n} kc_k x^{k-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Wir definieren

$$g :]-\rho, \rho[\to \mathbb{C}, \qquad g(x) := \sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^{k-1} := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} kc_k x^{k-1}.$$

Behauptung 1. *Die Folge $\left(f_n'|_{[-r,r]}\right)$ konvergiert gleichmässig gegen $g|_{[-r,r]}$.*

Beweis der Behauptung 1: Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Gemäss Beispielen 5.12(iii) und 4.3(ii) ist f_n von der Klasse C^1 mit Ableitung

$$f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} kc_k x^{k-1}.$$

Da der zur Koeffizientenfolge $(kc_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gehörige Konvergenzradius ist ρ ist und $r<\rho$, konvergiert daher gemäss Proposition 4.58 die Folge $\left(f_n'|_{[-r,r]}\right)$ gleichmässig gegen $g|_{[-r,r]}$. Das beweist Behauptung 1.□

Da $\left(f_n|_{]-r,r[}\right)$ gleichmässig gegen $f|_{]-r,r[}$ konvergiert, folgt mit Hilfe der Behauptung 1 und Satz 5.37, dass $f|_{]-r,r[}\in C^1\big(]-r,r[,\mathbb{C}=\mathbb{R}^2\big)$ und $f|'_{]-r,r[}=g|_{]-r,r[}$. Aussage (ii) folgt. (Wir verwenden hier, dass $r\in]0,\rho[$ beliebig ist.)

Das beweist Korollar 5.39. □

Beispiele. [durch Potenzreihe definierte Funktion ist glatt und gliedweise differenzierbar]

- Wir betrachten die *Exponentialreihe*, d. h. die zur Folge $\left(c_k:=\frac{1}{k!}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gehörige Potenzreihe, also die Abbildung $z\mapsto\left(\sum_{k=0}^n\frac{z^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$. (Siehe Definition 3.31.) Der Konvergenzradius dieser Potenzreihe ist gegeben durch

$$\rho=\frac{1}{\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|\frac{1}{k!}\right|}}=\infty.$$

  (Siehe Übungsserie 6, Konvergenzradius einer Potenzreihe.) Die durch diese Potenzreihe definierte Funktion einer reellen Variable ist die reelle Exponentialfunktion

$$\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad \exp(x):=\sum_{k=0}^\infty\frac{x^k}{k!}.$$

  Gemäss Korollar 5.40 ist diese Funktion glatt. Gemäss Korollar 5.39 ist ihre Ableitung gegeben durch

$$\exp'(x)=\sum_{k=1}^\infty k\frac{x^{k-1}}{k!}=\sum_{\ell=0}^\infty\frac{x^\ell}{\ell!}=\exp(x).$$

  (ℓ spielt die Rolle von $k-1$.) Wir haben das schon in Beispiel 5.3(iii) mittels des Additionstheorems für exp gezeigt. (Siehe Übungsserie 9, Differenzierbarkeit, Ableitungen, ...)

- Wir betrachten die *geometrische Reihe*, d. h. die zur Folge $(c_k:=1)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gehörige Potenzreihe, also die Abbildung

$$z\mapsto\left(\sum_{k=0}^n z^k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}.$$

Der Konvergenzradius dieser Potenzreihe ist gegeben durch

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|1|}} = 1.$$

Die durch diese Potenzreihe definierte Funktion einer reellen Variable ist gegeben durch

$$f :]-1,1[\to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

Gemäss Korollar 5.40 ist diese Funktion glatt. Gemäss Korollar 5.39 ist ihre Ableitung gegeben durch

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1}.$$

Das wussten wir schon. Gemäss Beispiel 3.9(iii) gilt nämlich

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \qquad \forall x \in]-1,1[,$$

und daher mittels der Quotientenregel (Satz 5.10(iii))

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1}.$$

In der zweiten Gleichheit haben wir eine Aufgabe aus Übungsserie 6 verwendet (Konvergenz und Grenzwert von Reihen, Cauchy-Produkt).

Für ein Beispiel einer direkten Anwendung von Satz 5.37 siehe [Stra, Beispiel 5.4.3. iii), S. 94].

5.6 Taylorpolynom und -reihe, Restglied, Satz von Taylor, lokale Extrema, kritische Punkte

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96a, 3.2, 3.4] und [Stra, 5.5]. Für eine m mal differenzierbare Funktion f ist das Taylorpolynom von f m-ter Ordnung mit Entwicklungspunkt x_0 ein Polynom vom Grad m, in dem Ableitungen von f an der Stelle x_0 bis m-ter Ordnung vorkommen. Der Satz von Taylor gibt eine Formel für den Unterschied zwischen einer Funktion und ihrem Taylorpolynom m-ter Ordnung. Aus diesem Satz folgt, dass das Taylorpolynom die Funktion f annähert. Da Polynome einfache Funktionen sind, werden Funktionen in vielen Anwendungen daher näherungsweise durch ihre Taylorpolynome ersetzt.

Taylornäherung einer Funktion

Sei I ein offenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$ und $x_0 \in I$. Falls $m \geq 0$, dann nehmen wir an, dass f m-mal differenzierbar ist.

Definition 5.41 (Taylorpolynom, Restglied, Taylorreihe)**.** *(i) Wir definieren das* Taylorpolynom von f m-ter Ordnung zum Entwicklungspunkt x_0 *(oder* um x_0*) als die Funktion*

$$T^m_{f,x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad T^m_{f,x_0}(x) := \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k. \tag{5.48}$$

(ii) Wir definieren das Restglied von f m-ter Ordnung zum Entwicklungspunkt x_0 *als die Funktion*

$$R^m_{f,x_0} := f - T^m_{f,x_0} : I \to \mathbb{R}. \tag{5.49}$$

(iii) Falls f glatt ist, dann definieren wir die Taylorreihe von f zum Entwicklungspunkt x_0 *(oder* um x_0*) als die Folge der Taylorpolynome*

$$T_{f,x_0} := \left(T^m_{f,x_0}\right)_{m \in \mathbb{N}_0}.$$

Bemerkungen. [Taylorpolynom]

- Im Fall $m = -1$ ist die rechte Seite von (5.48) eine leere Summe. Diese ist als 0 definiert. Daher ist
$$T^{-1}_{f,x_0} \equiv 0.$$
- Im Fall $m = 0$ ist
$$T^0_{f,x_0} \equiv f(x_0).$$
- Im Fall $m = 1$ ist
$$T^1_{f,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$
Das ist die beste affine Näherung von f im Punkt x_0, die wir in Bemerkung 5.1(ii) kennengelernt haben. Das Taylorpolynom verallgemeinert also die beste affine Näherung.
- In [Stra, Bemerkung 5.5.1., S. 96] wird die Notation
$$T_m f(x; a) := T^m_{f,a}(x)$$
verwendet. Der Punkt a spielt hierbei die Rolle von x_0. Des Weiteren wird in [Stra, S. 97] das Restglied mit $r_m f(\cdot; a)$ bezeichnet.

Beispiele 5.42. [Taylorpolynom, Restglied, Taylorreihe]

(i) (Polynom) Seien $n, m \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Wir betrachten das Polynom

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Diese Funktion ist glatt. (Siehe Übungsserie 10.) Daher ist das Taylorpolynom von f m-ter Ordnung zum Entwicklungspunkt $x_0 := 0$ wohldefiniert. Um es zu bestimmen, stellen wir zunächst fest, dass

$$f^{(0)}(0) = f(0) = a_0 = 0! a_0.$$

Es gilt

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}, \qquad \text{also} \qquad f^{(1)}(0) = f'(0) = 1! a_1$$

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{n} (k-1) k a_k x^{k-2}, \qquad \text{also} \qquad f^{(2)}(0) = f''(0) = 2! a_2.$$

Mittels Induktion folgt allgemein, dass

$$f^{(k)}(0) = k! a_k, \qquad \forall k \in \{0, \dots, n\}.$$

(Überprüfen Sie das!) Das Taylorpolynom von f m-ter Ordnung zum Entwicklungspunkt $x_0 := 0$ ist daher gemäss (5.48) gegeben durch

$$\begin{aligned} T^m_{f,x_0}(x) &= \begin{cases} \sum_{k=0}^{m} a_k x^k, & \text{falls } m < n, \\ \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, & \text{falls } m \geq n \end{cases} \\ &= \sum_{k=0}^{\min\{m,n\}} a_k x^k, \end{aligned}$$

also durch das bei der Potenz m abgebrochene Polynom f. Das Restglied von f m-ter Ordnung zum Entwicklungspunkt $x_0 := 0$ ist gegeben durch

$$R^m_{f,x_0}(x) = f(x) - T^m_{f,x_0}(x) = \begin{cases} \sum_{k=m+1}^{n} a_k x^k, & \text{falls } m < n, \\ 0, & \text{falls } m \geq n. \end{cases}$$

Die Taylorreihe von f zum Entwicklungspunkt $x_0 := 0$ ist gegeben durch

$$T_{f,0} = \left(\sum_{k=0}^{\min\{m,n\}} a_k \bullet^k \right)_{m \in \mathbb{N}_0}.$$

(Hier verwenden wir die Punktnotation für das Argument. Siehe Bemerkung 5.17(i).)

(ii) (Potenzreihe) Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Wir schreiben ρ für den zugehörigen Konvergenzradius und definieren die Funktion

$$f :]-\rho,\rho[\to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k.$$

Seien $m \in \mathbb{N}_0$. Gemäss Korollar 5.40 ist f glatt. Daher ist das Taylorpolynom von f m-ter Ordnung zum Entwicklungspunkt $x_0 := 0$ wohldefiniert. Um es zu bestimmen, stellen wir zunächst fest, dass

$$f^{(0)}(0) = f(0) = c_0 = 0!c_0.$$

Gemäss Korollar 5.39(i) gilt

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}, \qquad \text{also} \qquad f^{(1)}(0) = f'(0) = 1!c_1$$
$$f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) k c_k x^{k-2}, \qquad \text{also} \qquad f^{(2)}(0) = f''(0) = 2!c_2.$$

Allgemein gilt für jedes $k \in \mathbb{N}_0$, dass

$$f^{(k)}(0) = k!c_k.$$

Das folgt mittels Korollar 5.39(i) und Induktion. (Überprüfen Sie das!) Das Taylorpolynom von f m-ter Ordnung zum Entwicklungspunkt $x_0 := 0$ ist daher gemäss (5.48) gegeben durch

$$T^m_{f,0}(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k = \sum_{k=0}^{m} c_k x^k.$$

Das ist die m-te Partialsumme. Das Restglied von f m-ter Ordnung zum Entwicklungspunkt $x_0 := 0$ ist gegeben durch

$$R^m_{f,x_0}(x) = f(x) - T^m_{f,x_0}(x) = \sum_{k=m+1}^{\infty} c_k x^k.$$

Die Taylorreihe von f zum Entwicklungspunkt $x_0 := 0$ ist gegeben durch

$$T_{f,0} = \left(\sum_{k=0}^{m} c_k \bullet^k \right)_{m\in\mathbb{N}_0},$$

also durch die Potenzreihe zur Koeffizientenfolge $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$. Jede Potenzreihe ist also ihre eigene Taylorreihe um $x_0 = 0$.

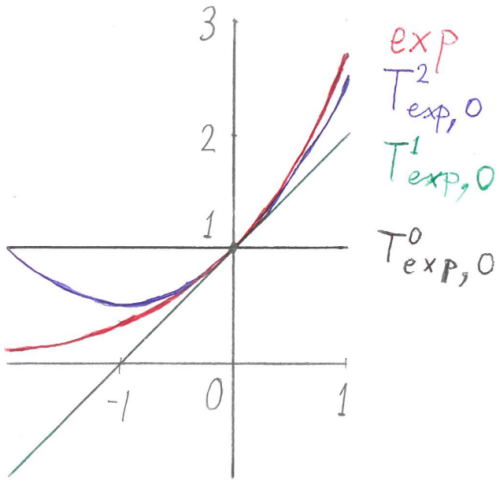


Abbildung 5.7: Die reelle Exponentialfunktion exp und das nullte, erste und zweite Taylorpolynom von exp zum Entwicklungspunkt $x_0 := 0$.

(iii) (Exponentialfunktion, Entwicklungspunkt $x_0 = 0$) Wir betrachten das konkrete Beispiel der *Exponentialreihe*, also $\left(c_k := \frac{1}{k!}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$. In diesem Fall ist $\rho = \infty$ und f die reelle Exponentialfunktion

$$f = \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Gemäss (ii) ist das Taylorpolynom von exp m-ter Ordnung zum Entwicklungspunkt $x_0 := 0$ gegeben durch die m-te Partialsumme

$$T^m_{\exp,0}(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!}.$$

Für $m = 1$ ist das zum Beispiel das Polynom

$$T^m_{\exp,0}(x) = 1 + x.$$

Das ist die beste affine Näherung der Exponentialfunktion um den Punkt $x_0 = 0$. Sie beschreibt die Tangente an den Graphen der Exponentialfunktion im Punkt $(0, 1)$. Siehe Abbildung 5.7.

(iv) (Exponentialfunktion, allgemeiner Entwicklungspunkt x_0) Wir betrachten nochmals $\left(c_k := \frac{1}{k!}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$. Seien $m \in \mathbb{N}_0$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\exp^{(k)}(x_0) = \exp(x_0) = e^{x_0}.$$

Gemäss Definition 5.41 ist das m-te Taylorpolynom von exp um x_0 daher gegeben durch

$$T^m_{\exp,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{e^{x_0}}{k!}(x - x_0)^k.$$

Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Wir schreiben ρ für den zugehörigen Konvergenzradius und definieren die Funktion

$$f :]-\rho, \rho[\to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k.$$

Sei $x_0 \in]-\rho, \rho[$ und $r \in \big[0, \rho - |x_0|\big[$.

Satz 5.43 (gleichmässige Konvergenz der Taylorreihe gegen Limes einer Potenzreihe)**.** *Die Taylorreihe von f um x_0 konvergiert auf dem Intervall $\overline{B}^1_r(x_0) = [x_0 - r, x_0 + r]$ gleichmässig gegen f, d. h.*

$$\forall \varepsilon \in]0, \infty[\exists m_0 \in \mathbb{N}_0 \forall m \in \mathbb{N}_0 \forall x \in \overline{B}^1_r(x_0) : m \geq m_0 \Rightarrow \left|R^m_{f,x_0}(x) = f(x) - T^m_{f,x_0}(x)\right| \leq \varepsilon.$$

Beweis: Das folgt aus [Strb, Satz 6.5.6., S. 137] und Proposition 4.58.

Bemerkungen. [gleichmässige Konvergenz der Taylorreihe gegen Limes einer Potenzreihe]

- Die Aussage des Satzes 5.43 bedeutet, dass das m-te Taylorpolynom die Funktion f immer besser annähert, wenn m grösser wird. Wir können den Näherungsfehler $\left|R^m_{f,0}(x)\right|$, den Betrag des Restglieds, durch ein vorgegebenes ε abschätzen, sobald m grösser als ein bestimmter Index m_0 ist, der *nicht* vom Punkt x abhängt.

  Abbildung 5.7 veranschaulicht das für die Exponentialfunktion und $x_0 = 0$, für ein kleines r.

- Wegen Satz 5.43 können wir also ein Taylorpolynom genügend grosser Ordnung verwenden, um den Wert einer durch eine Potenzreihe definierten Funktion an einer Stelle mit vorgegebener Genauigkeit zu berechnen. Die Taylorreihe liefert also eine numerische Methode zur Berechnung von Funktionswerten.

- Falls $x_0 = 0$, dann folgt Satz 5.43 direkt aus Beispiel 5.42(ii) und Proposition 4.58 (Potenzreihe konvergiert gleichmässig auf kompaktem Ball).

Beispiel. [gleichmässige Konvergenz der Taylorreihe gegen Limes einer Potenzreihe] Wir betrachten $\left(c_k := \frac{1}{k!}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$, also die Exponentialfunktion $f = \exp$. Seien $x_0 \in \mathbb{R}$

und $r \in [0, \infty[$. Gemäss Beispiel 5.42(iv) ist die Taylorreihe von exp um x_0 gegeben durch

$$\left(\sum_{k=0}^{m} \frac{e^{x_0}}{k!} (\bullet - x_0)^k \right)_{m \in \mathbb{N}_0}.$$

Gemäss Satz 5.43 konvergiert diese Reihe auf dem Intervall $\overline{B}_r^1(x_0) = \big[x_0 - r, x_0 + r\big]$ gleichmässig gegen exp. Insbesondere gilt also

$$e^x = \exp(x) = \lim_{m \to \infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{e^{x_0}}{k!} (x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{x_0}}{k!} (x - x_0)^k = e^{x_0} e^{x - x_0}.$$

Das wussten wir schon wegen des Additionstheorems (Korollar 3.43).

Folgender Satz impliziert, dass das m-te Taylorpolynom die Funktion f immer punktweise annähert, falls f von der Klasse C^{m+1} ist. Seien I ein offenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}_0$ und $x_0, x \in I$.

Satz 5.44 (Satz von Taylor, Restglied in Lagrangeform)**.** *Wir nehmen an, dass f $(m+1)$-mal differenzierbar ist.*

(i) Falls $x_0 < x$, dann gibt es einen Punkt $\xi \in]x_0, x[$ so, dass

$$R_{f,x_0}^m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} (x - x_0)^{m+1}. \tag{5.50}$$

(ii) Falls $x_0 > x$, dann gibt es einen Punkt $\xi \in]x, x_0[$ so, dass (5.50) gilt.

Beweis: [Stra, Satz 5.5.1., S. 96]

Dieser Satz ist nach Brook Taylor benannt. (Siehe Abbildung 5.8.)

Bemerkungen 5.45. [Satz von Taylor, Lagrangeform des Restglieds]

- Gemäss (5.49) besagt Gleichheit (5.50), dass

$$f(x) = T_{f,x_0}^m(x) + \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} (x - x_0)^{m+1}.$$

  Diese Gleichheit bedeutet, dass $f(x)$ durch sein Taylorpolynom der Ordnung $m+1$ um x_0 an der Stelle x gegeben ist, wobei wir das Argument x_0 der höchsten Ableitung von f durch ein geeignetes ξ ersetzen.



Abbildung 5.8: Brook Taylor, 1685–1731, englischer Mathematiker.

- Die Darstellung (5.50) des Restglieds heisst *Lagrange-Form*. Diese Form ist nach Joseph-Louis Lagrange benannt. (Siehe Abbildung 5.1.)
- Im Fall $m = 0$ und $x_0 < x$ besagt der Satz, dass es ein $\xi \in]x_0, x[$ gibt so, dass

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0).$$

  Das ist die Aussage des Mittelwertsatzes (Satz 5.15).

Als eine Anwendung von Satz 5.44 können wir das Restglied wie folgt abschätzen. Sei $r \in]0, \infty[$ so, dass $\overline{B}_r^1(x_0) = \big[x_0 - r, x_0 + r\big] \subseteq I$. Wir nehmen an, dass f von der Klasse C^{m+1} ist. Wir definieren

$$C_m := C_{m,f,x_0,r} := \frac{\max_{\overline{B}_r^1(x_0)} \big|f^{(m+1)}\big|}{(m+1)!}.^{17} \tag{5.51}$$

Das Maximum auf der rechten Seite existiert, da gemäss Korollar 4.33 jede stetige Funktion auf einer kompakten Menge ein Maximum besitzt.

Korollar 5.46 (Taylornäherung, Abschätzung für das Restglied)**.** *Es gilt*

$$\big|R_{f,x_0}^m(x)\big| \le C_m |x - x_0|^{m+1}, \qquad \forall x \in \overline{B}_r^1(x_0). \tag{5.52}$$

Beweis: Das folgt aus Satz 5.44. □

Bemerkungen 5.47. [Taylornäherung, Abschätzung für das Restglied]

[17] Für eine Funktion $F : X \to \mathbb{R}$ verwenden wir hier die Notation $\max_X F := \max_{x \in X} F(x) = \max F(X)$.

(i) Wir sagen, dass eine Funktion $g : I \to \mathbb{R}$ die Funktion f um den Punkt x_0 in m-ter Ordnung nähert, falls

$$\frac{f(x) - g(x)}{|x - x_0|^m} \to 0 \qquad \text{für} \qquad x \to x_0.$$

Wir nehmen an, dass f C^{m+1} ist. Gemäss Korollar 5.46 gilt dann, dass

$$\frac{\left|f(x) - T^m_{f,x_0}(x)\right|}{|x - x_0|^m} = \frac{\left|R^m_{f,x_0}(x)\right|}{|x - x_0|^m} \leq C_m|x - x_0| \to 0 \qquad \text{für} \qquad x \to x_0. \quad (5.53)$$

Das Taylorpolynom m-ter Ordnung um x_0 nähert die Funktion f daher in m-ter Ordnung um x_0. Der Unterschied $f - T^m_{f,x_0}$, also das Restglied R^m_{f,x_0}, ist der Fehler dieser Näherung. Dieser Fehler hat die Ordnung $m + 1$, d. h., er ist durch eine Konstante mal r_x^{m+1} beschränkt, wobei

$$r_x := |x - x_0|$$

der euklidische Abstand zwischen x_0 und x ist. Zum Beispiel nähert das Taylorpolynom nullter Ordnung die Funktion bis auf einen linearen Fehler. Das Taylorpolynom erster Ordnung nähert die Funktion bis auf einen quadratischen Fehler, usw.

(ii) Wir nehmen an, dass f glatt ist und die Folge $(C_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ gegen 0 konvergiert. Aus Korollar 5.46 folgt dann, dass die Taylorreihe von f auf $\overline{B}^1_r(x_0)$ gleichmässig gegen f konvergiert.

Beispiel. [Taylornäherung für die Exponentialfunktion] Wir betrachten $f := \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $m = 1$, $x_0 = 0$ und $r := 1$. Da $\exp' = \exp$, gilt $\exp'' = \exp$ und daher gemäss (5.51)

$$C_1 := C_{m=1,f=\exp,x_0=0,r=1} = \frac{\max_{\overline{B}^1_1(0)} |\exp|}{2!} = \frac{e}{2} < 2.$$

Gemäss Korollar 5.46 können wir daher den Fehler der Taylornäherung von exp erster Ordnung um $x_0 = 0$, also der besten affinen Näherung von exp um 0, abschätzen durch

$$\left|e^x - T^1_{\exp,0}(x)\right| \leq C_1|x - 0|^2 \leq 2|x|^2.$$

Für weitere Beispiele zur Taylornäherung siehe [Stra, Beispiel 5.5.1., S. 97].

Im Kontrast zu Bemerkung 5.47(ii) braucht die Taylorreihe einer Funktion im Allgemeinen nicht gegen die Funktion zu konvergieren, nicht einmal punktweise. Folgendes Beispiel illustriert das.

Beispiel 5.48. [Taylorreihe konvergiert nicht gegen die Funktion] Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x \leq 0. \end{cases}$$

Diese Funktion ist glatt mit

$$f^{(k)}(0) = 0, \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

(Siehe [Bla03, 7.6 Taylor-Approximation, Beispiel 3, S. 277].) Für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ ist das m-te Taylorpolynom von f um $x_0 := 0$ daher gegeben durch

$$T_{f,0}^m \equiv 0.$$

Die Taylorreihe $\left(T_{f,0}^m\right)_{m\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert daher gleichmässig gegen die konstante Funktion $0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sie konvergiert daher in keiner Umgebung von $x_0 = 0$ punktweise gegen die Funktion f. Das steht nicht im Widerspruch zu Bemerkung 5.47(ii), da in diesem Beispiel die Folge $(C_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ nicht gegen 0 konvergiert. Es steht auch nicht im Widerspruch zu Satz 5.43, da die Funktion f nicht durch eine Potenzreihe definiert ist.

Bemerkung.

Lokale Extrema, kritische Punkte

In diesem Unterabschnitt behandeln wir ein Kriterium dafür, dass eine Funktion in einem Punkt ein lokales Extremum annimmt. Das Kriterium ist eine Anwendung des Satzes von Taylor.

Seien $n \in \mathbb{N}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : X \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in X$.

Definition 5.49 ((strikte) lokale Extremalstelle)**.** *Wir nennen x_0 eine* lokale Minimalstelle von *f g. d. w. es eine Umgebung U von x_0 in X gibt so, dass*

$$f(x) \geq f(x_0), \qquad \forall x \in U \setminus \{x_0\}.$$

Wir nennen x_0 eine strikte lokale Minimalstelle von *f g. d. w. diese Bedingung mit "$\geq$" ersetzt durch "$>$" erfüllt ist.*

Wir nennen x_0 eine (strikte) lokale Maximalstelle von *f g. d. w. die analoge Bedingung mit "$\geq$" ("$>$") ersetzt durch "$\leq$" ("$<$") erfüllt ist.*

Wir nennen x_0 eine (strikte) lokale Extremalstelle von *f g. d. w. x_0 eine (strikte) lokale Minimalstelle oder (strikte) lokale Maximalstelle ist.*

Bemerkungen 5.50. [*lokal, global*]

(i) Eine Eigenschaft gilt *lokal* um einen gegebenen Punkt, falls sie in einer (möglicherweise kleinen) Umgebung des Punktes gilt. Entsprechend ist eine lokale Extremalstelle x_0 von f eine Extremalstelle von f in einer Umgebung von x_0.

(ii) Im Unterschied dazu gilt eine Eigenschaft *global*, falls sie in Bezug auf die ganze betrachtete Menge gilt. Eine globale Extremalstelle von f ist also dasselbe wie eine Extremalstelle von f. (Siehe Definition (4.14).) Das Wort *global* wird in diesem Kontext verwendet, um zu betonen, dass es sich nicht nur um eine *lokale* Extremalstelle handelt.

Beispiele. [(strikte) lokale Extremalstelle]

- Wir definieren die Vorzeichenfunktion $f := \operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie in (5.19). Jeder Punkt $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist eine lokale Minimalstelle sowie eine lokale Maximalstelle von sgn. (Wie wählen wir die Umgebung U?) Der Punkt $x_0 := 0$ ist weder eine lokale Minimalstelle noch eine lokale Maximalstelle von sgn. (Warum?)

  Bemerkung: Jeder Punkt $x_0 \in]0, \infty[$ ist eine (globale) Maximalstelle von sgn.

- Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x = 0, \\ -1, & \text{falls } x \in]-1, 0[\cup]0, 1[, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

  Der Punkt $x_0 := 0$ ist eine strikte lokale Maximalstelle von f, aber keine (globale) Maximalstelle.

Für ein weiteres Beispiel siehe [Stra, Beispiel 5.5.2. ii), S. 99].

Bemerkung. [lokales Minimum der potentiellen Energie und Stabilität] In der Physik sind lokale Extrema zum Beispiel darum wichtig, weil eine gegebene Lage eines statischen mechanischen System stabil ist, falls die potentielle Energie in dieser Lage ein striktes lokales Minimum annimmt.

Wir betrachten jetzt den Fall $n = 1$. Jede lokale Extremalstelle einer differenzierbaren Funktion ist ein kritischer Punkt. Das ist Teil der Aussage des folgenden Satzes. Seien $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in U$ ein Punkt, in dem f differenzierbar ist.

Definition 5.51 (kritischer Punkt)**.** x_0 *heisst* kritischer *(oder* stationärer*)* Punkt von f *g. d. w. die Ableitung von* f *in* x_0 *verschwindet, d. h.*

$$f'(x_0) = 0.$$



Abbildung 5.9: Pierre de Fermat, 1607–1665, französischer Mathematiker und Jurist.

Satz 5.52 ((strikte) lokale Extremalstelle)**.** *(i) (Satz von Fermat über kritische Punkte) Falls x_0 eine lokale Extremalstelle von f ist und f in x_0 differenzierbar ist, dann ist x_0 ein kritischer Punkt von f.*

(ii) (hinreichendes Kriterium für striktes lokales Extremum) Wir nehmen an, dass es eine gerade *Zahl $m \in \mathbb{N}$ gibt so, dass f m-mal differenzierbar ist und*

$$f^{(i)}(x_0) = 0, \qquad \forall i = 1, \ldots, m-1, \tag{5.54}$$
$$f^{(m)}(x_0) > 0 \qquad (f^{(m)}(x_0) < 0).$$

Dann ist x_0 eine strikte lokale Minimalstelle (Maximalstelle) von f.

(iii) (notwendiges Kriterium für lokales Extremum) Wir nehmen an, dass x_0 eine lokale Extremalstelle ist und dass es eine ungerade *Zahl $m \in \mathbb{N}$ gibt so, dass f m-mal differenzierbar ist und* (5.54) *gilt. Dann gilt $f^{(m)}(x_0) = 0$.*

Beweis: [Stra, Korollar 5.5.1., S. 98].[18] Der Beweis beruht auf Satz 5.44 (Satz von Taylor, Restglied in Lagrangeform).

Bemerkungen. [(strikte) lokale Extremalstelle]

- Aussage (i) ist nach Pierre de Fermat benannt. Siehe Abbildung 8.6. Diese Aussage folgt aus (iii) mit $m = 1$, falls f (auf U) differenzierbar ist. Für $m = 1$ ist die Bedingung (5.54) nämlich leer.
- Falls f genügend oft differenzierbar ist [19] und eine nichtverschwindende höhere Ableitung besitzt, dann implizieren die Teile ((ii),(iii)) dieses Satzes Folgendes:

[18] In diesem Korollar wird angenommen, dass f von der Klasse C^m ist. Der Beweis funktioniert jedoch auch, falls f nur m-mal differenzierbar ist.

[19] nämlich so oft, dass die betrachteten Ableitungen existieren

Der Punkt x_0 ist eine lokale Extremalstelle von f g. d. w. die niedrigste in x_0 nichtverschwindende Ableitung von f gerade Ordnung besitzt.

In diesem Fall ist x_0 eine lokale Minimalstelle (Maximalstelle) g. d. w. diese Ableitung positiv (negativ) ist.

Beispiele. [(strikte) lokale Extremalstelle]

- Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$ und $x_0 := 0$. Es gilt $f(x) \geq f(x_0)$, für jedes $x \in \mathbb{R}$. Daher ist $x_0 = 0$ eine lokale Minimalstelle. Da f an der Stelle 0 differenzierbar ist, ist 0 gemäss Satz 5.52(i) ein kritischer Punkt von f, d. h. $f'(0) = 0$. Das folgt auch aus einer direkten Rechnung.

- Sei $n \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^n$ und $x_0 := 0$. Es gilt

$$f^{(k)}(x) = n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}, \qquad \forall k \in \{1, \ldots, n\},\ x \in \mathbb{R}.$$

  (Siehe Übungsserie 10, höhere Differenzierbarkeit und Ableitungen.) Daraus folgt, dass

$$f^{(k)}(0) = 0,\ \forall k \in \{1, \ldots, n-1\}, \qquad f^{(n)}(0) = n! > 0.$$

  Falls n gerade ist, dann folgt daher aus Satz 5.52(ii), dass $x_0 = 0$ eine strikte lokale Minimalstelle von f ist. Falls n ungerade ist, dann folgt aus der Kontraposition von Satz 5.52(iii), dass $x_0 = 0$ keine lokale Extremalstelle von f ist.

  Bemerkung: Diese Tatsachen folgen auch daraus, dass $\mathbb{R}$ ein geordneter Körper ist, d. h. die Eigenschaften A.i)-iv), M.i)-iv), D), O.i)-iv), K.i),ii) in [Stra, 2.2 Die reellen Zahlen] besitzt.

Bemerkungen 5.53. [(Extremum-)Typ eines Punktes, notwendige und hinreichende Kriterien dafür, keine Aussagen darüber]

(i) (Extremumtyp) Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in U$. Mit dem (*Extremum-*)*Typ von* x_0 (*bezüglich* f) meinen wir die Eigenschaft, eine (strikte) lokale Minimalstelle oder (strikte) lokale Maximalstelle von f zu sein.

(ii) (hinreichendes Kriterium, notwendiges Kriterium für Typ) Satz 5.52(ii) liefert ein *hinreichendes* Kriterium dafür, dass x_0 den Typ *strikte lokale Minimalstelle* (*strikte lokale Maximalstelle*) besitzt. Satz 5.52(iii) liefert ein *notwendiges* Kriterium dafür, dass x_0 den Typ *lokale Minimalstelle* oder den Typ *lokale Maximalstelle* besitzt.

(iii) (keine Aussage über Typ, nicht glatte Funktion) Sei $m \in \mathbb{N}_0$. Wir nehmen an, dass f m-mal differenzierbar ist und $f^{(i)}(x_0) = 0$ für jedes $i = 1, \ldots, m$. Wir nehmen auch an, dass f nicht $(m+1)$-mal differenzierbar ist. Dann sagt Satz 5.52 nichts über den Typ von x_0 aus. Der Satz deckt also nicht alle Fälle ab.

(iv) (keine Aussage über Typ, glatte Funktion) Wir nehmen jetzt an, dass f beliebig oft differenzierbar ist und $f^{(i)}(x_0) = 0$ für jedes $i \in \mathbb{N}$. Dann sagt Satz 5.52 nichts über den Typ von x_0 aus. Der Satz deckt also nicht einmal für eine glatte Funktion alle Fälle ab.

Gemäss Bemerkungen 5.53((iii),(iv)) sagt Satz 5.52 in manchen Fällen nichts über den Extremumtyp eines Punktes x_0 aus. Die folgenden Beispiele illustrieren, dass in diesem Kontext die gegebene Information nicht ausreicht, um etwas über den Typ eines Punktes x_0 zu sagen.

Beispiele 5.54. [keine Aussage über den Typ eines Punktes, allgemeine Funktion]

(i) Seien $f := \chi_{\{0\}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (charakteristische Funktion) und $x_0 := 0$. Dann sind die Bedingungen der Bemerkung 5.53(iii) mit $m = 0$ erfüllt. (Überprüfen Sie das!) x_0 besitzt den Typ *strikte lokale Maximalstelle*.

(ii) Seien $f := \operatorname{sgn}$ die Vorzeichenfunktion (definiert wie in (5.19)) und $x_0 := 0$. Dann sind die Bedingungen der Bemerkung 5.53(iii) mit $m = 0$ erfüllt. (Überprüfen Sie das!) x_0 besitzt den Typ *keine lokale Extremalstelle*.

Gemäss Beispielen 5.54((i),(ii)) können wir im Kontext der Bemerkung 5.53(iii) mit $m = 0$ mit der gegebenen Information nichts über den Typ des kritischen Punktes x_0 aussagen. Ähnliche Beispiele zeigen dasselbe für ein beliebiges $m \in \mathbb{N}_0$.

Beispiele 5.55. [keine Aussage über den Typ eines Punktes, glatter Fall]

(i) Seien

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

und $x_0 := 0$. Dann sind die Bedingungen der Bemerkung 5.53(iv) erfüllt. (Das folgt aus [Bla03, 7.6 Taylor-Approximation, Beispiel 3, S. 277].) x_0 besitzt den Typ *strikte lokale Minimalstelle*.

(ii) Seien

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} -e^{\frac{1}{x}}, & \text{falls } x < 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \\ e^{-\frac{1}{x}}, & \text{falls } x > 0, \end{cases}$$

und $x_0 := 0$. Dann sind die Bedingungen der Bemerkung 5.53(iv) erfüllt. (Das folgt aus [Bla03, 7.6 Taylor-Approximation, Beispiel 3, S. 277].) x_0 besitzt den Typ *keine lokale Extremalstelle*.

Gemäss Beispielen 5.55((i),(ii)) können wir im Kontext der Bemerkung 5.53(iii) mit der gegebenen Information nichts über den Typ des kritischen Punktes x_0 aussagen.

Kapitel 6

Integration auf $\mathbb{R}$

Dieses Kapitel entspricht [Bla96b, 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.6] und [Stra, Kaptiel 6, Integration]. Das (bestimmte) Integral einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist der Inhalt (mit Vorzeichen) der Fläche zwischen der Abszisse (= x-Achse) und dem Graphen von f. Heuristisch ist dieser Flächeninhalt wie folgt definiert. Wir wählen eine unendliche "Indexmenge" $\mathcal{I}$ und für jedes $i \in \mathcal{I}$ ein "infinitesimales" (= "unendlich kleines") Intervall I_i so, dass die Menge $\{I_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$ bildet. Für jedes $i \in \mathcal{I}$ wählen wir einen Punkt $x_i \in I_i$. Wir schreiben $dx_i := |I_i|$ für die "infinitesimale Länge" von I_i. (Das ist das "Differential", d. h. die "infinitesimale" Differenz, der Endpunkte von I_i.) Intuitiv ist das Integral von f gleich der unendlichen Summe

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i \in \mathcal{I}} f(x_i) dx_i.$$

Um diese Intuition mathematisch präzise zu erfassen, definieren wir eine Treppenfunktion als eine endliche Linearkombination von Indikatorfunktionen von Intervallen. (Siehe Abbildung 6.1.) Wir definieren das Integral einer Treppenfunktion auf eine elementare Weise. Danach definieren wir das Integral einer allgemeinen Riemann-integrierbaren Funktion f als das Supremum der Integrale aller Treppenfunktionen, die kleiner gleich f sind. Dieses Integral ist gleich dem Grenzwert der Integrale einer Folge von Treppenfunktionen, die sich mehr und mehr f annähern.

6.1 Bestimmtes Riemann-Integral: Definition und Beispiele

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96b, 4.1] und [Stra, 6.2]. Das Riemann-Integral einer allgemeinen Funktion f beruht auf dem Begriff des Integrals einer Treppenfunktion. Dieser Begriff ist wie folgt definiert. Wir definieren die *Indikatorfunktion* χ_A einer Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ wie in (4.4).

Sei I ein beschränktes Intervall und $\varphi : I \to \mathbb{R}$.

Definition 6.1 (Treppenfunktion)**.** *φ heisst* Treppenfunktion *g. d. w. φ eine (endliche) Linearkombination von Indikatorfunktionen von Intervallen ist.*

Bemerkung. Das bedeutet, dass es eine Zahl $k \in \mathbb{N}_0$, Intervalle $I_1, \ldots, I_k \subseteq I$ und Zahlen $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ gibt so, dass

$$\varphi = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{I_i}. \tag{6.1}$$

Die Intervalle dürfen offen, abgeschlossen oder halb-offen sein.

Folgender Hilfssatz erklärt den Namen *Treppenfunktion*. Wir schreiben a und b für den linken und rechten Endpunkt von I. Wir nehmen an, dass $a < b$.

Hilfssatz 6.2 (Charakterisierung von Treppenfunktionen)**.** *Die Funktion φ ist eine Treppenfunktion g. d. w. es Zahlen $\ell \in \mathbb{N}_0$, $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{\ell-1} < b$ und $y_1, \ldots, y_\ell \in \mathbb{R}$ gibt so, dass mit $x_0 := a$, $x_\ell := b$ gilt:*

$$\varphi = y_i \quad \textit{auf} \quad]x_{i-1}, x_i[, \quad \forall i \in \{1, \ldots, \ell\}. \tag{6.2}$$

Dieser Hilfssatz kann mittels Induktion bewiesen werden.

Bemerkungen.

- Die Werte von φ in den Punkten $x_0, \ldots, x_\ell$ sind also beliebig.
- Die Bedingung (6.2) besagt, dass φ ähnlich wie eine Treppe aussieht. Das erklärt den Namen *Treppenfunktion*.

Beispiel 6.3. [Treppenfunktion]Sei $a := 0$, $b := 4$, $I :=]0, 4[$, $k := 2$, $I_1 :=]0, 2[$, $I_2 :=]1, 4[$, $c_1 := 1$ und $c_2 := 2$. Dann ist die Treppenfunktion (6.1) gegeben durch

$$\varphi = \chi_{]0,2[} + 2\chi_{]1,4[} = \begin{cases} 1, & \text{auf }]0, 1[, \\ 3, & \text{auf }]1, 2[, \\ 2, & \text{auf }]2, 4[. \end{cases}$$

Siehe Abbildung 6.1. Die Bedingung (6.2) von Hilfssatz 6.2 ist also erfüllt mit $\ell := 3$, $x_0 := a$, $x_1 := 1$, $x_2 := 2$, $x_3 := b := 4$, $y_1 := 1$, $y_2 := 3$ und $y_3 := 2$. (Es gilt $\varphi(x_1 = 1) = 1$, $\varphi(x_2 = 2) = 2$.)

Sei I ein beschränktes Intervall. Um das elementare Integral einer Treppenfunktion auf I zu definieren, benötigen wir den folgenden Hilfssatz. Für jedes Intervall J schreiben wir

$$|J| := \text{Länge von } J.$$

Seien $k, k' \in \mathbb{N}_0$, $I_1, \ldots, I_k, I'_1, \ldots, I'_{k'} \subseteq I$ Intervalle und $c_1, \ldots, c_k, c'_1, \ldots, c'_{k'} \in \mathbb{R}$.

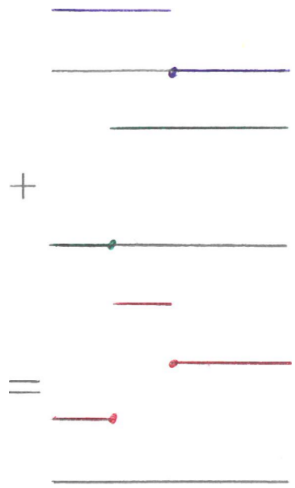


Abbildung 6.1: Blau: die Funktion $\chi_{]0,2[}$. Grün: die Funktion $2\chi_{]1,4[}$. Rot: die Treppenfunktion $\varphi = \chi_{]0,2[} + 2\chi_{]1,4[}$. Sie sieht ähnlich wie eine Treppe aus.

Hilfssatz 6.4 (elementares Integral einer Treppenfunktion)**.** *Falls*

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{I_i} = \sum_{i'=1}^{k'} c'_{i'} \chi_{I'_{i'}},$$

dann gilt

$$\sum_{i=1}^{k} c_i |I_i| = \sum_{i'=1}^{k'} c'_{i'} |I'_{i'}|.$$

Sei jetzt $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion. Wir schreiben a und b für die Endpunkte von I.

Definition 6.5 (elementares Integral einer Treppenfunktion)**.** *Wir definieren das* elementare Integral von φ *als die Summe*

$$S_I \varphi := S_I(\varphi) := \sum_{i=1}^{k} c_i |I_i|, \tag{6.3}$$

wobei $k \in \mathbb{N}_0$, $I_1, \ldots, I_k \subseteq I$ *Intervalle und* $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ *Zahlen sind so, dass*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{I_i}.$$

Bemerkung. Dieses Integral ist wohldefiniert, d. h. , $k, I_1, \ldots, I_k, c_1, \ldots, c_k$ existieren (gemäss Definition 6.1), und die rechte Seite von (6.3) hängt nicht von der Wahl von $k, I_1, \ldots, I_k, c_1, \ldots, c_k$ ab (gemäss Hilfssatz 6.4).

Beispiel 6.6. [Integral einer Treppenfunktion] Das Integral der Treppenfunktion $\varphi = 1\chi_{]0,2[} + 2\chi_{]1,4[}$ aus Beispiel 6.3 ist gegeben durch

$$S_{]0,4[}\varphi = 1 \cdot |]0,2[| + 2 \cdot |]1,4[| = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 8. \tag{6.4}$$

Wir können die Funktion auch schreiben als

$$\varphi = 1\chi_{]0,1]} + 3\chi_{]1,2[} + 2\chi_{[2,4[}. \tag{6.5}$$

Mit dieser Darstellung erhalten wir

$$S_{]0,4[}\varphi = 1 \cdot |]0,1]| + 3 \cdot |]1,2[| + 2 \cdot |[2,4[| = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 8,$$

also dasselbe Resultat wie in (6.4). Mit der Darstellung (10.8) von φ sehen wir, dass das elementare Integral von φ der Inhalt der Fläche zwischen der Abszisse und dem Graphen von φ ist. Die Definition 6.5 stimmt also mit unserer Intuition überein.

Jetzt können wir Integrierbarkeit für eine allgemeine Funktion und das Integral definieren. Seien I ein beschränktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir schreiben a und b für die Endpunkte von I.

Definition 6.7 (eigentliche Riemann-Integrierbarkeit, eigentliches Riemann-Integral)**.** *(i) Wir definieren* das untere und das obere *(*Riemann-*)*Integral von f *(*über I*) als*

$$\underline{\int} f := \underline{\int_I} f := \sup\left\{ S_I\varphi \,\middle|\, \varphi : I \to \mathbb{R} \text{ } \textit{Treppenfunktion: } \varphi \le f \right\}, \tag{6.6}$$

$$\overline{\int} f := \overline{\int_I} f := \inf\left\{ S_I\psi \,\middle|\, \psi : I \to \mathbb{R} \text{ } \textit{Treppenfunktion: } \psi \ge f \right\}. \tag{6.7}$$

*(ii) Wir nennen f (*eigentlich Riemann-*)*integrierbar *(*über I*) g. d. w.*

$$\underline{\int_I} f \ge \overline{\int_I} f. \tag{6.8}$$

*In diesem Fall definieren wir das (*bestimmte eigentliche Riemann-*)*Integral von f *(*über I*) als*

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_I f := \underline{\int_I} f. \tag{6.9}$$

Dieses Integral ist nach Bernhard Riemann benannt, siehe Abbildung 10.1.

Bemerkungen. [Riemann-Integrierbarkeit, -Integral]

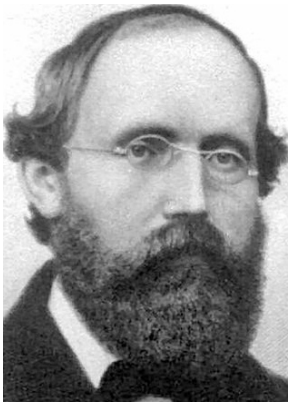


Abbildung 6.2: Bernhard Riemann, deutscher Mathematiker, 1826–1866.

- Für jede Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ gilt

$$\underline{\int_I} f \leq \overline{\int_I} f.$$

(Siehe [Stra, Bemerkung 6.2.2. i), S. 130].) Gemäss (ii) ist f daher Riemann-integrierbar g. d. w. gilt

$$\underline{\int_I} f = \overline{\int_I} f.$$

- Die Definitionen (10.3) und (10.4) (unteres und oberes Riemann-Integral) präzisieren die Idee, dass wir das Integral von f erhalten, indem wir f von oben und unten mit Treppenfunktionen annähern.

- Gemäss dem Goethe-Prinzip (Prinzip 1.23) schreiben wir das Integral (6.9) allgemeiner mit Hilfe einer beliebigen Variablen, zum Beispiel als

$$\int_a^b f(y)\,dy := \int_a^b f(t)\,dt := \int_a^b f(x)\,dx = \int_I f.$$

- Das Integralzeichen $\int$ wurde von Leibniz in Anlehnung an den Buchstaben s eingeführt. Es steht für den ersten Buchstaben im Wort "Summe". Das widerspiegelt die Intuition, dass das Integral einer Funktion eine unendliche Summe ist.

Jede eigentlich Riemann-integrierbare Funktion ist beschränkt. Um diesen Begriff zu erklären, erinnern wir uns an die Definition 4.29 (Beschränktheit einer Teilmenge von $\mathbb{R}^n$).

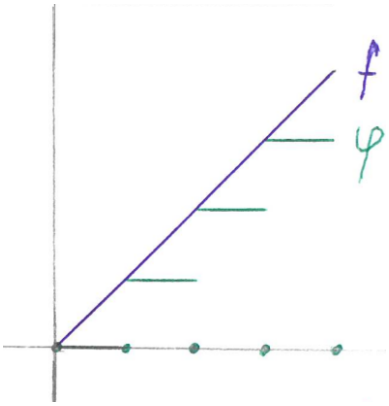


Abbildung 6.3: Die Funktion f und die Treppenfunktion φ für $k = 4$.

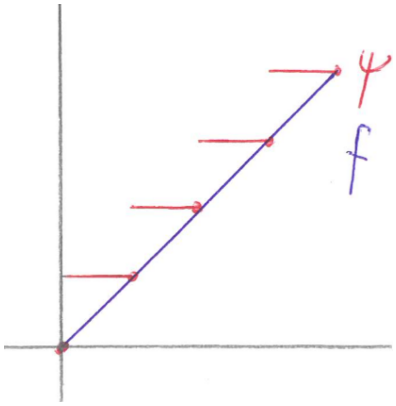


Abbildung 6.4: Die Funktion f und die Treppenfunktion ψ für $k = 4$.

Definition 6.8 (Beschränktheit einer Funktion)**.** *Eine Funktion* $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *heisst* beschränkt *g. d. w. das Bild von* f *beschränkt ist.*

Bemerkung. Das bedeutet, dass es ein $C \in [0, \infty[$ gibt so, dass

$$\|f(x)\| \leq C, \qquad \forall x \in X. \tag{6.10}$$

Bemerkung. Jede eigentlich Riemann-integrierbare Funktion ist beschränkt. (Überprüfen Sie das!)

Beispiel 6.9. [Integral] **Behauptung:** Die Funktion

$$f : I := [0, 1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x,$$

ist eigentlich Riemann-integrierbar mit Riemann-Integral

$$\int_0^1 f = \frac{1}{2}.$$

Beweis: Sei $k \in \mathbb{N}$. Wir definieren

$$\varphi := \sum_{i=1}^{k-1} \frac{i}{k} \chi_{]\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k}[} : I \to \mathbb{R}.$$

Siehe die Abbildung 6.3. Das ist eine Treppenfunktion, die $\varphi \leq f$ erfüllt. (Überprüfen

Sie das!) Gemäss (10.3) gilt darum

$$\begin{aligned}\underline{\int_I} f &\geq S_I\varphi \qquad (6.11)\\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \frac{i}{k} \cdot \left|\right]\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k}\left[\right| \\ &= \frac{1}{k^2}\sum_{i=1}^{k-1} i \\ &= \frac{1}{k^2}\frac{(k-1)k}{2} \qquad \text{(gemäss Satz 1.11)} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2k}.\end{aligned}$$

Da k beliebig ist, folgt daraus mittels (6.11), dass

$$\underline{\int_I} f \geq \frac{1}{2}. \qquad (6.12)$$

Sei $k \in \mathbb{N}$. Wir definieren

$$\psi := \sum_{i=1}^{k} \frac{i}{k}\chi_{]\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}]} : I \to \mathbb{R}.$$

Siehe die Abbildung 6.4. Ein ähnliches Argument wie das obige zeigt, dass

$$\overline{\int_I} f \leq S_I\psi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2k}.$$

(Überlegen Sie sich das!) Da k beliebig ist, folgt daraus, dass

$$\overline{\int_I} f \leq \frac{1}{2}.$$

Indem wir das mit (6.12) kombinieren, erhalten wir, dass

$$\underline{\int_I} f \geq \overline{\int_I} f,$$

d. h. die Bedingung (6.8) ist erfüllt. Daher ist f eigentlich Riemann-integrierbar mit

$$\int_I f = \underline{\int_I} f = \frac{1}{2}.$$

Beispiel 6.10. [nicht-Riemann-integrierbare Funktion] Die Funktion $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} : I := [0,1] \to \mathbb{R}$ ist beschränkt, aber nicht Riemann-integrierbar. Siehe Übungsserie 12.

6.2 Eigenschaften der Riemann-Integration, Integral mit vertauschten Grenzen

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96b, 4.2] und [Stra, 6.1, 6.2, 6.3]. Folgender Satz fasst einige grundlegende Eigenschaften der Riemann-Integration zusammen. In Teil (vii) dieses Satzes werden wir die folgende Definition verwenden. Seien I, I' beschränkte Intervalle so, dass $I' \subseteq I$, und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Wir schreiben a' und b' für die Endpunkte von I'.

Definition 6.11 (Integral einer eingeschränkten Funktion)**.** *Wir definieren*

$$\int_{a'}^{b'} f := \int_{I'} f := \int_{I'} f|_{I'}.$$

Bemerkung. Dieses Integral ist wohldefiniert, d. h. $f|_J$ ist Riemann-integrierbar. (Siehe Satz 6.12(vii).)

Sei I ein beschränktes Intervall.

Satz 6.12 (Eigenschaften der Riemann-Integration)**.** *(i) (Treppenfunktion integrierbar) Jede Treppenfunktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar. Ihr Riemann-Integral stimmt mit dem elementaren Integral wie in Definition 6.5 überein, d. h.*

$$\int_I \varphi = S_I \varphi.$$

(ii) (stetige und beschränkte Funktion integrierbar) Jede stetige und beschränkte Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar.

(iii) Jede beschränkte monotone [1] Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar.

Seien jetzt $f, g : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbare Funktionen und $c \in \mathbb{R}$.

(iv) (Monotonie) Falls $f \leq g$, dann gilt

$$\int_I f \leq \int_I g. \tag{6.13}$$

(v) (Linearität) Die Funktionen cf und $f + g$ sind Riemann-integrierbar und

$$\int_I cf = c \int_I f, \tag{6.14}$$

$$\int_I (f + g) = \int_I f + \int_I g. \tag{6.15}$$

[1] d. h. monoton wachsende oder fallende

(vi) (Minimum, Maximum, Absolutbetrag) Die Funktionen $\min\{f,g\}$, $\max\{f,g\}$ *und* $|f|$ *sind Riemann-integrierbar. Es gilt*

$$\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|. \tag{6.16}$$

(vii) (Gebietsadditivität) Seien $a,b,c \in \mathbb{R}$ *so, dass* $a \leq b \leq c$, *und* $f : [a,c] \to \mathbb{R}$. *Die Funktion* f *ist Riemann-integrierbar g. d. w. die eingeschränkten Funktionen* $f|_{[a,b]}$ *und* $f|_{[b,c]}$ *Riemann-integrierbar sind. In diesem Fall gilt*

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Beweis: (i) folgt aus der Definition des Riemann-Integrals, indem wir die Treppenfunktion $\varphi := f$ betrachten, und aus $\underline{\int}_I f \leq \overline{\int}_I f$.

(ii): [Stra, Satz 6.2.2., S. 132]

(iii): [Stra, Satz 6.2.1., S. 131]

(iv): [Stra, Satz 6.3.1., S. 135]

(v): [Stra, Satz 6.3.2., S. 135]

(vi): [DK04b, Theorem 6.2.8, p. 428]

(Im Fall, dass I kompakt und f stetig ist, folgt die Ungleichung (10.16) auch aus [Stra, Korollar 6.3.1., S. 137].)

(vii): [Stra, Satz 6.3.3, S. 138] (Dass f Riemann-integrierbar ist, falls $f|_{[a,b]}$ und $f|_{[b,c]}$ Riemann-integrierbar sind, folgt aus der Definition der Riemann-Integrierbarkeit, indem wir aus Treppenfunktionen für $f|_{[a,b]}$ und $f|_{[b,c]}$ eine Treppenfunktion für f konstruieren.)

Bemerkungen. [Riemann-Integration]

- (i): Intuitiv ist das Integral einer Funktion der Inhalt (mit Vorzeichen) der Fläche zwischen der Abszisse und dem Graphen der Funktion. Gemäss Beispiel 6.6 stimmt das *elementare* Integral einer Treppenfunktion φ wie in Definition 6.5 mit dieser Intuition überein. Wegen (i) stimmt das *Riemann*-Integral von φ daher mit unserer Intuition überein. Das motiviert Definition 6.7 (Riemann-Integrierbarkeit, -Integral).

- (iv): Da $f \leq g$, ist die Fläche unter dem Graphen von f in der Fläche unter dem Graphen von g enthalten.[2] Intuitiv gilt daher $\int_I f \leq \int_I g$, d. h. die Aussage von (iv). (Wir haben allerdings den Begriff des Inhaltes einer Fläche nicht definiert. Das werden wir in Analysis 2 tun.)

- (v): Wir definieren die Menge

$$V := \big\{\text{Riemann-integrierbare Funktion von } I \text{ nach } \mathbb{R}\big\}$$

und *punktweise Skalarmultiplikation* und *punktweise Addition* auf V als die Abbildungen

$$\cdot : \mathbb{R}\times V \to V,\ \cdot(c,f) := cf,\ (cf)(x) := c\cdot(f(x)), \qquad + : V\times V \to V,\ +(f,g) := f+g\ (f+g)(x) := f(x$$

Das Tripel $(V,+,\cdot)$ ist ein Vektorraum. (Siehe die Vorlesung *Lineare Algebra*.) Wir definieren *Integration über I* als die Abbildung

$$\int_I : V \to \mathbb{R}, \qquad \int_I (f) := \int_I f.$$

Aussage (v) impliziert, dass Integration über I linear ist, d. h. die Bedingungen (5.4) erfüllt. Das ist analog zur Tatsache, dass Ableiten an einer Stelle x_0 linear ist. (Siehe Bemerkung 5.11(ii).)

- (vii): Hier verwenden wir die Definition 6.11.

Satz 6.12 liefert viele Beispiele für Riemann-integrierbare Funktionen und ist nützlich zur Berechnung von Integralen. Für jede Menge X und jede Zahl $c \in \mathbb{R}$ schreiben wir die Funktion auf X, die konstant gleich c ist, als

$$c_X : X \to \mathbb{R}, \qquad c_X(x) := c. \tag{6.17}$$

Beispiele. [Riemann-Integration, Eigenschaften]

- Wir betrachten die Funktion

$$f : I := [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := 1 + 2x.$$

Behauptung: Diese Funktion ist Riemann-integrierbar mit

$$\int_0^1 f = 2.$$

[2] Wir nehmen hier an, dass $f \geq 0$.

Beweis: Die Funktion 1_I ist eine Treppenfunktion. Gemäss Satz 6.12(i) gilt daher:

$$1_I \text{ ist Riemann-integrierbar}, \qquad \int_I 1_I = S_I 1_I = 1 \cdot |[0,1]| = 1. \tag{6.18}$$

Gemäss Beispiel 6.9 ist die Funktion $[0,1] \ni x \mapsto x \in \mathbb{R}$, Riemann-integrierbar mit

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}.$$

Gemäss Satz 6.12(v) (Linearität) ist daher die Funktion $[0,1] \ni x \mapsto 2x \in \mathbb{R}$, Riemann-integrierbar mit

$$\int_0^1 2x\,dx = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Mittels (6.18) und Satz 6.12(v) (Linearität) folgt daraus, dass die Funktion f Riemann-integrierbar ist mit

$$\int_0^1 f = \int_0^1 (1+2x)dx = 1 + 1 = 2.$$

Das beweist die Behauptung.

- Wir betrachten die Funktion

$$f : I := [-1,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \left\{ \begin{array}{ll} -1, & \text{für } x \leq 0, \\ x, & \text{für } x > 0. \end{array} \right\}$$

Behauptung: Diese Funktion ist Riemann-integrierbar mit

$$\int_{-1}^1 f = -\frac{1}{2}.$$

Beweis: Die Funktion $f|_{[-1,0]} = (-1)_{[-1,0]}$ ist eine Treppenfunktion und daher Riemann-integrierbar mit $\int_{-1}^0 (-1)_{[-1,0]} = (-1) \cdot |[-1,0]| = -1$. Gemäss Beispiel 6.9 ist $f|_{[0,1]} = \mathrm{id}_{[0,1]}$ Riemann-integrierbar mit Integral $\int_0^1 f = \int_{[0,1]} f|_{[0,1]} = \frac{1}{2}$. Mittels Satz 6.12(vii) (Gebietsadditivität) folgt daraus, dass die Funktion f Riemann-integrierbar ist mit

$$\int_0^1 f = \int_{-1}^0 f + \int_0^1 f = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Das beweist die Behauptung.

- **Behauptung:** Die Funktion[3]

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := e^{-x^2}$$

ist Riemann-integrierbar mit

$$0 \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1.$$

Beweis: Da die Funktion stetig und beschränkt ist, ist sie gemäss Satz 6.12(ii) Riemann-integrierbar. Da $f \leq 1_{[0,1]}$, folgt mittels Satz 6.12(iv) (Monotonie), dass

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \leq \int_0^1 1_{[0,1]} = 1. \tag{6.19}$$

Ein analoges Argument zeigt, dass $0 \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx$. Das beweist die Behauptung.

Bemerkung: Die Funktion f ist die Einschränkung der *gaußschen Glockenkurve* auf das Intervall $[0,1]$.

- **Behauptung:** Die Funktion

$$f :]0,1], \qquad f(x) := \sin\left(\frac{1}{x}\right),$$

ist Riemann-integrierbar mit

$$\left| \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx \right| \leq 1.$$

Beweis: Da diese Funktion stetig und beschränkt ist, ist sie gemäss Satz 6.12(ii) Riemann-integrierbar. Gemäss Satz 6.12(vi) ist die Funktion $]0,1] \ni x \mapsto \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \in \mathbb{R}$ daher Riemann-integrierbar mit

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx \right| &\leq \int_0^1 \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| dx \\ &\leq \int_0^1 1_{[0,1]} \qquad \text{(gemäss Satz 6.12(iv), Monotonie)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Das beweist die Behauptung.

Bemerkungen. [Abschätzung für ein Integral, numerische Integration]

[3] Wir verwenden hier die Konvention $e^{\pm x^k} := e^{(\pm x^k)}$, also nicht $(e^{\pm x})^k = e^{\pm kx}$.

- Es gibt keine Formel für die Funktion $x \mapsto \int_0^x e^{-y^2} dy$. Trotzdem konnten wir zeigen, dass f integrierbar ist und die Abschätzung (6.19) für ihr Integral zeigen.
- Wir können ein Integral *numerisch* näherungsweise berechnen. Ein einfaches numerisches Integrationsverfahren ist die *linke Rechteckregel*. Bei diesem Verfahren nähern wir das Integral durch eine bestimmte Riemannsumme an. Siehe Abschnitt 6.8.4 und die Vorlesungen *Numerische Methoden* (ITET, 4. Semester) und *Numerical Methods for CSE* (RW, 3. Semester).

Im Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Satz 6.15) wird neben dem gewöhnlichen Integral auch ein Integral mit vertauschten Grenzen auftreten. Dieses ist wie folgt definiert.

Definition 6.13 (Integral mit vertauschten Grenzen)**.** *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Wir definieren das Integral*

$$\int_b^a f := -\int_a^b f.$$

Bemerkung 6.14. [Integral mit vertauschten Grenzen, Gebietsadditivität] Integration ist auch dann gebietsadditiv, wenn wir vertauschte Grenzen zulassen. Das bedeutet Folgendes. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $f : \big[\min\{a, b, c\}, \max\{a, b, c\}\big] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Dann gilt

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Das folgt aus Satz 6.12(vii) (Gebietsadditivität). (Überprüfen Sie das!)

6.3 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Stammfunktion

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96b, 4.2] und [Stra, 6.3]. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung besagt grob, dass Ableiten und Integrieren zu einander inverse Prozesse sind. Genauer gesagt, betrachten wir im Hauptsatz das Riemann-Integral einer Funktion f, in welchem die obere Integrationsgrenze variabel ist. Dieses Integral ist eine Funktion einer reellen Veränderlichen. Der erste Teil des Hauptsatzes besagt, dass die Ableitung dieses Integrals gleich der ursprünglichen Funktion f ist.

Der zweite Teil des Hauptsatzes besagt, dass das Integral (mit variabler oberer Grenze) der Ableitung einer Funktion F gleich F minus den Wert von F an der unteren Integrationsgrenze ist.

Eine Stammfunktion einer Funktion f ist eine Funktion F, deren Ableitung gleich f ist. Gemäss dem zweiten Teil des Hauptsatzes ist das bestimmte Integral einer Funktion f gleich dem Unterschied der Werte einer Stammfunktion F von f an den Integrationsgrenzen. Der zweite Teil des Hauptsatzes ist daher ein wichtiges Werkzeug zur Berechnung von bestimmten Integralen.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $a < b$. Wir schreiben

$$I := [a, b].$$

Satz 6.15 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)**.** *(i) (erster Hauptsatz) Seien $c \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Wir definieren*

$$F : I \to \mathbb{R}, \qquad F(x) := \int_c^x f. \tag{6.20}$$

Sei $x \in I$ eine Stetigkeitsstelle von f. [4] *Dann ist F an der Stelle x differenzierbar mit Ableitung*

$$F'(x) = f(x).$$

(ii) (zweiter Hauptsatz = Formel von Newton und Leibnitz) Sei $F : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, deren Ableitung Riemann-integrierbar ist. Dann gilt

$$\int_a^b F' = F(b) - F(a).$$

Beweis: [Wal97, erster, zweiter Hauptsatz, S. 259]

Wir werden Aussage (i) auf S. 250 beweisen.

Für (i) im Fall, dass f auf ganz I stetig ist, siehe auch [Stra, Satz 6.3.4., S. 139].

Für (ii) im Fall, dass F' stetig ist, siehe auch [Stra, Korollar 6.3.4., S. 140].

Dieser Satz wurde von Isaac Newton und Gottfried Wilhelm Leibniz gefunden. (Siehe Abbildungen 0.1 und 0.2.)

Bemerkungen. [Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung]

- (i): Im Fall $x < c$ ist das Integral $\int_c^x f$ wie in Definition 6.13 definiert.
- (i): Für $x = a$ meinen wir mit *Differenzierbarkeit an der Stelle a* die *rechtsseitige Differenzierbarkeit an der Stelle a* und mit $F'(a)$ die rechtsseitige Ableitung $F'_+(a)$ (wie in Definition 5.9). Analoges gilt für $x = b$.

[4] Damit meinen wir, dass f an der Stelle x stetig ist.

Beispiele 6.16. [Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung]

(i) Erster Hauptsatz: Wir betrachten

$$a := 0, \qquad b := 1, \qquad f : I := [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) := 1.$$

Diese Funktion ist stetig und beschränkt. Gemäss Satz 6.12(ii) ist sie daher Riemann-integrierbar. Somit ist die Voraussetzung des Satzes 6.15(i) (erster Hauptsatz) erfüllt. Wir definieren

$$F : I \to \mathbb{R}, \qquad F(x) := \int_0^x 1_I = \int_0^x 1\, dy.$$

Gemäss der Aussage von Satz 6.15(i) ist diese Funktion differenzierbar mit Ableitung

$$F'(x) = f(x) = 1, \qquad \forall x \in I. \tag{6.21}$$

Wir können das auch direkt sehen. Gemäss Definition 6.11 und Satz 6.12(i) gilt nämlich

$$F(x) = \int_{[0,x]} 1_I|_{[0,x]} = 1 \cdot |[0,x]| = x.$$

Gemäss Beispiel 5.3(i) ist diese Funktion differenzierbar mit Ableitung $F' \equiv 1$. Das stimmt mit (6.21) überein.

(ii) Zweiter Hauptsatz: Wir betrachten

$$a := 0, \qquad b := 1, \qquad F : I := [0,1] \to \mathbb{R},\ F(x) := x.$$

Diese Funktion ist differenzierbar mit $F' \equiv 1$. Die Funktion F' ist daher Riemann-integrierbar. Gemäss Satz 6.15(ii) (zweiter Hauptsatz) gilt daher

$$\int_0^1 F' = F(1) - F(0) = 1 - 0 = 1.$$

Wir können das auch direkt sehen. Da $F' \equiv 1$, gilt nämlich $\int_0^1 F' = \int_0^1 1 = 1$.

Sei X eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ so, dass jeder Punkt $x_0 \in X$ eine Umgebung in X besitzt, die ein offenes oder halb-offenes Intervall ist.

Bemerkung 6.17. Es gibt eine Kollektion $\mathcal{I}$ von nichtleeren Intervallen, deren Vereinigung gleich X ist so, dass die Vereinigung von je zwei verschiedenen Elementen von $\mathcal{I}$ *kein* Intervall ist.

Sei $f : X \to \mathbb{R}$.

Definition 6.18 (Stammfunktion)**.** *Eine* Stammfunktion für f *ist eine differenzierbare Funktion* $F : X \to \mathbb{R}$ *so, dass*

$$F' = f.$$

Bemerkungen 6.19. [Integral, Stammfunktion und Hauptsatz] Wir nehmen an, dass f stetig und beschränkt ist.

(i) Die Funktion f besitzt eine Stammfunktion F. Im Fall, dass $X = I$ ein Intervall ist, ist nämlich gemäss dem ersten Hauptsatz für jedes $c \in I$ die Funktion $F(x) := \int_c^x f$ eine Stammfunktion von f. In der allgemeinen Situation wenden wir den ersten Hauptsatz auf jedes Intervall in $\mathcal{I}$ an, wobei $\mathcal{I}$ eine Kollektion wie in Bemerkung 6.17 ist.

(ii) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und F eine Stammfunktion von f. Gemäss dem zweiten Hauptsatz gilt

$$\int_a^b f = \int_a^b F' = F(b) - F(a).$$

Wir können das Integral $\int_a^b f$ daher mit Hilfe einer Stammfunktion F berechnen.

Beispiel 6.20. [Integral mit Hilfe einer Stammfunktion berechnen] Wir betrachten

$$a := 0, \qquad b := 1, \qquad f : [0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) := 2xe^{x^2}.$$

Um das Integral $\int_0^1 f$ zu berechnen, stellen wir fest, dass die Funktion

$$F : [0, 1] \to \mathbb{R}, \qquad F(x) := e^{x^2},$$

eine Stammfunktion von F ist. (Überprüfen Sie das!) Gemäss Bemerkung 6.19(ii) gilt daher

$$\int_0^1 f = F(1) - F(0) = e^1 - e^0 = e - 1.$$

Beweis des Satzes 6.15(i) (erster Hauptsatz): Sei $x_0 \in I$ eine Stetigkeitsstelle von f.

Fall: $x_0 \in]a, b[$: Sei $\varepsilon \in]0, \infty[$. Da f in x_0 stetig ist, gibt es ein $\delta \in]0, \infty[$ so, dass

$$\forall y \in I : |y - x_0| \leq \delta \Rightarrow \big|f(y) - f(x_0)\big| \leq \varepsilon. \tag{6.22}$$

Sei $x \in I$ so, dass $|x - x_0| \leq \delta$ und $x \neq x_0$. Es gilt

$$\begin{aligned} &F(x) - F(x_0) \\ &= \int_c^x f - \int_c^{x_0} f \\ &= \int_{x_0}^x f \text{ (gemäss Satz 6.12(vii) (Gebietsadditivität) und Bemerkung 6.14),} \end{aligned} \tag{6.23}$$

$$\begin{aligned} &\left| \int_{x_0}^x f - f(x_0) \cdot (x - x_0) \right| \\ &= \left| \int_{x_0}^x (f - f(x_0)) \right| \text{ (gemäss Satz 6.12((i),(v)), Integral einer Treppenfunktion, Linearität)} \\ &\leq \int_{x_0}^x \left| f - f(x_0) \right| \qquad \text{(gemäss Satz 6.12(vi))} \\ &\leq \int_{x_0}^x \varepsilon \qquad \text{(gemäss (6.22) und Satz 6.12(iv), Monotonie)} \\ &= \varepsilon(x - x_0) \qquad \text{(gemäss Satz 6.12((i),(v)), Integral einer Treppenfunktion),} \end{aligned} \tag{6.24}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{\int_{x_0}^x f - f(x_0) \cdot (x - x_0)}{x - x_0} \right| \qquad \text{(gemäss (6.23))} \\ &\leq \varepsilon \qquad \text{(gemäss (6.24)).} \end{aligned}$$

Es folgt, dass F an der Stelle x_0 differenzierbar ist mit Ableitung

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Das beweist Satz 6.15(i) im Fall, dass $x_0 \in]a, b[$. Der Fall $x_0 = a$ oder b kann analog behandelt werden. □

Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt, dass Integration und Ableiten (= Differentiation) zueinander inverse Operationen sind, im folgenden Sinn. Seien $n, p \in \mathbb{N}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $Y \subseteq \mathbb{R}^p$. Wir definieren

$$C(X, Y) := \big\{\text{stetige Funktion von } X \text{ nach } Y\big\}, \qquad C(X) := C(X, \mathbb{R}).$$

Sei I ein Intervall mit positiver Länge und $c \in I$. Wir definieren[5]

$$\begin{aligned} C^1(I;c) &:= \big\{\text{stetig differenzierbare Funktion } F : I \to \mathbb{R} : F(c) = 0\big\}, \\ \mathrm{D}_c &: C^1(I;c) \to C(I), \qquad \mathrm{D}_c(F) := F', \\ \int_c &: C(I) \to C^1(I;c), \qquad \int_c(f) := \int_c^{\bullet} f. \end{aligned} \tag{6.25}$$

Bemerkungen.

- Wir definieren also $\int_c(f)(x) := \int_c^x f$.
- Für $f \in C(I)$ und $x \in I$ so, dass $x < c$, ist $\int_c^x f$ wie in Definition 6.13 festgelegt.
- Sei $f \in C(I)$ und $x \in I$ so, dass $x \geq c$. Da f stetig ist und $[c,x]$ kompakt ist, besitzt die Einschränkung $f|_{[c,x]}$ ein Maximum und ein Minimum. Daher ist $f|_{[c,x]}$ beschränkt. Gemäss Satz 6.12(ii) ist $f|_{[c,x]}$ daher Riemann-integrierbar. Der Ausdruck $\int_c^x f$ ist daher sinnvoll.

  Gemäss dem ersten Hauptsatz ist $F := \int_c^{\bullet} f$ differenzierbar mit Ableitung $F' = f$. Da f stetig ist, gilt also $F \in C^1(I)$. Es gilt $F(c) = \int_c^c f = 0$. Also gilt, dass $\int_c^{\bullet} f = F \in C^1(I;c)$.

  Die Abbildung (6.25) ist daher wohldefiniert, d. h., sie ist auf ganz $C(I)$ sinnvoll und nimmt Werte in $C^1(I;c)$ an.

Korollar 6.21 (Integration und Ableiten zueinander invers)**.** *Sei $c \in I$. Es gilt*

$$\mathrm{D}_c \circ \int_c = \mathrm{id}_{C(I)}, \tag{6.26}$$

$$\int_c \circ \mathrm{D}_c = \mathrm{id}_{C^1(I;c)}\,. \tag{6.27}$$

Bemerkungen.

- Das bedeutet, dass

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_c\left(\int_c(f)\right) &= \mathrm{id}_{C(I)}(f) = f, \qquad \forall f \in C(I), \\ \int_c(\mathrm{D}_c(F)) &= \mathrm{id}_{C^1(I;c)}(F) = F, \qquad \forall F \in C^1(I;c). \end{aligned}$$

- Es folgt, dass D_c und $\int_c$ bijektiv sind und Umkehrabbildungen voneinander sind, d. h.

$$\mathrm{D}_c^{-1} = \int_c, \qquad \int_c^{-1} = \mathrm{D}_c\,.$$

[5] An den Endpunkten von I fordern wir einseitige Differenzierbarkeit und betrachten einseitige Ableitungen.

Beweis des Korollars 6.21: Aus dem ersten Hauptsatz (Satz 6.15(i)) folgt, dass

$$\mathrm{D}_c \circ \int_c (f) = \mathrm{D}_c \left(\int_c (f) \right) = f, \, \forall f \in C(I), \qquad \text{d. h.} \qquad \mathrm{D}_c \circ \int_c = \mathrm{id}_{C(I)}, \tag{6.28}$$

d. h. (6.26). Sei jetzt $F \in C^1(I; c)$ und $x \in I$. Aus dem zweiten Hauptsatz (Satz 6.15(ii)) mit a, b ersetzt durch c, x folgt, dass

$$\int_c (\mathrm{D}_c(F))(x) = \int_c^x F' = F(x) - F(c) = F(x),$$

da $F(c) = 0$. Daraus folgt, dass

$$\int_c \circ \, \mathrm{D}_c(F) = \int_c (\mathrm{D}_c(F)) = F.$$

Es folgt, dass

$$\int_c \circ \, \mathrm{D}_c = \mathrm{id}_{C^1(I;c)},$$

d. h. (6.27). Das beweist Korollar 6.21. □

6.4 Unbestimmte Integration, Umkehrung des Ableitens

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96b, 4.2] und [Stra, 6.1]. Sei f eine Funktion, die eine Stammfunktion F_0 besitzt. Das *unbestimmte Integral* von f ist die Menge aller Stammfunktionen von f. Es besteht aus allen Funktionen der Form $F_0 + C$, wobei C eine *lokal konstante* Funktion ist. Ableiten und unbestimmte Integration sind zueinander inverse Prozesse.

Sei X eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ so, dass jeder Punkt $x_0 \in X$ eine Umgebung in X besitzt, die ein offenes oder halb-offenes Intervall ist. Sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die eine Stammfunktion besitzt.

Definition 6.22 (unbestimmtes Integral)**.** *Wir definieren das* unbestimmte Integral von f *als die Menge der Stammfunktionen von* f*,*

$$\int f := \big\{ \textit{Stammfunktion von } f \big\}. \tag{6.29}$$

Bemerkungen 6.23. [unbestimmtes Integral, Schreibweise, Zusammenhang mit dem bestimmten Integral]

(i) (Schreibweise) Sei A ein Ausdruck in x so, dass $x \mapsto A$ eine Funktion darstellt. Wir schreiben

$$\int A\,dx := \int f, \qquad \text{zum Beispiel} \qquad \int x\,dx := \int p_1, \quad \text{wobei} \quad p_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ p_1(x) := x.$$

Bei dieser Schreibweise ist unsere Konvention, dass der Definitionsbereich von f der grösstmögliche ist und der Zielbereich von f gleich $\mathbb{R}$ ist. Zum Beispiel ist dieser Definitionsbereich für $A := x$ durch $\mathbb{R}$ gegeben und für $A := \frac{1}{x}$ durch $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(ii) (Term *unbestimmtes Integral*) Wir betrachten das Integral von f mit unterer Grenze c und veränderlicher oberer Grenze, d. h. $\int_c^\bullet f$ wie in (6.25). Falls f stetig ist, ist $\int_c^\bullet f$ gemäss dem ersten Hauptsatz eine Stammfunktion von f. Das motiviert den Term *unbestimmtes Integral* für die Menge der Stammfunktionen.

(iii) (kein echtes Integral) Das unbestimmte Integral beruht auf dem Begriff einer Stammfunktion, der auf dem Begriff der Ableitung beruht. Im unbestimmten Integral steckt also kein echtes Integral drin. Mit einem echten Integral meinen wir hier ein bestimmtes Integral wie in Definition 6.7(ii). Der einzige Grund für den Term *unbestimmtes Integral* und die Notation $\int f$ ist der in (ii) genannte Zusammenhang mit $\int_c^\bullet f$. (In $\int_c^\bullet f$ steckt für jedes $x \in I$ das echte Integral $\int_c^x f$ drin.)

(iv) (Stammfunktion $\not\Rightarrow$ Integral) Nicht jede Stammfunktion einer Funktion f hat die Form $\int_c^\bullet f$. Zum Beispiel ist für $f = 0_I$ die Funktion 1_I eine Stammfunktion, aber $\int_c^\bullet 0_I = 0_I \neq 1_I$, für jedes $c \in I$.

In Bemerkung 6.23 werden lokal konstante Funktionen vorkommen. Seien $n, p \in \mathbb{N}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^p$ und $C : X \to Y$.

Definition ((lokale) Konstanz). *(i) Die Funktion C heisst* konstant *g. d. w. es ein $y_0 \in Y$ gibt so, dass $C(x) = y_0$, für jedes $x \in X$.*

(ii) Die Funktion C heisst lokal konstant *g. d. w. es für jeden Punkt $x_0 \in X$ eine Umgebung U von x_0 in X gibt so, dass C auf U konstant ist. Wir definieren die Mengen*

$$\mathcal{C} := \mathcal{C}^X := \big\{\textit{konstante Funktion von } X \textit{ nach } \mathbb{R}\big\}, \tag{6.30}$$

$$\mathcal{C}_{\mathrm{loc}} := \mathcal{C}^X_{\mathrm{loc}} := \big\{\textit{lokal konstante Funktion von } X \textit{ nach } \mathbb{R}\big\}. \tag{6.31}$$

Bemerkung. Eine Eigenschaft gilt *lokal*, falls sie in einer (möglicherweise kleinen) Umgebung jedes Punktes gilt. Entsprechend ist eine Funktion lokal konstant g. d. w. sie in einer Umgebung jedes Punktes konstant ist. (Vergleichen Sie diese Bemerkung mit Bemerkung 5.50(i).)

Sei X eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ so, dass jeder Punkt $x_0 \in X$ eine Umgebung in X besitzt, die ein offenes oder halb-offenes Intervall ist. Sei $\mathcal{I}$ eine Kollektion $\mathcal{I}$ wie in Bemerkung 6.17.

Bemerkung 6.24. [Term *lokal konstant*, Charakterisierung lokaler Konstanz]Eine Funktion $C : X \to \mathbb{R}$ ist genau dann lokal konstant, falls es eine Familie von Zahlen $(c_I)_{I\in\mathcal{I}}$ in $\mathbb{R}$ gibt so, dass

$$C = c_I \qquad \text{auf} \qquad I, \qquad \forall I \in \mathcal{I}.$$

Beispiele 6.25. [lokale Konstanz]

(i) Wir betrachten den Fall, dass es ein $k \in \mathbb{N}_0$ und verschiedene Intervalle $I_1, \dots, I_k$ gibt so, dass $\mathcal{I} = \{I_1, \dots, I_k\}$, also $X = \bigcup_{i=1}^k I_i$. Dann ist $C : X \to \mathbb{R}$ genau dann lokal konstant, falls es Zahlen $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ gibt so, dass

$$C = c_i \qquad \text{auf} \qquad I_i, \qquad \forall i \in \{1, \dots, k\}.$$

Das folgt aus Bemerkung 6.24.

(ii) Wir betrachten den Fall $k = 1$. Dann ist $I := X = \bigcup_{i=1}^1 I_i = I_1$ ein Intervall. Eine Funktion von I $\mathbb{R}$ ist genau dann lokal konstant, falls sie konstant ist.

(iii) Gemäss (i) ist eine Funktion $C : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ genau dann lokal konstant, falls es Zahlen $c_\pm \in \mathbb{R}$ gibt so, dass

$$C = \begin{cases} c_+ & \text{auf }]0, \infty[, \\ c_- & \text{auf }]-\infty, 0[. \end{cases}$$

Bemerkungen 6.26. [Darstellung des unbestimmtes Integrals mittels einer festen Stammfunktion und lokal konstanter Funktionen] Wir können das unbestimmte Integral einer Funktion mittels einer Stammfunktion wie folgt ausdrücken. Für jede Funktion $F_0 : X \to \mathbb{R}$ und jede Menge $\mathcal{F}$ von Funktionen von X nach $\mathbb{R}$ definieren wir

$$F_0 + \mathcal{F} := \{F_0 + F, \mid F \in \mathcal{F}\}. \tag{6.32}$$

Seien jetzt $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion und F eine Stammfunktion von f. Dann gilt

$$\int f = F + \mathcal{C}_{\text{loc}} = \{F + C \mid C \in \mathcal{C}_{\text{loc}}\}. \tag{6.33}$$

Das folgt aus der Linearität des Ableitens und Korollar 5.16(i) (Mittelwertsatz). (Siehe [Stra, Satz 6.1.1, S. 117].) Die Inklusion "$\supseteq$" in (6.33) besagt, dass für jede Stammfunktion F von f und jede lokal konstante Funktion C die Summe $F + C$ ebenfalls eine Stammfunktion von f ist. Die umgekehrte Inklusion "$\subseteq$" besagt, dass sich je zwei

Stammfunktionen F und G von f durch eine lokal konstante Funktion C unterscheiden (d. h. $G - F = C$).

Wir nehmen jetzt an, dass $X =: I$ ein Intervall positiver Länge ist. Gemäss Beispiel 6.25(ii) gilt

$$\mathcal{C}^I_{\text{loc}} = \mathcal{C} = \mathcal{C}^I = \big\{\text{konstante Funktion von } I \text{ nach } \mathbb{R}\big\}.$$

Gemäss (6.33) gilt daher

$$\int f = F + \mathcal{C}_{\text{loc}} = F + \mathcal{C} = \big\{F + C \,\big|\, C \in \mathcal{C}\big\}. \tag{6.34}$$

Die konstante Funktion C spielt hierbei die Rolle der *Integrationskonstante*. Die Inklusion "$\supseteq$" in (6.34) besagt, dass für jede Stammfunktion F von f und jede konstante Funktion C die Summe $F+C$ ebenfalls eine Stammfunktion von f ist. Die umgekehrte Inklusion "$\subseteq$" besagt, dass sich je zwei Stammfunktionen von f durch eine konstante Funktion C unterscheiden.

Beispiele 6.27. [unbestimmtes Integral]

(i) Für jede Menge X und jedes $c \in \mathbb{R}$ schreiben wir wie in (6.17) $c_X : X \to \mathbb{R}$ für die Funktion, die konstant gleich c ist. Wir betrachten die konstante Funktion $f := 1_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die Funktion $F := p_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p_1(x) := x$, ist eine Stammfunktion für $1_{\mathbb{R}}$. Daher gilt gemäss (6.34), dass

$$\int 1\,dx = \int 1_{\mathbb{R}} = p_1 + \mathcal{C} = \big\{p_1 + C \,\big|\, C : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ konstant}\big\} = \big\{x \mapsto x + c \,\big|\, c \in \mathbb{R}\big\}. \tag{6.35}$$

(ii) Wir betrachten die Funktion

$$f = p_{-1} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad p_{-1}(x) := x^{-1} = \frac{1}{x}.$$

Die Funktion $F := \log \circ |\bullet| : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion für p_{-1}. Das folgt mit Hilfe der Kettenregel. (Überprüfen Sie das!) Daher gilt gemäss (6.33), dass

$$\int \frac{1}{x} dx = \int p_{-1} = \log \circ |\bullet| + \mathcal{C}_{\text{loc}} = \big\{ \log \circ |\bullet| + C \,\big|\, C : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \text{ lokal konstant}\big\}$$
$$= \left\{ x \mapsto \begin{cases} \log x + c_+, & \text{falls } x > 0, \\ \log(-x) + c_-, & \text{falls } x < 0 \end{cases} \,\middle|\, c_\pm \in \mathbb{R} \right\} \qquad \text{gemäss Beispiel 6.25(iii).}$$

Zum Beispiel gilt also

$$\left(x \mapsto \begin{cases} \log x + 1, & \text{falls } x > 0, \\ \log(-x), & \text{falls } x < 0 \end{cases} \right) \in \int \frac{1}{x} dx.$$

Bemerkung 6.28. [Notation für das unbestimmte Integral] Sei f eine Funktion und F eine Stammfunktion von f. Das unbestimmte Integral wird anstelle von $F + \mathcal{C}_{\text{loc}}$ oft als $A + c$ geschrieben, wobei A ein Ausdruck in x ist und c *Integrationskonstante* genannt wird. Zum Beispiel wird geschrieben:

$$\text{“} \int \frac{1}{x}\, dx = \log|x| + c\text{”}$$

Das ist aus folgenden Gründen unpräzise:

- Der Ausdruck $\log|x|$ ist keine Funktion, sondern eine Zahl (für ein gegebenes x). “$\log|x|$” sollte durch die Funktion $F : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $F(x) := \log|x|$ ersetzt werden.

- Es gibt Stammfunktionen der Funktion $x \mapsto \frac{1}{x}$, die nicht die Form $x \mapsto \log|x| + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ haben. (Siehe Beispiel 6.27(ii).) Eine allgemeine Stammfunktion für $x \mapsto \frac{1}{x}$ hat die Form $\big(x \mapsto \log|x|\big) + C$ für eine lokal konstante Funktion $C : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$.

- Das unbestimmte Integral von $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist nicht eine einzelne Stammfunktion dieser Funktion, sondern die *Menge aller Stammfunktionen*, d. h.

$$\int \frac{1}{x} dx = \left\{ x \mapsto \begin{cases} \log x + c_+, & \text{falls } x > 0, \\ \log(-x) + c_-, & \text{falls } x < 0 \end{cases} \;\middle|\; c_\pm \in \mathbb{R} \right\}.$$

  (Siehe Beispiel 6.27(ii).)

Bemerkung. [naive Definition des unbestimmten Integrals] Naiv können wir versuchen, das unbestimmte Integral von f einfach als F zu definieren, wobei F eine Stammfunktion von f ist. Das Problem mit diesem Versuch ist, dass es keine “ausgezeichnete”[6] Stammfunktion zu f gibt. Wir müssten bei diesem Ansatz also für jedes f eine Stammfunktion $\widetilde{\int} f = F$ wählen. Diese Bevorzugung einer bestimmten Stammfunktion ist unnatürlich. Es kann auch dazu führen, dass für gewisse f und g gilt $\widetilde{\int}(f+g) \neq \widetilde{\int} f + \widetilde{\int} g$, also, dass $\widetilde{\int}$ nicht linear ist. Aus diesen Gründen definieren wir das unbestimmte Integral $\int f$ stattdessen als die *Menge aller* Stammfunktionen von f.

Unbestimmte Integration ist linear. Um das zu erklären, sei X eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ so, dass jeder Punkt $x_0 \in X$ eine Umgebung in X besitzt, die ein offenes oder halb-offenes

[6] Mit “ausgezeichnet” meinen wir “speziell” oder “bevorzugt”.

Intervall ist. Wir wählen eine Kollektion $\mathcal{I}$ wie in Bemerkung 6.17. Wir definieren $X := \bigcup \mathcal{I} = \bigcup_{I\in\mathcal{I}} I$, $\mathcal{C}_{\text{loc}}$ wie in (6.31), $F_0 + \mathcal{F}$ wie in (6.32) und

$$V := \big\{F + \mathcal{C}_{\text{loc}} \,\big|\, F : X \to \mathbb{R} \text{ differenzierbar}\big\},$$
$$W := \big\{f : X \to \mathbb{R} \,\big|\, \exists F : X \to \mathbb{R} \text{ differenzierbar: } F' = f\big\}.$$

Für Funktionen definieren wir Addition + und Skalarmultiplikation · punktweise wie in (5.10,5.11). Das Tripel $(W, +, \cdot)$ ist ein (reeller) Vektorraum. Seien

$$c \in \mathbb{R}, \qquad \mathcal{F}, \mathcal{G} \in V.$$

Wir definieren

$$c\mathcal{F} := c \cdot \mathcal{F} := cF + \mathcal{C}_{\text{loc}}, \tag{6.36}$$
$$\mathcal{F} + \mathcal{G} := (F + G) + \mathcal{C}_{\text{loc}}, \tag{6.37}$$

wobei $F \in \mathcal{F}$ und $G \in \mathcal{G}$ beliebig sind. Das Tripel $(V, +, \cdot)$ ist ein Vektorraum. Wir definieren die durch *Ableiten* (oder *Differentiation*) *induzierte Abbildung* als die Abbildung

$$\overline{\mathrm{D}} : V \to W, \qquad \overline{\mathrm{D}}(\mathcal{F}) := \mathcal{F}' := F', \tag{6.38}$$

wobei $F \in \mathcal{F}$ beliebig ist.

Bemerkung. $\overline{\mathrm{D}}(\mathcal{F})$ ist wohldefiniert, d. h. hängt nicht von der Wahl von F ab.

Wir definieren *unbestimmte Integration* als die Abbildung

$$\int : W \to V \tag{6.39}$$

gegeben durch (6.29).

Satz 6.29 (Ableiten, unbestimmte Integration: Linearität, Umkehrung des Ableitens)**.** *(i) Die durch Ableiten induzierte Abbildung $\overline{\mathrm{D}}$ (wie in* (6.38)*) und unbestimmte Integration $\int$ (wie in* (6.39)*) sind lineare Abbildungen.*

(ii) Die durch Ableiten induzierte Abbildung und unbestimmte Integration sind invers zueinander, d. h.

$$\int \circ \overline{\mathrm{D}} = \mathrm{id}_V, \qquad \textit{d. h.} \qquad \int (\overline{\mathrm{D}}(\mathcal{F})) = \int (\mathcal{F}') = \mathcal{F}, \qquad \forall \mathcal{F} \in V, \tag{6.40}$$

$$\overline{\mathrm{D}} \circ \int = \mathrm{id}_W, \qquad \textit{d. h.} \qquad \overline{\mathrm{D}}\left(\int (f)\right) = \left(\int f\right)' = f, \qquad \forall f \in W. \tag{6.41}$$

Bemerkung. Eine Abbildung T zwischen zwei Vektorräumen ist linear g. d. w. sie (5.4) erfüllt. Für $\int$ bedeutet das, dass für alle $f, g \in W$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt, dass

$$\int cf = c \int f, \tag{6.42}$$

$$\int (f+g) = \int f + \int g, \tag{6.43}$$

wobei die rechten Seiten wie in (6.36,6.37) definiert sind.

Beweis des Satzes 6.29: (i) folgt aus Bemerkung 5.11(ii) (Linearität des Ableitens). (Überprüfen Sie das!)

(ii): Die Gleichheiten (6.40,6.41) folgen aus Definition 6.22. Das beweist Satz 6.29. □

Bemerkungen.

- Aus (ii) folgt, dass $\overline{\mathrm{D}}$ und $\int$ bijektiv sind und Umkehrabbildungen voneinander sind, d. h.

$$\overline{\mathrm{D}}^{-1} = \int, \qquad \int^{-1} = \overline{\mathrm{D}}.$$

  Aus diesem Grund wird im Englischen die unbestimmte Integration auch *anti-differentiation* genannt.

- Im Gegensatz zu Korollar 6.21 ist Aussage (ii) des Satzes 6.29 eine Aussage nur über Ableitungen, nicht echte Integrale. (Vergleiche mit Bemerkung 6.23(iii).)

Beispiele. [unbestimmte Integration: Linearität, Umkehrung des Ableitens] Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die k-te Potenzfunktion als

$$p_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad p_k(x) := x^k. \tag{6.44}$$

- (Linearität) Wir berechnen $\int (p_1 + p_0)$. Gemäss Beispiel 5.12(ii) gilt $p'_{k+1} = (k+1)p_k$, also

$$\int (k+1)p_k = p_{k+1} + \mathcal{C}_{\mathrm{loc}}.$$

  Mittels Satz 6.29(i) (Linearität) folgt daraus, dass

$$\int (p_1 + p_0) = \int \left(\frac{1}{2}2p_1 + p_0\right) = \frac{1}{2}\int 2p_1 + \int p_0 = \frac{p_2}{2} + p_1 + \mathcal{C}_{\mathrm{loc}}.$$

  Wir können das auch mittels der Variable x wie folgt schreiben:

$$\int (x+1)dx = \left(x \mapsto \frac{x^2}{2} + x\right) + \mathcal{C}_{\mathrm{loc}}.$$

- (Umkehrung des Ableitens) Wir betrachten $X = \mathbb{R}$. Wir überprüfen Satz 6.29(ii), Gleichheit (6.40), für $\mathcal{F} := \mathcal{C}_{\mathrm{loc}} = \mathcal{C}$: Es gilt

$$\int (\overline{\mathrm{D}}\mathcal{C}) = \int 0 = 0 + \mathcal{C} = \mathcal{C},$$

wie behauptet. Wir überprüfen (6.41) für $f := 1_{\mathbb{R}}$: Es gilt

$$\overline{\mathrm{D}} \left(\int 1_{\mathbb{R}} \right) = \overline{\mathrm{D}}(p_1 + \mathcal{C}) = p_1' = 1_{\mathbb{R}},$$

wie gewünscht.

6.5 Partielle Integration, Anwendung: Darstellung von $\frac{\pi}{2}$ als Wallissches Produkt

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96b, 4.3] und [Stra, 6.1]. Partielle Integration ist eine wichtige Integrationstechnik. Sei X eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ so, dass jeder Punkt $x_0 \in X$ eine Umgebung in X besitzt, die ein offenes oder halb-offenes Intervall ist. Sei $F_0 : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir definieren

$$F_0 + \mathcal{F} := \big\{ F_0 + F \,\big|\, F \in \mathcal{F} \big\}$$

wie in (6.32). Sei $\mathcal{F}$ eine Kollektion reelwertiger Funktionen auf X so, dass es eine Funktion $F : X \to \mathbb{R}$ gibt so, dass $\mathcal{F} = F + \mathcal{C}_{\mathrm{loc}}$. Wir definieren

$$-\mathcal{F} := -F + \mathcal{C}_{\mathrm{loc}} = \big\{ -F + C \,\big|\, C \in \mathcal{C}_{\mathrm{loc}} \big\}, \tag{6.45}$$

wobei $F \in \mathcal{F}$ beliebig ist. Wir schreiben

$$F_0 - \mathcal{F} := F_0 + (-\mathcal{F}) = (F_0 - F) + \mathcal{C}_{\mathrm{loc}}, \tag{6.46}$$

wobei $F \in \mathcal{F}$ beliebig ist. Seien $u, v : X \to \mathbb{R}$ Funktionen.

Satz 6.30 (partielle Integration)**.** *Falls u, v differenzierbar sind und $u'v$ eine Stammfunktion besitzt, dann besitzt uv' eine Stammfunktion, und es gilt*

$$\int uv' = uv - \int u'v.$$

Bemerkung. Die rechte Seite ist wie in (6.46,6.45) mit $F_0 := uv$ und $\mathcal{F} := \int u'v$ definiert.

Beweis des Satzes 6.30: Wir wählen eine Stammfunktion G für $u'v$. Dann gilt $G \in \int u'v$ und daher gemäss (6.45)

$$-G + \mathcal{C}_{\text{loc}} = -\int u'v. \tag{6.47}$$

Gemäss der Produktregel für die Ableitung (Satz 5.10(ii)) gilt

$$(uv)' = u'v + uv' = G' + uv', \qquad \text{d. h.} \qquad (uv - G)' = uv',$$

d. h., $F := uv - G$ ist eine Stammfunktion für $f := uv'$. Gemäss (6.33) gilt daher

$$\begin{aligned}\int uv' &= (uv - G) + \mathcal{C}_{\text{loc}} \\ &= uv + (-G + \mathcal{C}_{\text{loc}}) \\ &= uv - \int u'v \qquad \text{(wegen (eq:-int u'v,6.46)).}\end{aligned}$$

Das beweist Satz 6.30. □

Beispiele 6.31. [partielle Integration]Wir betrachten $X = \mathbb{R}$ und definieren $p_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p_k(x) := x^k$.

(i) **Problem:** Man berechne $\int xe^x dx$.

Lösung: Wir definieren $u := p_1, v := \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Es gilt $v' = \exp' = \exp$ und daher

$$\begin{aligned}\int xe^x dx &= \int p_1 \exp \\ &= \int p_1 \exp' \qquad (6.48) \\ &= p_1 \exp - \int p_1' \exp \text{ (gemäss Satz 6.30, partielle Integration)} \qquad (6.49) \\ &= p_1 \exp - \int 1_{\mathbb{R}} \cdot \exp \\ &= p_1 \exp - (\exp + \mathcal{C}) \qquad (\text{da } \mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{\text{loc}} = \mathcal{C}^{\mathbb{R}} =: \mathcal{C}) \\ &= (p_1 - 1_{\mathbb{R}}) \exp + \mathcal{C} \qquad (6.50) \\ &= \big(x \mapsto (x-1)e^x\big) + \mathcal{C}.\end{aligned}$$

(ii) **Problem:** Man berechne $\int x^2 e^x dx$.

Lösung: Wir definieren $u := p_2, v := \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int x^2 e^x dx &= \int p_2 \exp' \\
&= p_2 \exp - \int p_2' \exp \text{ (gemäss Satz 6.30, partielle Integration),} \quad (6.51) \\
\int p_2' \exp &= \int 2p_1 \exp \\
&= 2 \int p_1 \exp \\
&\quad \text{(gemäss Linearität der unbestimmten Integration, Satz 6.29(i)} \\
&= 2\big((p_1 - 1_{\mathbb{R}}) \exp + \mathcal{C}\big) \qquad \text{(gemäss (6.50))} \\
&= 2(p_1 - 1_{\mathbb{R}}) \exp + \mathcal{C} \qquad \text{(gemäss (6.36)),} \quad (6.52) \\
\int x^2 e^x dx &= p_2 \exp - \big(2(p_1 - 1_{\mathbb{R}}) \exp + \mathcal{C}\big) \qquad \text{(gemäss (6.51,6.52)} \\
&= \big(p_2 \exp - 2(p_1 - 1_{\mathbb{R}}) \exp\big) + \mathcal{C} \qquad \text{(gemäss (6.46))} \\
&= \big(p_2 - 2p_1 + 2_{\mathbb{R}}\big) \exp + \mathcal{C} \\
&= \big(x \mapsto \big(x^2 - 2x + 2\big) e^x\big) + \mathcal{C}.
\end{aligned}$$

Um dieses Integral zu bestimmen, haben wir partielle Integration zweimal angewandt, nämlich in (6.49) und (6.51).

Bemerkungen 6.32. [Notation, Einsetzen der Grenzen, Zusammenhang zwischen unbestimmtem und bestimmtem Integral]

(i) In Beispiel 6.31(i) können wir auch schreiben

$$\int x e^x dx = (x \mapsto x e^x) - \int 1 \cdot e^x dx = (x \mapsto x e^x - e^x) + \mathcal{C}.$$

Hierbei schreiben wir alle Funktionen explizit mit Hilfe von Ausdrücken, die x enthalten.

(ii) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $I := [a, b]$ und $\mathcal{F}$ eine Kollektion von Funktionen der Form $\mathcal{F} = F + \mathcal{C}$ mit $F : X \to \mathbb{R}$. Wir definieren $\mathcal{F}$ *mit eingesetzten Grenzen* als die Zahl

$$\mathcal{F}|_a^b := F|_a^b := F(x)|_{x=a}^b := F(b) - F(a), \quad (6.53)$$

wobei $F \in \mathcal{F}$ beliebig ist. Der Ausdruck $\mathcal{F}|_a^b$ ist wohldefiniert, d. h. die rechte Seite von (6.53) hängt nicht von der Wahl von F ab. Das folgt aus der Tatsache, dass sich je zwei Funktionen in $\mathcal{F}$ durch eine additive Konstante unterscheiden.

(iii) Sei jetzt $f : I := [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Gemäss (6.29) ist $\int f$ die Menge aller Stammfunktionen von f. Sei $F \in \int f$, d. h. eine Stammfunktion von f. Mit der Definition (6.53) gilt, dass

$$\begin{aligned}\int f\Big|_a^b &= F(b) - F(a)\\ &= \int_a^b f \qquad \text{(gemäss dem zweiten Hauptsatz, Satz 6.15(ii)).}\end{aligned}$$

Die Zahl $\int f\big|_a^b$ stimmt also mit dem bestimmten Integral von f (wie in Definition 6.7) überein.

Beispiel 6.33. [bestimmtes Integral einer geraden Potenz des Kosinus, partielle Integration] Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir

$$I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n . \tag{6.54}$$

Wir definieren rekursiv

$$\begin{aligned} a_0 &:= \frac{\pi}{2},\\ a_\ell &:= a_{\ell-1}\frac{2\ell-1}{2\ell}, \qquad \ell \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{6.55}$$

$$\text{also} \qquad a_m = \frac{\pi}{2}\prod_{\ell=1}^{m}\frac{2\ell-1}{2\ell} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2m-1}{2m}, \qquad \forall m \in \mathbb{N}_0. \tag{6.56}$$

Behauptung: Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt die Aussage

$P(m) :=$“$I_{2m} = a_m$”

Es gilt also zum Beispiel

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 = I_2 = a_1 = \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2},\\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 = I_4 = a_2 = \frac{3}{4}a_1 = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Beweis: Wir verwenden Induktion.

Induktionsverankerung: Für $m = 0$ gilt $I(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0 = \frac{\pi}{2} = a_0$. Daher ist $P(0)$ wahr.

Induktionsschritt: Wir schreiben

$$J_k := \int \cos^{2k}. \tag{6.57}$$

Sei $k \in \mathbb{N}_0$ so, dass $P(k)$ gilt. Mittels partieller Integration (Satz 6.30) mit $u := \cos^{2k+1}$, $v := \sin$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
J_{k+1} &= \int \cos^{2(k+1)} \\
&= \int uv' \\
&= uv - \int u'v \\
&= \cos^{2k+1}\sin - \int (2k+1)\cos^{2k}(-\sin)\sin, && (6.58)\\
\int \cos^{2k}\sin^2 &= \Big(\int \cos^{2k}\left(1-\cos^2\right)\Big) \\
&= J_k - J_{k+1}, && (6.59)\\
J_{k+1} &= \cos^{2k+1}\sin + (2k+1)\big(J_k - J_{k+1}\big) \qquad \text{(wegen (6.58,6.59))}. && (6.60)
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
I_{2k+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+2} \qquad \text{(wegen (6.54))} \\
&= J_{k+1}|_0^{\frac{\pi}{2}} \qquad \text{(gemäss Bemerkung 6.32(iii))} \\
&= \cos^{2k+1}\sin|_0^{\frac{\pi}{2}} + (2k+1)\big(\, J_k|_0^{\frac{\pi}{2}} - J_{k+1}|_0^{\frac{\pi}{2}}\,\big) \qquad \text{(gemäss (6.60))} \\
&= \cos^{2k+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos^{2k+1}0\,\sin 0 + (2k+1)I_{2k} - (2k+1)I_{2k+2},
\end{aligned}$$

$$\text{also} \qquad I_{2k+2} = \frac{2k+1}{2k+2} I_{2k}.$$

Mittels unserer Induktionsannahme $P(k)$ ($I_{2k} = a_k$) und der Tatsache $\frac{2k+1}{2k+2}a_k = a_{k+1}$ (siehe (6.55)) folgt daraus, dass

$$I_{2k+2} = a_{k+1},$$

d. h. die Induktionsbehauptung $P(k+1)$ gilt. Das schliesst den Induktionsschritt ab.

Mittels Induktion folgt, dass für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ die Aussage $P(m)$ wahr ist. Das beweist die Behauptung.

Beispiel 6.34. [bestimmtes Integral einer ungeraden Potenz des Kosinus, partielle Integration] Wir definieren rekursiv

$$\begin{aligned} b_0 &:= 1, \\ b_\ell &:= b_{\ell-1}\frac{2\ell}{2\ell+1}, \qquad \ell \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{6.61}$$

$$\text{also} \qquad b_m = 1 \cdot \prod_{\ell=1}^{m} \frac{2\ell}{2\ell+1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2m}{2m+1}, \qquad \forall m \in \mathbb{N}_0. \tag{6.62}$$

Ein zu Beispiel 6.33 analoges Argument zeigt, dass

$$I_{2m+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m+1} = b_m, \qquad \forall m \in \mathbb{N}_0. \tag{6.63}$$

Es gilt also zum Beispiel

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^1 &= I_1 = b_0 = 1, \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 &= I_3 = b_1 = \frac{2}{3}\cdot 1, \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 &= I_5 = b_2 = \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1. \end{aligned}$$

Folgender Satz liefert eine Formel für die Kreiszahl π. Er ist eine Anwendung der Beispiele 6.33 und 6.34. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir

$$c_n := \prod_{\ell=1}^{n} \frac{(2\ell)^2}{(2\ell-1)(2\ell+1)} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdots\frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Satz 6.35 (Wallissches Produkt)**.** *Die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert gegen $\frac{\pi}{2}$, also*

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} c_n = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdots \tag{6.64}$$

Dieser Satz ist nach John Wallis benannt. Siehe Abbildung 6.5.

Bemerkung. [Wallissches Produkt] Dieser Satz liefert eine Formel für π. Falls wir das unendliche Produkt (6.64) an der Stelle $n \in \mathbb{N}_0$ abbrechen, erhalten wir ein endliches Produkt, dass $\frac{\pi}{2}$ annähert.



Abbildung 6.5: John Wallis, 1616–1703, englischer Mathematiker.

Beweis des Satzes 6.35: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren

$$I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n$$

wie in (6.54). Auf $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ gilt, dass $0 \leq \cos \leq 1$ und daher

$$\cos^{n+1} \leq \cos^n \leq \cos^{n-1}. \tag{6.65}$$

Sei $m \in \mathbb{N}$. Aus (6.65) mit $n := 2m$ und Monotonie der Integration (Satz 6.12(iv)) folgt, dass

$$I_{2m+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m+1} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m} = \leq I_{2m} \leq I_{2m-1},$$

$$\begin{aligned} \text{also} \qquad 1 &\geq \frac{I_{2m+1}}{I_{2m}} \\ &\geq \frac{I_{2m+1}}{I_{2m-1}} \\ &= \frac{b_m}{b_{m-1}} \qquad \text{(wegen (6.63))} \\ &= \frac{2m}{2m+1} \qquad \text{(wegen (6.61))} \\ &\to 1 \qquad \text{für } m \to \infty. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$\frac{I_{2m+1}}{I_{2m}} \to 1 \qquad \text{für } m \to \infty. \tag{6.66}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} c_m &= \prod_{\ell=1}^{m} \frac{(2\ell)^2}{(2\ell-1)(2\ell+1)} \\ &= \frac{\frac{\pi}{2}\prod_{\ell=1}^{m} \frac{2\ell}{2\ell+1}}{\frac{\pi}{2}\prod_{\ell=1}^{m} \frac{2\ell-1}{2\ell}} \\ &= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{b_m}{a_m} \qquad \text{(gemäss (6.56,6.62))} \\ &= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{I_{2m+1}}{I_{2m}} \qquad \text{(gemäss Beispiel 6.33 und Beispiel 6.34).} \end{aligned}$$

Mittels (6.66) folgt daraus, dass

$$(c_m)_{m\in\mathbb{N}_0} \to \frac{\pi}{2}.$$

Das beweist Satz 6.35. □

Bemerkung. [Beweis von 0 = 1 (?) mittels partieller Integration]Wie erwähnt, ist partielle Integration eine wichtige Integrationstechnik. Man kann damit nicht nur Integrale wie $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n$ berechnen, sondern sogar zeigen, dass 0 = 1. (?) Dazu betrachten wir die Funktionen

$$u := \frac{1}{\log}, \qquad v := \log.$$

Es gilt

$$u'(x) = -\frac{1}{(\log x)^2}\log'(x) = -\frac{1}{(\log x)^2 x}, \tag{6.67}$$

$$v'(x) = \log'(x) = \frac{1}{x}, \tag{6.68}$$

$$
\begin{aligned}
I &:= \int \frac{1}{(\log x)x} dx \\
&= \int uv' \qquad \text{(wegen (6.68))} \\
&= uv - \int u'v \qquad \text{(gemäss Satz 6.30 (partielle Integration))} \\
&= \frac{1}{\log} \log + \int \frac{1}{(\log x)^2 x} \log x \, dx \\
&= 1 + I,
\end{aligned}
$$

also $I = 1 + I$. Daraus folgt, dass $0 = 1$, wie behauptet.

Frage: Ist dieses Argument korrekt? Falls nicht, wo steckt dann der Fehler?

6.6 Substitutionsregel, Anwendungen: gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung, Trennung der Veränderlichen

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96b, 4.3, 4.6] und [Stra, 6.1].

6.6.1 Substitutionsregel

Im Teil 6.70 der Substitutionsregel wird die Verknüpfung einer Menge von Funktionen mit einer Funktion auftreten. Diese Verknüpfung ist wie folgt definiert. Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, $F : X \to Y$ stetig und $\mathcal{G}$ eine Funktionenmenge der Form $G + \mathcal{C}^Y_{\text{loc}}$, für eine Funktion $G : Y \to \mathbb{R}$. Wir definieren die *Verknüpfung von F mit $\mathcal{G}$* als die Menge

$$\mathcal{G} \circ F := G \circ F + \mathcal{C}^X_{\text{loc}}, \tag{6.69}$$

wobei $G \in \mathcal{G}$ beliebig ist.

Satz 6.36 (Substitutionsregel)**.** *(i) (bestimmte Integration) Seien I ein offenes Intervall, $F \in C^1(I, \mathbb{R})$, $g \in C(\operatorname{im} F, \mathbb{R})$ und $x_0, x_1 \in I$. Es gilt*

$$\int_{x_0}^{x_1} (g \circ F) F' = \int_{F(x_0)}^{F(x_1)} g. \tag{6.70}$$

(ii) (unbestimmte Integration) Sei X eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ so, dass jeder Punkt $x_0 \in X$ eine Umgebung in X besitzt, die ein offenes oder halb-offenes Intervall ist. Sei Y ebenfalls eine solche Menge. Seien $F : X \to Y$ differenzierbar und

$g : Y \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die eine Stammfunktion besitzt. Dann besitzt die Funktion $(g \circ F)F'$ eine Stammfunktion, und es gilt

$$\int (g \circ F)F' = \left(\int g\right) \circ F, \tag{6.71}$$

wobei die rechte Seite wie in (6.69) *definiert ist.*

Bemerkung. [Substitutionsregel] Die Gleichheit (6.70) bedeutet, dass

$$\int_{x_0}^{x_1} g(F(x))F'(x)\,dx = \int_{F(x_0)}^{F(x_1)} g(y)\,dy.$$

Formal bedeutet das, dass wir $F(x)$ durch die Variable y und die "infinitesimale Grösse $F'(x)\,dx$" durch das "Differential dy" substituieren (d. h. ersetzen) können. Intuitiv ist das sinnvoll, da $F' = \frac{dy}{dx}$.

Beweis des Satzes 6.36: (i): Gemäss dem ersten Hauptsatz (Satz 6.15(i)) besitzt g eine Stammfunktion G. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_1} (g \circ F)F' &= \int_{x_0}^{x_1} (G \circ F)' \qquad \text{(wegen } g = G' \text{ und der Kettenregel, Satz 5.13)} \\
&= (G \circ F)|_{x_0}^{x_1} \qquad \text{(gemäss dem zweiten Hauptsatz, Satz 6.15(ii))} \\
&= G|_{F(x_0)}^{F(x_1)} \\
&= \int_{F(x_0)}^{F(x_1)} g \qquad \text{(wegen } G' = g \text{ und des zweiten Hauptsatzes).}
\end{aligned}$$

Das beweist (i). Aussage (ii) folgt aus einem analogen Argument. Das beweist Satz 6.36. □

Beispiele 6.37. [Substitutionsregel]

(i) **Problem:** Man berechne $\int_2^3 e^{x^2} 2x\,dx$.

Lösung: Wir definieren

$$F := p_2 : [2,3] \to \mathbb{R}, \quad p_2(x) := x^2, \qquad g := \exp : \operatorname{im} F = [4,9] \to \mathbb{R}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\int_2^3 e^{x^2} 2x\,dx &= \int_2^3 (\exp \circ p_2) p_2' \\ &= \int_{p_2(2)=4}^{p_2(3)=9} \exp \qquad \text{(gemäss der Substitutionsregel, Satz 6.36(i))} \\ &= \exp|_4^9 \\ &= e^9 - e^4.\end{aligned}$$

Bemerkung: Wir können diese Rechnung auch mit Hilfe von Variablen wie folgt schreiben. Mittels der Substitution $F(x) := x^2 = y$, $F'(x) = 2x = \frac{dy}{dx}(x)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_2^3 e^{x^2} 2x\,dx &= \int_4^9 e^y dy \\ &= e^y|_{y=4}^9 \\ &= e^9 - e^4.\end{aligned}$$

(ii) **Problem:** Man berechne $\int \frac{2x}{x^2+1} dx$.

Lösung: Wir definieren

$$X := \mathbb{R}, \quad Y :=]0, \infty[, \quad F : X \to Y,\ F(x) := x^2+1, \quad g := p_{-1} : Y \to \mathbb{R},\ g(y) = \frac{1}{y}.$$

Es gilt $F'(x) = 2x$ und daher

$$\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \int (g \circ F) F' \tag{6.72}$$

$$= \left(\int g\right) \circ F \qquad \text{(gemäss der Substitutionsregel, Satz 6.36(ii))} \tag{6.73}$$

$$= \log \circ F + \mathcal{C}_{\text{loc}}^X \tag{6.74}$$

$$= \big(x \mapsto \log(x^2+1)\big) + \mathcal{C}^{\mathbb{R}} \tag{6.75}$$

Bemerkungen: Wir können diese Rechnung auch mit Hilfe von Variablen wie folgt schreiben. Mittels der Substitution $F(x) := x^2 + 1 = y$, $F'(x) = 2x = \frac{dy}{dx}(x)$ erhalten wir

$$\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \left(\int \frac{1}{y} dy\right) \circ F \tag{6.76}$$

$$= \big(y \mapsto \log(y)\big) \circ F + \mathcal{C}_{\text{loc}} \tag{6.77}$$

$$= \big(x \mapsto \log(x^2+1)\big) + \mathcal{C}_{\text{loc}}. \tag{6.78}$$

Oft wird diese Rechnung wie folgt geschrieben:

$$\text{“}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \int \frac{1}{y}dy \qquad \text{(Substitution } y = x^2+1,\ dy = 2x\,dx) \tag{6.79}$$
$$= \log(y) + c \tag{6.80}$$
$$= \log(x^2+1) + c \qquad \text{(Rücksubstitution)”} \tag{6.81}$$

Das ist aus folgenden Gründen unpräzise:

- Die Gleichheit (6.79) ist falsch, da $\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \log \circ F + \mathcal{C}_{\text{loc}} \neq \log = \int \frac{1}{y}dy$.
- Der Ausdruck $\log(y)$ ist keine Funktion, sondern eine Zahl (für ein gegebenes y). Die Gleichheit (6.80) ist daher nicht sinnvoll.
- $x \mapsto \log(x^2+1) + c$ ist eine einzelne Funktion. ($c \in \mathbb{R}$ ist hierbei eine Konstante.) Das unbestimmte Integral $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$ ist jedoch *keine* einzelne Stammfunktion, sondern die Menge aller Stammfunktionen. (Siehe Definition 6.22.) Das Resultat (6.81) ist deshalb nicht sinnvoll, selbst, wenn wir $\log(x^2+1) + c$ als $x \mapsto \log(x^2+1) + c$ interpretieren.

(Vergleichen Sie diese Bemerkungen mit Bemerkung 6.28.) Im Schritt (6.79) geht die Information über F, also über die Substitution, verloren. Diese Information wird im Schritt (6.81) unter dem Titel *Rücksubstitution* wieder hinzugefügt. Nachdem wir $\log(x^2+1)+c$ zu $\big(x \mapsto \log(x^2+1)\big) + \mathcal{C}_{\text{loc}}$ korrigiert haben, kommt am Ende zwar ein korrektes Resultat heraus. Die einzelnen Gleichheiten stimmen jedoch wegen der obigen Gründe nicht.

(iii) **Problem:** Man berechne $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}dy$.

Lösung: Wir definieren

$$F := \sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, \qquad g : \operatorname{im} F = [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad g(y) := \sqrt{1-y^2}.$$

Es gilt $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ und daher

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}dy \\
&= \int_{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}^{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} g \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (g \circ \sin)\sin' \text{ (Substitutionsregel (Satz 6.36(i)) rückwärts angewandt)} \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\cdot\cos \qquad (\text{da } g\circ\sin = \sqrt{1-\sin^2} = |\cos| \text{ und } |\cos| = \cos \text{ auf } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]) \\
&= \frac{1}{2}\big(\cos\sin + p_1\big)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{ (Das folgt mittels partieller Integration wie in Beispiel 6.33.)} \\
&= \frac{1}{2}\left(0\cdot 1 + \frac{\pi}{2} - \left(0\cdot(-1) - \frac{\pi}{2}\right)\right) \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

(iv) (Integral einer logarithmischen Ableitung) Seien I ein Intervall mit positiver Länge, $F : I \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ stetig differenzierbar und $x_0, x_1 \in I$.

Problem: Man berechne $\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \frac{F'}{F} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{F'(x)}{F(x)}dx$.

Lösung: Wir definieren

$$g := p_{-1} : \operatorname{im} F \to \mathbb{R}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_1} \frac{F'}{F} &= \int_{x_0}^{x_1} (p_{-1}\circ F)F' \\
&= \int_{F(x_0)}^{F(x_1)} p_{-1} \qquad (\text{gemäss der Substitutionsregel, Satz 6.36(i)}) \\
&= \log\circ|\bullet|\,\Big|_{F(x_0)}^{F(x_1)} \qquad (\text{gemäss Beispiel 6.27(ii)}) \\
&= \log(|F(x_1)|) - \log(|F(x_0)|) \\
&= \log\left(\left|\frac{F(x_1)}{F(x_0)}\right|\right). \qquad (6.82)
\end{aligned}$$

Bemerkungen. [Substitution, erste und zweite Art]

- (Substitution erster Art, vorwärts) In Beispiel 6.37((i),(ii),(iv)) haben wir die Substitutionsregel vorwärts angewandt. Das bedeutet, dass wir die Gleichheiten (6.70,6.71) von links nach rechts angewandt haben.

  Das ist Substitution *erster Art*. Bei dieser Art Substitution ist die Substitutionsfunktion F schon im gegebenen Integranden enthalten. In Beispiel 6.37(i) ist das die Funktion $F(x) := x^2$, die im Integranden $x \mapsto e^{x^2}2x$ im Exponenten vorkommt. Durch die Substitution vereinfacht sich der Integrand. So ist in Beispiel 6.37(i) der neue Integrand einfach die Exponentialfunktion.

- (Substitution zweiter Art, rückwärts) In Beispiel 6.37(iii) haben wir die Substitutionsregel rückwärts, d. h. von rechts nach links, angewandt. Das ist Substitution *zweiter Art*. Bei dieser Art Substitution wählen wir eine Substitutionsfunktion F. In Beispiel 6.37(iii) haben wir $F := \sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ gewählt. Durch diese Substitution wird der Integrand zunächst komplizierter. In guten Fällen lässt sich der neue Integrand jedoch explizit integrieren.

  In Beispiel 6.37(iii) wird aus dem Integranden $y \mapsto \sqrt{1-y^2}$ zunächst der kompliziertere Integrand $\sqrt{1-\sin^2}\cos$, den wir dann mit Hilfe des Satzes von Pythagoras zu $\cos \cdot \cos$ vereinfachen und danach mittels partieller Integration integrieren. Mittels Substitution werden wir also die Wurzel los, was den Integranden schliesslich vereinfacht.

- (zweite Art: verschiedene Substitutionsfunktionen) Bei der Substitution zweiter Art wählen wir die Substitutionsfunktion F beliebig.[7] Wir können bei dieser Wahl also kreativ sein. So können wir im Beispiel 6.37(iii) die Substitution auch mit $F := \cos : [\pi, 0] \to \mathbb{R}$ oder mit $F : \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}$, $F(x) := \sin(2x)$, durchführen. Das führt ebenfalls zum Ziel. (Berechnen Sie mittels dieser Substitutionen das Integral nochmals!)

  Ebenso funktioniert Substitution mit $F := \sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi\right] \to \mathbb{R}$.[8] Es gilt $\sqrt{1-\sin^2} = -\cos$ auf $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$ (nicht $+\cos$). Um das Integral mit Hilfe dieser Substitution zu berechnen, müssen wir das Integral $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi}(g \circ F)F'$ daher in Integrale über die Teilintervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$ und $\left[\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right]$ aufspalten. (Tun Sie das und berechnen Sie damit $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}dy$ nochmals!)

- (mehrmalige Substitution) Manchmal können wir ein Integral mittels mehrmaliger Substitution berechnen. Ein Beispiel dafür ist

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$$

[7] F muss C^1 sein und sein Bild im Definitionsbereich von g enthalten sein.

[8] Diese Funktion unterscheidet sich von der in Beispiel 6.37(iii) verwendeten durch den Definitionsbereich.

Dieses kann durch die Substitutionen zweiter Art $x = F_1(t) := \log t$, $t = F_2(u) := u^2 - 1$ auf das Integral $\int_{a'}^{b'} \frac{2}{u^2-1} du$ zurückgeführt werden. (Siehe [Bla96b, 4.3, Nummer 8, S. 45].) Dieses Integral können wir mittels Partialbruchzerlegung berechnen. (Siehe [Bla96b, 4.3, Nummer 8, S. 45] oder Abschnitt 6.7.)

- (Beispiel 6.37(iv), Integral einer logarithmischen Ableitung) Seien I ein Intervall mit positiver Länge und $F : I \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine differenzierbare Funktion. Wir definieren die *logarithmische Ableitung* von F als die Ableitung des Logarithmus des Betrags von F, d. h. als

$$(\log \circ |F|)' = \frac{F'}{F}.$$

Gemäss Beispiel 6.37(iv) ist das bestimmte Integral der logarithmischen Ableitung von F durch den Logarithmus des Quotienten der Werte von F an den Integrationsgrenzen gegeben. Siehe (6.82).

Dieses Beispiel liefert also eine allgemeine Methode, um eine Funktion der Form $\frac{F'}{F}$ zu integrieren. Diese Methode haben wir bereits in Beispiel 6.37(ii) angewandt.

Manchmal wird diese Methode "logarithmische Integration" genannt. Diese Bezeichnung scheint mir irreführend, da es sich um gewöhnliche Integration handelt. Besonders ist nur die Situation, in welcher wir die Methode anwenden. Wir nehmen nämlich an, das der Integrand die Form $\frac{F'}{F}$ besitzt.

6.6.2 Anwendung: gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung, Trennung der Veränderlichen

Als eine Anwendung des Beispiel 6.37(iv) zur Substitution können wir eine homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung lösen. Das ist der Inhalt des folgenden Beispiels.

Beispiel 6.38. [gewöhnliche Differentialgleichung] Seien I ein Intervall, $a \in C(I)$, $t_0 \in I$ und $x_0 \in \mathbb{R}$.Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung für eine differenzierbare Funktion $u : I \to \mathbb{R}$,

$$\dot{u} = au \tag{6.83}$$

zusammen mit der *Anfangsbedingung*

$$u(t_0) = x_0. \tag{6.84}$$

Wir nennen (6.83,6.84) ein *Anfangswertproblem*. Wir nehmen an, dass $x_0 > 0$. Sei u eine Lösung des Anfangswertproblems, das positive Werte annimmt. Gemäss Beispiel 6.37(iv) gilt für jedes $t \in I$, dass

$$\log(u(t)) = \log(u(t_0)) + \int_{t_0}^{t} \frac{\dot{u}}{u}$$

$$\text{und daher} \qquad u(t) = \exp\left(\log(u(t_0)) + \int_{t_0}^{t} \frac{\dot{u}}{u}\right)$$

$$= u(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} a\right) \tag{6.85}$$

$$= x_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} a\right) \qquad \text{(wegen (6.84,6.83))} \tag{6.86}$$

$$=: u_0(t). \tag{6.87}$$

Umgekehrt erfüllt die Funktion u_0 tatsächlich das Anfangswertproblem (6.83,6.84). (Überprüfen Sie das!) Im Fall $x_0 > 0$ besitzt dieses Anfangswertproblem somit eine eindeutige Lösung, die positive Werte annimmt, nämlich u_0.

Bemerkungen. [gewöhnliche Differentialgleichung, Trennung der Veränderlichen]

- Auch ohne die Voraussetzungen, dass $x_0 > 0$ und dass u positive Werte annimmt, ist die Funktion u_0 gegeben durch (6.87) die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (6.83,6.84). Das folgt aus einem Argument wie in Beispiel 5.18.

- Wir betrachten den Fall, dass a konstant ist. Dann ist u_0 gegeben durch

  $$u_0(t) = x_0 e^{at}.$$

  Gemäss Beispiel 6.38 und der letzten Bemerkung ist das in diesem Fall die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (6.83,6.84). Das haben wir schon im Beispiel 5.18 mittels einer Anwendung des Mittelwertsatzes gezeigt.

- (Trennung der Veränderlichen) Heuristisch erhalten wir die Lösung u_0 wie folgt. In der Differentialgleichung (6.83), also $\frac{du}{dt} = au$, *trennen* wir die *Variablen* t und u voneinander, d. h., wir formen die Gleichung um zu

  $$\frac{du}{u} = a\, dt. \tag{6.88}$$

  Hierbei ist "dt" ein "Differential", also eine "infinitesimale Differenz $\Delta t \neq 0$" und "du" die zugehörige "infinitesimale Differenz Δu". (Siehe Bemerkung 5.8(iii).) Wir zerlegen jetzt das Intervall $[t_0, t]$ in unendlich viele "infinitesimale Teilintervalle I_i" der Form "$I_i = \big[t_i, t_i + dt_i\big]$", $i \in \mathcal{I}$. Für jedes $i \in \mathcal{I}$ schreiben wir

$du_i := u(t_i + dt_i) - u(t_i)$. Durch Summieren erhalten wir

$$\begin{aligned}\log(u(t)) - \log(u(t_0)) &= \int_{u(t_0)}^{u(t)} \frac{du}{u} \\ &= \sum_i \frac{du_i}{u(t_i)} \\ &= \sum_i a(t_i)\, dt_i \qquad \text{(wegen (6.88))} \\ &= \int_{t_0}^{t} a\, dt.\end{aligned}$$

Durch Addieren von $\log(u(t_0))$ und Exponentieren erhalten wir wieder $u = u_0$, wie in (6.87).

Die Lösungsmethode von Beispiel 6.38 heisst *Trennung der Veränderlichen* (oder *Separation der Variablen*). Das widerspiegelt die Tatsache, dass wir in der obigen heuristischen Herleitung von (6.85) die Variablen t und u voneinander getrennt haben.

- Im Fall eines konstanten negativen $a = -c$ beschreibt die gewöhnliche Differentialgleichung (6.83) zum Beispiel radioaktiven Zerfall mit Zerfallskonstante c. Die Grösse $u(t)$ ist dabei die Anzahl Atome eines bestimmten Elementes, die zur Zeit t noch nicht zerfallen sind.

6.7 Integral einer rationalen Funktion, Partialbruchzerlegung

Partialbruchzerlegung ist eine Methode, um eine rationale Funktion zu integrieren.

Definition 6.39 (rationale Funktion)**.** *(i) Eine (*komplexe*)* rationale Funktion *ist eine Funktion der Form* $\frac{p}{q} : q^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \to \mathbb{C}$*, wobei* p, q *komplexe Polynome sind so, dass* $q \not\equiv 0$*.*

(ii) Eine reelle rationale Funktion *ist eine Funktion der Form* $\frac{p}{q} : q^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$*, wobei* p, q reelle *Polynome sind so, dass* $q \not\equiv 0$*.*

Beispiel 6.40. [Integral einer rationalen Funktion, Partialbruchzerlegung]Wir betrachten

$$p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad p \equiv 1, \qquad q(x) := x^2 - 1.$$

Problem: Man bestimme das unbestimmte Integral $\int \frac{p}{q} = \int \frac{1}{x^2-1} dx$.

Heuristik: Wir machen den Ansatz

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}, \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}, \tag{6.89}$$

d. h., wir nehmen an, dass es Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ gibt so, dass die obige Gleichheit gilt.Indem wir die beiden Brüche auf der rechten Seite von (6.89) mit $(x-1)$ und $(x+1)$ erweitern, erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2-1} &= \frac{a(x-1)+b(x+1)}{x^2-1}, \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}, \qquad (6.90)\\ \Rightarrow \qquad 1 &= (a+b)x - a + b, \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}\\ \Rightarrow \qquad 0 &= a+b, \qquad 1 = -a+b\\ \Rightarrow \qquad 0+1 &= 2b, \qquad 0-1 = 2a\\ \Rightarrow \qquad a &= -\frac{1}{2}, \qquad b = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Es folgt, dass

$$f(x) := \frac{1}{x^2-1} = \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1}, \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \tag{6.91}$$

(unter der Annahme, dass es a, b wie in (6.89) gibt).

Bemerkung: Die Gleichheit (6.91) stimmt tatsächlich (bedingungslos). Der Grund dafür ist, dass alle Implikationen in (6.90) umgedreht werden können.

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2-1}dx &= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}dx \qquad \text{(wegen (6.91))}\\ &= \left(x \mapsto \frac{1}{2}\left(-\log|x+1| + \log|x-1|\right)\right) + \mathcal{C}_{\text{loc}}^{\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}}\\ &= \left(x \mapsto \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right) + \mathcal{C}_{\text{loc}}^{\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}}. \end{aligned}$$

Die Darstellung (6.91) der rationalen Funktion f heisst *Partialbruchzerlegung* von f. Um diesen Begriff allgemein zu definieren, benötigen wir den folgenden Satz. Seien $a_0, \ldots, a_N \in \mathbb{C}$. Wir definieren das komplexe Polynom p durch $p(z) := \sum_{k=0}^{N} a_k z^k$. Wir definieren den *Grad von* p als

$$\deg p := \max\left\{k \in \{0, \ldots, N\} \,\middle|\, a_k \neq 0\right\}.^{9}$$

Seien jetzt p, q komplexe Polynome so, dass $q \not\equiv 0$. Seien $z_1, \ldots, z_\ell \in \mathbb{C}$ die Nullstellen von q, wobei $z_i \neq z_j$ für $i \neq j$. Für jedes $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ sei m_i die Vielfachheit der Nullstelle z_i von q.

[9] Falls $a_k = 0$ für jedes $k \in \{0, \ldots, N\}$, dann definieren wir $\deg p := -\infty$.

Bemerkung. [Vielfachheit einer Nullstelle eines Polynoms] Es gibt eine Zahl $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ so, dass

$$q(z) = c\prod_{i=1}^{\ell}(z - z_i)^{m_i} = c(z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_\ell)^{m_\ell}. \tag{6.92}$$

Das folgt aus dem Fundamentalsatz der Algebra (Satz 2.26) und Polynomdivision.

Satz 6.41 (Partialbruchzerlegung)**.** *(i) Es gibt ein eindeutiges Paar* $\left(s, (a_{ik})_{k=1,\ldots,m_i,\, i=1,\ldots,\ell}\right)$*, wobei* s *ein komplexes Polynom ist und* $a_{ik} \in \mathbb{C}$*, für* $k = 1, \ldots, m_i$*,* $i = 1, \ldots, \ell$ *so, dass*

$$\frac{p(z)}{q(z)} = s(z) + \sum_{i=1}^{\ell}\sum_{k=1}^{m_i}\frac{a_{ik}}{(z - z_i)^k}, \qquad \forall z \in q^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\}). \tag{6.93}$$

Seien jetzt $\left(s, (a_{ik})_{k=1,\ldots,m_i,\, i=1,\ldots,\ell}\right)$ *wie in (i),* $i = 1, \ldots, \ell$ *und* $k = 1, \ldots, m_i$*.*

(ii) Es gibt Polynome P *und* Q *so, dass* $Q(z_i) \neq 0$ *und*

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \left(\frac{p(z)}{q(z)} - s(z) - \sum_{j=k+1}^{m_i}\frac{a_{ij}}{(z - z_i)^j}\right)(z - z_i)^k, \tag{6.94}$$

für jedes $z \in \mathbb{C}$*, wofür beide Seiten wohldefiniert sind.*

(iii) Seien P *und* Q *wie in (ii). Dann gilt*

$$a_{ik} = \frac{P(z_i)}{Q(z_i)}. \tag{6.95}$$

Beweis: Das folgt aus Polynomdivision und [Stra, Satz 6.1.6., S. 125].

Definition 6.42 (Partialbruchzerlegung)**.** *Wir definieren die* Partialbruchzerlegung *der rationalen Funktion* $\frac{p}{q}$ *als die rechte Seite von* (6.93)*.*

Die Partialbruchzerlegung wurde von Gottfried Wilhelm Leibniz und Johann I Bernoulli entwickelt. (Sie Abbildungen 0.2 und 5.2.)

Bemerkungen. [Partialbruchzerlegung]

- Mit *Partialbruchzerlegung* meinen wir die *Darstellung* von $\frac{p}{q}$ wie auf der rechten Seite von (6.93), nicht einfach die durch diese rechte Seite bestimmte Funktion. Formal bedeutet das, dass die Partialbruchzerlegung durch das Paar $\left(s, (a_{ik})_{k=1,\ldots,m_i,\, i=1,\ldots,\ell}\right)$ gegeben ist. (Dieses Paar enthält die gesamte Information über die rechte Seite von (6.93).)

- Die Terme in der Doppelsumme auf der rechten Seite von (6.93) heissen *Partialbrüche* (oder *Teilbrüche*).

- Sei $i = 1, \dots, \ell$. Mittels der Formel (6.95) können wir die Koeffizienten a_{ik} rekursiv für $k = m_i, \dots, 1$ berechnen. Dazu bestimmen wir sukzessive für $k = m_i, \dots, 1$ Polynome P und Q wie in (ii). Dabei verwenden wir gemäss (6.94) die schon berechneten Koeffizienten $a_{im_i}, \dots, a_{i\,k+1}$.

  Wir bestimmen also zuerst für $k = m_i$ Polynome P und Q mit $Q(z_i) \neq 0$ und

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \left(\frac{p(z)}{q(z)} - s(z) - \sum_{j=k+1=m_i+1}^{m_i} \frac{a_{ij}}{(z-z_i)^j} \right) (z-z_i)^{k=m_i} = \left(\frac{p(z)}{q(z)} - s(z) - 0 \right) (z-z_i)^{m_i}.$$

  Wir berechnen a_{im_i} mittels (6.95).

  Jetzt bestimmen wir für $k = m_i - 1$ Polynome P und Q mit $Q(z_i) \neq 0$ und

$$\begin{aligned} \frac{P(z)}{Q(z)} &= \left(\frac{p(z)}{q(z)} - s(z) - \sum_{j=k+1=m_i}^{m_i} \frac{a_{ij}}{(z-z_i)^j} \right) (z-z_i)^{k=m_i-1} \\ &= \left(\frac{p(z)}{q(z)} - s(z) - \frac{a_{im_i}}{(z-z_i)^{m_i}} \right) (z-z_i)^{m_i-1}. \end{aligned}$$

  (Rechts tritt der schon berechnete Koeffizient a_{im_i} auf.) Wir berechnen $a_{i\,m_i-1}$ mittels (6.95).

  Wir verfahren nun ähnlich für $k = m_i - 2, \dots,$ bis wir $k = 1$ erreichen.

- Es gibt ein eindeutiges Paar (s, r) von Polynomen so, dass

$$p = sq + r, \qquad \deg r < \deg q.$$

  Das folgt aus Polynomdivision von p durch q. Das Polynom s stimmt mit dem Polynom wie in Satz 6.41(i) überein. Es ist genau dann konstant gleich null, falls $\deg(p) < \deg(q)$. In diesem Fall fällt in (6.93) der erste Term $s(z)$ weg.

Beispiele 6.43. [Partialbruchzerlegung]

(i) Wir betrachten

$$p(z) := z^2 + z - 1, \qquad q(z) := z^3 - z^2, \qquad f(z) := \frac{z^2 + z - 1}{z^3 - z^2}.$$

Gemäss Satz 6.41(i) besitzt die rationale Funktion f eine eindeutige Partialbruchzerlegung. Um diese zu bestimmen, stellen wir zuerst fest, dass $\deg p =$

$2 < 3 = \deg q$. Daher gilt $s \equiv 0$. Wir bestimmen jetzt die Nullstellen von q. Da $q(z) = z^2(z-1)$, sind die Nullstellen von q und ihre Vielfachheiten gegeben durch

$$\begin{aligned} z_1 &= 0, \qquad m_1 = 2, \\ z_{\ell=2} &= 1, \qquad m_2 = 1. \end{aligned}$$

Sei $i = 1$. Wir verwenden die Formel (6.95), um die Koeffizienten a_{1k} rekursiv für $k = m_1 = 2, 1$ zu berechnen. Sei $k = m_1 = 2$. Die rechte Seite von (6.94) ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \left(\frac{p(z)}{q(z)} - s(z) - \sum_{j=k+1=2+1}^{m_1=2} \frac{a_{1j}}{(z-z_1)^j} \right) (z-z_1)^{k=2} &= \left(\frac{z^2+z-1}{z^3-z^2} - 0 - 0 \right) (z-0)^2 \\ &= \frac{z^2+z-1}{z-1}. \end{aligned}$$

Wir schreiben den Zähler und Nenner dieses rationalen Ausdrucks als

$$P(z) := z^2 + z - 1, \qquad Q(z) := z - 1.$$

P und Q sind Polynome mit $Q(z_1 = 0) = -1 \neq 0$. Gemäss Satz 6.41(iii) gilt daher

$$a_{1\,2} = \frac{P(z_1)}{Q(z_1)} = \frac{-1}{-1} = 1. \tag{6.96}$$

Sei jetzt $k = m_1 - 1 = 1$. Die rechte Seite von (6.94) ist gegeben durch

$$\left(\frac{z^2+z-1}{z^3-z^2} - 0 - \frac{a_{1\,2}=1}{(z-0)^2} \right) (z-0)^1 = \frac{z^2+z-1-(z-1)}{z^2(z-1)} z = \frac{z}{z-1}.$$

Wir schreiben den Zähler und Nenner dieses rationalen Ausdrucks als

$$P(z) := z, \qquad Q(z) := z - 1.$$

P und Q sind Polynome mit $Q(z_1 = 0) = -1 \neq 0$. Gemäss Satz 6.41(iii) gilt daher

$$a_{1\,1} = \frac{P(z_1)}{Q(z_1)} = \frac{0}{-1} = 0. \tag{6.97}$$

Seien $i = 2$ und $k := m_2 = 1$. Die rechte Seite von (6.94) ist gegeben durch

$$\left(\frac{z^2+z-1}{z^3-z^2} - 0 - 0 \right) (z-1)^1 = \frac{z^2+z-1}{z^2}.$$

Wir schreiben den Zähler und Nenner dieses rationalen Ausdrucks als

$$P(z) := z^2 + z - 1, \qquad Q(z) := z^2.$$

P und Q sind Polynome mit $Q(z_2 = 1) = 1 \neq 0$. Gemäss Satz 6.41(iii) gilt daher

$$a_{2\,1} = \frac{P(z_2)}{Q(z_2)} = \frac{1}{1} = 1. \tag{6.98}$$

Gemäss (6.93,6.97,6.96,6.98) gilt daher

$$f(z) = \frac{z^2+z-1}{z^3-z^2} = 0 + \frac{a_{1\,1}}{(z-z_1)^1} + \frac{a_{1\,2}}{(z-z_1)^2} + \frac{a_{2\,1}}{(z-z_2)^1} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z-1}. \tag{6.99}$$

(Überprüfen Sie das durch Nachrechnen!)

(ii) Wir betrachten

$$p(z) := z^3, \qquad q(z) := z-1, \qquad f(z) := \frac{z^3}{z-1}.$$

Polynomdivision ergibt

$$p = sq + r, \qquad s(z) := z^2+z+1, \qquad r(z) := 1$$

und daher

$$f(z) = s(z) + \frac{r(z)}{q(z)} = z^2+z+1+\frac{1}{z-1}. \tag{6.100}$$

Die rechte Seite hat die Form (6.93). Daher ist sie schon die Partialbruchzerlegung von f.

Beispiele 6.44. [Integral einer rationalen Funktion mittels Partialbruchzerlegung]

- Das unbestimmte Integral der rationalen Funktion $f|_{\mathbb{R}}$ für f wie in Beispiel 6.43(i) ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+x-1}{x^3-x^2}dx &= \int \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x-1}\right)dx \qquad \text{(gemäss (6.99))}\\ &= \left(x \mapsto -\frac{1}{x} + \log(|x-1|)\right) + \mathcal{C}_{\text{loc}}.\end{aligned}$$

- Das unbestimmte Integral der rationalen Funktion $f|_{\mathbb{R}}$ für f wie in Beispiel 6.43(ii) ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{x-1}dx &= \int \left(x^2+x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx \qquad \text{(gemäss (6.100))}\\ &= \left(x \mapsto \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \log(|x-1|)\right) + \mathcal{C}_{\text{loc}}.\end{aligned}$$

Bemerkung 6.45. [Partialbruchzerlegung für Quotienten reeller Polynome, Integral davon] Wir nehmen jetzt an, dass p, q reelle Polynome sind. Dann gilt gemäss (6.92) für jedes $x \in \mathbb{R}$, dass

$$c\prod_{i=1}^{\ell}(x-z_i)^{m_i} = q(x) = \overline{q(x)} = c\prod_{i=1}^{\ell}(x-\overline{z_i})^{m_i}.$$

Daher ist für jede Nullstelle $i = 1, \dots, \ell$ die Zahl $\overline{z_i}$ ebenfalls eine Nullstelle von q, mit derselben Vielfachheit m_i wie z_i. Sei $i' \in \{1, \dots, \ell\}$ so, dass

$$z_{i'} = \overline{z_i}, \tag{6.101}$$

und $k \in \{1, \dots, m_i\}$. Wir nehmen an, dass $i \neq i'$. Indem wir in (6.93) reelle Zahlen $z = x$ einsetzen, folgt mittels der Eindeutigkeit der Partialbruchzerlegung (Satz 6.41(i)), dass

$$a_{i'k} = \overline{a_{ik}}. \tag{6.102}$$

Wir können daher in der Partialbruchzerlegung (6.93) für $z = x \in \mathbb{R}$ die Terme für (i,k) und (i',k) zusammenfassen. Wir erhalten für die Summe dieser beiden Terme

$$\begin{aligned}\frac{a_{ik}}{(x-z_i)^k} + \frac{a_{i'k}}{(x-z_{i'})^k} &= \frac{a_{ik}(x-z_{i'})^k + a_{i'k}(x-z_i)^k}{(x-z_i)^k(x-z_{i'})^k} \\ &= \frac{2\,\mathrm{Re}\left(a_{ik}(x-\overline{z_i})^k\right)}{|x-z_i|^{2k}} \qquad \text{(wegen (6.101,6.102))} \\ &=: f_{ik}(x) \end{aligned} \tag{6.103}$$

Die Funktion f_{ik} ist eine *reelle* rationale Funktion. Im Fall $k = 1$ können wir sie mittels schon behandelter Methoden integrieren.

Beispiel 6.46. [Partialbruchzerlegung für Quotienten reeller Polynome, Integral davon]Wir betrachten

$$p(z) := 1, \qquad q(z) := z^2 + 1, \qquad f(z) := \frac{1}{z^2+1}.$$

Die Nullstellen von q sind $z_1 = i$ und $z_2 = -i$ mit Vielfachheiten $m_1 = m_2 = 1$. Die Partialbruchzerlegung von f ist gegeben durch

$$f(z) = \frac{-\frac{i}{2}}{z-i} + \frac{\frac{i}{2}}{z+i}. \tag{6.104}$$

(Wir können diese Zerlegung wie in Beispiel 6.40 oder Beispiel 6.43(i) bestimmen.) Gemäss der Formel (6.103) in Bemerkung 6.45 mit Indizes $i = k = 1$ gilt

$$f(x) = f_{1\,1}(x) = \frac{2\,\mathrm{Re}\left(-\frac{i}{2}(x-\bar{i})\right)}{|x-i|^2} = \frac{1}{x^2+1}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Das stimmt mit unserer Definition von f überein. Gemäss Proposition 5.30(ix) ist das unbestimmte Integral von $f|_{\mathbb{R}}$ gegeben durch

$$\int \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan + \mathcal{C}.$$

Bemerkungen 6.47. [komplexe Partialbruchzerlegung, komplexer Logarithmus, Zweig davon]

(i) Alternativ können wir versuchen, das unbestimmte Integral von f mit Hilfe der komplexen Partialbruchzerlegung (6.104) zu berechnen. Gemäss dieser Zerlegung gilt

$$\int \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{i}{2}\left(-\int \frac{1}{x-i}dx + \int \frac{1}{x+i}dx\right). \tag{6.105}$$

Naiv vermuten wir, dass

$$\int \frac{1}{x-i}dx = \text{“}\log(\bullet - i)\text{”} + \mathcal{C}. \tag{6.106}$$

Der Ausdruck “$\log(\bullet - i)$” ist jedoch undefiniert, da der Logarithmus nur für positive reelle Zahlen definiert ist. Um diesem Ausdruck einen Sinn zu verleihen, können versuchen, den Logarithmus zu einer Funktion

$$\widetilde{\log} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$$

zu erweitern. Dabei wollen wir, dass die Gleichheit $\widetilde{\log} \circ \operatorname{Exp} = \mathrm{id}$ erfüllt. Eine solches $\widetilde{\log}$ gibt es leider nicht, da $\operatorname{Exp} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nicht injektiv ist. (Überlegen Sie sich, dass es darum kein $\widetilde{\log}$ wie oben gibt!) Zum Beispiel gilt nämlich gemäss der eulerschen Formel, dass $\operatorname{Exp}(2\pi i) = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1 = \operatorname{Exp}(0)$.

(ii) Um dieses Problem zu lösen, verwenden wir statt einer Funktion $\widetilde{\log} : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ einen *Zweig des komplexen Logarithmus*. Ein solcher Zweig ist ein Paar (X, L), wobei $X \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine Teilmenge[10] ist und $L : X \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion so, dass

$$\operatorname{Exp} \circ L = \mathrm{id}\,.$$

Es existiert zum Beispiel ein Zweig (X, L) mit $X = \mathbb{C}\setminus]-\infty, 0]$. Sei (X, L) ein solcher Zweig. Dann gilt

$$\int \frac{1}{x-i}dx = L(\bullet - i) + \mathcal{C}, \qquad \int \frac{1}{x+i}dx = L(\bullet + i) + \mathcal{C}$$

$$\text{und daher gemäss (6.105)} \qquad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{i}{2}\big(-L(\bullet - i) + L(\bullet + i)\big) + \mathcal{C}.$$

[10] In Büchern wird hier oft vorausgesetzt, dass X offen ist. Die allgemeinere Definition ist jedoch ebenfalls sinnvoll.

Wir können das unbestimmte Integral $\int \frac{1}{x^2+1}dx$ also mit Hilfe eines Zweiges des komplexen Logarithmus ausdrücken. Wir haben damit einen Ersatz für die nicht sinnvolle Gleichheit (6.106) gefunden.

(iii) Jeder Zweig des komplexen Logarithmus ist *holomorph*, d. h., *komplex differenzierbar*. (Für diesen Begriff siehe die Vorlesung *Mathematische Methoden für ITET und RW*.)

(iv) Es ist möglich, den komplexen Logarithmus auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ als eine *mehrwertige* Funktion zu definieren, nämlich als die Urbildfunktion

$$\begin{aligned} \mathrm{Log} := \mathrm{Exp}^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{0\} &\to \big\{\text{Teilmenge von } \mathbb{C}\big\}, \\ \mathrm{Log}(z) = \mathrm{Exp}^{-1}(z) = \text{Urbild von } z \text{ unter Exp } &= \big\{w \in \mathbb{C} \,\big|\, \mathrm{Exp}(w) = z\big\}. \end{aligned}$$

Für jedes $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ unterscheiden sich die Werte dieser mehrwertigen Funktion, also die Elemente von $\mathrm{Log}(z)$, durch ganzzahlige Vielfache von $2\pi i$. Der Vorteil von Log gegenüber Zweigen ist, dass Log nicht von einer Wahl eines Zweiges abhängt. Wir können damit jedoch kein Integral einer rationalen Funktion wie $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ berechnen, da Log mehrwertig ist.

Beispiel 6.48. [Partialbruchzerlegung für Quotienten reeller Polynome, Integral davon] **Problem:** Man berechne

$$\int \frac{2x^2 + x + 1}{x^3 + x} dx.$$

Wir definieren

$$p(x) := 2x^2 + x + 1, \qquad q(x) := x^3 + x, \qquad f := \frac{p}{q}.$$

Heuristik: Da $q(x) = x(x^2 + 1)$ und die Nullstellen von $x \mapsto x^2 + 1$ nicht reell sind, machen wir den Ansatz

$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2 + 1} + \frac{cx}{x^2 + 1}.$$

Wie in Beispiel 6.40 erhalten wir $a = b = c = 1$ und daher

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{x}{x^2 + 1}. \tag{6.107}$$

Bemerkung: Die Gleichheit (6.107) stimmt tatsächlich (bedingungslos). (Überprüfen Sie das!)

Lösung: Gemäss (6.107) gilt

$$\int \frac{2x^2+x+1}{x^3+x}dx = \int \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2+1}+\frac{x}{x^2+1}\right)dx$$
$$= \left(x \mapsto \log(|x|)+\arctan(x)+\frac{1}{2}\log(x^2+1)\right)+\mathcal{C}_{\mathrm{loc}}^{\mathbb{R}\setminus\{0\}}.$$

Hierbei haben wir Beispiel 6.37(ii) verwendet.

Für weitere Beispiele zur Partialbruchzerlegung und Integration rationaler Funktionen siehe [Stra, Beispiel 6.1.7. i),ii), S. 126].

6.8 Strategien für das Integrieren, symbolische Integration, Grenzen davon, numerische Integration, Grenzen des Rechnens

Im Unterabschnitt 6.8.1 stellen wir eine Liste von Strategien zur Berechnung von Integralen zusammen. Davon beruhen einige auf den Techniken, die wir in diesem Kapitel behandelt haben. (Das sind partielle Integration, Substitution und Partialbruchzerlegung.)

Grob gesprochen nennen wir eine Funktion *elementar*, falls sie aus rationalen Funktionen und der komplexen Exponential- und Logarithmusfunktion zusammengesetzt ist. Mit einer *expliziten Formel* für ein unbestimmtes Integral $\int f$ meinen wir eine Gleichheit der Form $\int f = F + \mathcal{C}_{\mathrm{loc}}$, wobei F eine *elementare Funktion* ist. Wir sagen, dass wir eine Funktion f *symbolisch unbestimmt integrieren*, falls wir ihr unbestimmtes Integral $\int f$ durch eine explizite Formel darstellen.

Wie wir im Unterabschnitt 6.8.2 sehen werden, existieren einfache Funktionen f, die sich nicht symbolisch unbestimmt integrieren lassen. Das gilt zum Beispiel für die Funktionen

$$f(x) := e^{x^2}, \quad \text{und} \quad f(x) := \frac{1}{\sqrt{(x+1)x(x-1)}}.$$

(Siehe Beispiel 6.51 und Bemerkungen 6.54.) Die Integrale

$$\int e^{x^2}dx \qquad \text{und} \qquad \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)x(x-1)}}dx$$

lassen sich also *nicht symbolisch berechnen*.[11] Symbolische Integration stösst hier an ihre Grenzen. Insbesondere gibt es keinen Algorithmus, der *jede* elementare Funktion f symbolisch integriert. Die Integrationsstrategien in Unterabschnitt 6.8.1 führen also nicht immer zum Ziel.

6.8.1 Strategien für das Integrieren, Computeralgebrasysteme

Die folgende Liste enthält einige Strategien für das Integrieren:

1. **Integranden vereinfachen:**

   Beispiel: $f(x) := \dfrac{x^2-1}{x+1}$, $\displaystyle\int f = ?$

   Es gilt $f(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = x-1$ und damit

   $$\int \frac{x^2-1}{x+1}dx = \int (x-1)dx = \left(x \mapsto \frac{x^2}{2} - x\right) + \mathcal{C}_{\mathrm{loc}}$$

2. **Stammfunktion erraten:**

   Beispiel: $f := e^{\sin}\cos$, $\int f = ?$

   $F := e^{\sin}$ ist eine Stammfunktion für f und daher

   $$\int e^{\sin}\cos = e^{\sin} + \mathcal{C}$$

   Allgemeines Beispiel: Integral einer logarithmischen Ableitung:

   $$\int \frac{F'}{F} = \log|F| + \mathcal{C}_{\mathrm{loc}}$$

   Das folgt aus einem Argument wie in Beispiel 6.37(iv).

   Konkretes Beispiel dazu: Beispiel 6.37(ii): $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \big(x \mapsto \log(x^2+1)\big) + \mathcal{C}$

3. **Produkt von Funktionen: partielle Integration:**

   Siehe Beispiel 6.31.

[11] Mit einer *symbolischen Berechnung* eines unbestimmten Integrals meinen wir eine Folge von symbolischen Umformungen, an deren Ende eine elementare Funktion (plus lokal konstante Funktionen) steht. Ein Beispiel dafür ist die Berechnung des unbestimmten Integrals $\int xe^x dx$ gegeben durch $\int xe^x dx = (x \mapsto xe^x) - \int 1 \cdot e^x dx = \big(x \mapsto xe^x - e^x\big) + \mathcal{C}_{\mathrm{loc}}$.

Manchmal erhalten wir nach mehrmaligem partiellen Integrieren wieder $c\int f$, wobei c eine Konstante und $\int f$ das gesuchte Integral sind. Dann nehmen wir $c\int f$ auf die linke Seite. Falls wir Glück haben, dann ist $c \neq 1$. In diesem Fall heben sich $\int f$ und $c\int f$ nicht auf. Wir erhalten dann einen expliziten Ausdruck für $\int f$, indem wir durch $1-c$ dividieren. Siehe Beispiele 6.33 und 6.34.

4. **rationale Funktion: Partialbruchzerlegung:**

   Siehe Beispiele 6.40, 6.43, 6.44, 6.46, 6.48

5. **rationaler Ausdruck in e^{cx}: Substitution mit $F(x) := e^{cx}$:**

   Dadurch wird der Integrand zu einer rationalen Funktion. Diese integrieren wir mittels Partialbruchzerlegung.

   Beispiel: $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = ?$

   Substitution $y = F(x) := e^x$, $\frac{dy}{dx}(x) = F'(x) = e^x$,

   $$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = \int_{e^0=1}^{e^1=e} \frac{1}{y^2+1}dy = \arctan y\Big|_{y=1}^{e} = \arctan e - \arctan 1$$

6. **rationaler Ausdruck in** $\cos, \sin$, d. h. $\int R(\cos,\sin)$, wobei R eine rationale Funktionen zweier Variablen[12] ist:

   Substitution mit

   $$F := \cos, \quad \sin, \quad \tan \quad \text{oder} \quad \tan\left(\frac{\bullet}{2}\right)$$

   Beispiele und Bemerkungen dazu siehe p. 287

7. **Integrand enthält $\sqrt{a^2-y^2}$: Substitution mit $y = F(x) := a\sin x$:**

   Siehe Beispiel 6.37(iii).

Beispiele und Bemerkungen zur Strategie 6:

Beispiel: Aufgabe: Berechne $\displaystyle\int \frac{1}{\sin}$.

Heuristik: Substitution:

$$y = \cos x, \quad \frac{dy}{dx} = -\sin x, \quad \text{also} \quad dx = -\frac{dy}{\sin x}, \quad \int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{1}{-\sin^2 x = y^2 - 1}dy$$

[12] d. h. eine Funktion der Form $\frac{p}{q}$, wobei p und q Polynome in zwei Variablen sind und $q \not\equiv 0$

Lösung: Substitution mit:

$$F := \cos : X := \mathbb{R} \setminus \{ \dots, -\pi, 0, \pi, \dots \} \to \mathbb{R}, \qquad g :]-1, 1[\to \mathbb{R}, \quad g(y) := \frac{1}{y^2 - 1}$$

Es gilt $\dfrac{1}{\sin} = \dfrac{1}{\cos^2 - 1}(-\sin) = (g \circ F)F'$ und daher

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin} &= \int (g \circ F)F' \\
&= \left(\int g \right) \circ F \qquad \text{(Substitution, Satz 6.36(ii))} \\
&= \left(\int \left(\frac{-\frac{1}{2}}{y+1} + \frac{\frac{1}{2}}{y-1} \right) dy \right) \circ \cos \text{ (Partialbruchzerlegung für } g(y) = \frac{1}{y^2-1}) \\
&= \left(y \mapsto \frac{1}{2}\big(-\log(y+1) + \log(-(y-1)) \big) \right) \circ \cos + \mathcal{C}_{\text{loc}} \\
&\quad \text{(Wir verwenden, dass der Integrand auf }]-1,1[\text{ definiert ist.)} \\
&= \frac{1}{2} \log \left(\frac{-\cos + 1}{\cos + 1} \right) + \mathcal{C}_{\text{loc}} \qquad (6.108)
\end{aligned}$$

alternativer Versuch: Mit der naheliegenderen Substitution $F := \sin$ erhalten wir

$$\int \frac{1}{\sin} = \left(\int \frac{1}{y\left(\pm\sqrt{1-y^2}\right)} dy \right) \circ \sin .^{13}$$

Diese Substitution vereinfacht das Integral nicht, da der neue Integrand eine Wurzel enthält.

systematische Methode für $\int R(\cos, \sin)$: Halbwinkelsubstition[14]:

$$y = t(x) := \tan \frac{x}{2}, \quad t' = \frac{t^2+1}{2}, \quad \cos = \frac{-t^2+1}{t^2+1}, \quad \sin = \frac{2t}{t^2+1}$$

Mittels dieser Substitution erhalten wir als neuen Integranden eine rationale Funktion. (Überlegen Sie sich das!) Wir verwenden jetzt Partialbruchzerlegung, um das neue Integral zu berechnen.

---

[13] Genauer gesagt: Sei $\widetilde{G}$ eine Stammfunktion von $y \mapsto \frac{1}{y\sqrt{1-y^2}}$. Wir definieren $G := \widetilde{G}$ auf $X \cap \cos^{-1}([0, \infty[)$ und $G := -\widetilde{G}$ auf $X \cap \cos^{-1}(]-\infty, 0[)$. Dann ist $G \circ \sin$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{\sin}$.

[14] Diese Substitution wird oft *Weierstraß-Substitution* genannt, nach Karl Weierstraß. (Siehe Abbildung 4.1.) Weierstrass verwendet in [Wei67, Achtes Kapitel. Bestimmung eines Gaussschen Integrals.] auf Seite 89 die eng verwandte Substitution $t = -\cot \frac{\psi}{2}$. Die Halbwinkelsubstitution war jedoch vor Weierstraß schon Adrien-Marie Legendre bekannt.

Beispiel:

$$\int \frac{1}{\sin} = \int \frac{1}{\frac{2t}{t^2+1}} \cdot \frac{t'}{\frac{t^2+1}{2}} = \left(\int \frac{1}{y} dy \right) \circ t = \log \left| \tan \frac{\bullet}{2} \right| + \mathcal{C}_{\text{loc}}$$

Das stimmt mit (6.108) überein. (Rechnen Sie das nach!)

einfacherer Ansatz, falls der Integrand ein rationaler Ausdruck in $\cos^2$ und $\sin^2$ ist: $F := \tan$

Für weitere Beispiele zu Integralen von rationalen Ausdrücken in cos und sin siehe Schnellübung 6 (Integrale, Tangenssubstitution).

Bemerkungen. [Strategien für das Integrieren einüben]

- Die Übungsserien 12 und 13 und die Schnellübung 6 enthalten viele Beispiele, womit Sie die obigen Strategien einüben können.
- Eine weitere Möglichkeit zum Üben von Integrationstechniken bietet der **Integral-Trainer**. Sie finden diesen unter:

  `https://moodle-app2.let.ethz.ch/course/view.php?id=27005`

  In diesem vorlesungsbegleitenden Moodle-Kurs können Sie das Integrieren selbständig üben. Die über 100 Aufgaben zum Bestimmen von Stammfunktionen sind in Quizzes zu unterschiedlichen Integrationsmethoden und auf verschiedenen Schwierigkeitsstufen zugänglich. Quizzes "mit Tricks" beinhalten schwierigere Aufgaben, weil das reine Anwenden der Methode noch nicht zur Lösung führt. Wenn Sie sich noch nicht so sicher fühlen, können Sie sich ausserdem ein paar Tipps geben lassen.

Bemerkungen 6.49. [Algorithmus, Computeralgebrasystem, symbolische Integration]

- Ein *Algorithmus* ist eine endliche Abfolge von eindeutigen Anweisungen, die von einer Maschine automatisch ausgeführt werden können.[15] Algorithmen werden als Computerprogramme implementiert. Diese werden durch Computer ausgeführt. Ein *Computeralgebrasystem* (kurz *CAS*) ist ein Computerprogramm, das Probleme löst, die symbolische Ausdrücke wie Variablen und Funktionen enthalten. Unter anderem *integriert* ein CAS *symbolisch*, d. h. es stellt gewisse Integrale durch explizite Formeln dar. (Wir werden den Begriff der symbolischen Integration in Unterabschnitt 6.8.2 präzisieren.)

  Beispiele für Computeralgebrasysteme sind *SageMath*, *Mathematica* und *Maple*.

[15] Im Unterabschnitt 6.8.5 werden wir diesen Begriff präzisieren.

- *SageMath*, kurz auch *Sage* genannt, ist eine freie Software und kann online auf `https://sagecell.sagemath.org/` verwendet werden. Die Eingabe erfolgt in der Sage Programming Language, die auf der Programmiersprache *Python* beruht. Zum Beispiel berechnet Sage bei folgender Eingabe eine Stammfunktion für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := xe^x$:

  ```
  integral(x*exp(x),x)
  ```

  (Probieren Sie das aus!) Sage liefert das Resultat `(x - 1)*e^x`. Dieses Resultat ist nicht wörtlich korrekt, da $(x-1)e^x$ keine Funktion ist. Gemeint und korrekt ist die Funktion $x \mapsto (x-1)e^x$. Das ist eine *einzelne* Stammfunktion, nicht das unbestimmte Integral von f. (Was war schon wieder das unbestimmte Integral von f?) Der Sage-Name `integral` ist daher ein wenig irreführend. Vergleiche mit Bemerkung 6.28.

  ⌈Probieren Sie weitere Integrale aus!

  ```
  cos(x)  acos(x)  sqrt(x)  exp(2*pi*I*x)
  ```

  ```
  integral(cos(x),x)
  integral(acos(x),x)
  ```

  `cos x` funktioniert nicht.

  Python: Potenzieren: `e**x`

  ⌉

- Eine auf dem CAS *Mathematica* aufbauende Antwortmaschine ist *Wolfram Alpha*, verfügbar unter `https://www.wolframalpha.com/` . Die Eingabe kann in natürlicher Sprache erfolgen. Zum Beispiel berechnet Wolfram Alpha bei folgender Eingabe das unbestimmte Integral $\int xe^x dx$:

  ```
  integrate x*e^x with respect to x
  ```

  Wolfram Alpha liefert das Resultat $e^x(x-1)+\text{constant}$. Dieses Resultat ist nicht wörtlich korrekt. Gemeint und korrekt ist $\int xe^x dx = (x \mapsto (x-1)e^x) + \mathcal{C}$, da das die Menge der Stammfunktionen von $x \mapsto xe^x$ ist. Vergleiche mit Bemerkung 6.28.

6.8.2 Symbolische Integration, Grenzen davon, elliptisches Integral

Grob gesprochen nennen wir eine Funktion *elementar*, falls sie aus rationalen Funktionen und der komplexen Exponential- und Logarithmusfunktion zusammengesetzt ist. Mit einer *expliziten Formel* für ein Integral $\int f$ meinen wir eine Gleichheit der Form $\int f = F + \mathcal{C}_{\mathrm{loc}}$, wobei F eine *elementare Funktion* ist. Wir sagen, dass wir eine Funktion f *symbolisch unbestimmt integrieren*, falls wir ihr unbestimmtes Integral $\int f$ durch eine explizite Formel darstellen.[16] Es gibt einfache Funktionen f, die sich nicht symbolisch unbestimmt integrieren lassen. Ein Beispiel ist durch $f(x) := e^{x^2}$ gegeben. *Elliptische Integrale* liefern viele weitere Beispiele.

Um den Begriff einer elementaren Funktion zu erklären, benötigen wir Folgendes. Sei $X_0 \subseteq \mathbb{C}$. Eine *(komplex) mehrwertige Funktion auf* X_0 ist eine Abbildung von X_0 nach der Menge der Teilmengen von $\mathbb{C}$. Wir nennen eine mehrwertige Funktion *komplex elementar* g. d. w. wir sie aus

- rationalen Funktionen,
- der komplexen Exponentialfunktion $\mathrm{Exp} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,
- der mehrwertigen komplexen Logarithmusfunktion Log[17]

in endlich vielen Schritten mittels folgender Operationen bilden können[18]:

- arithmetische Operationen $+, -, \times, \div$
- Verkettung[19]
- Lösen von algebraischen Gleichungen mit Koeffizienten gegeben durch komplex elementare mehrwertige Funktionen[20]

[16] Manchmal wird *symbolische Integration* in einem weiteren Sinne verstanden, indem gewisse Stammfunktionen F zugelassen werden, die nicht elementar sind, zum Beispiel die Gaußsche Fehlerfunktion erf. Siehe (6.113) und Beispiel 6.51.

[17] Siehe Bemerkung 6.47(iv).

[18] Dabei setzen wir entstandene Funktionen soweit möglich stetig fort. Seien zum Beispiel $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) := \frac{1}{z}$, $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g(z) := z$. Wir setzen das Produkt fg zur stetigen Funktion auf $\mathbb{C}$ fort, die konstant gleich 1 ist. Ähnlich verfahren wir mit mehrwertigen Funktionen.

[19] Wir definieren die Verkettung zweier mehrwertiger Funktionen F und G, indem wir $G \circ F(x)$ gleich der Menge der Elemente aller $G(y)$ setzen, wobei y alle Elemente von $F(x)$ durchläuft.

[20] Damit meinen wir eine Gleichung der Form $\sum_{i=0}^{n} A_i F^i = 0$ für eine mehrwertige Funktion F, wobei $A_0, \ldots, A_n$ komplex elementare mehrwertige Funktionen sind, die nicht alle konstant gleich 0 sind. Ein Beispiel einer solchen Gleichung ist $zF(z)^5 + \mathrm{Exp}(z^2)F(z) + \mathrm{Log} \circ \mathrm{Log}(z) = 0$, $\forall z$.

Ein *Zweig* einer mehrwertigen Funktion F auf $X_0 \subseteq \mathbb{C}$ ist eine stetige Funktion f auf einer Teilmenge X von X_0 [21] so, dass $f(x) \in F(x)$ für jedes $x \in X$. Eine Funktion von einer Teilmenge $X \subseteq \mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ heisst *elementar* g. d. w. sie ein Zweig einer *komplex elementaren* mehrwertigen Funktion ist.

Beispiele 6.50. [elementare Funktion] Beispiele für elementare Funktionen sind:

- jede rationale Funktion, Beispiel: Polynom
- Potenzfunktion $p_a :]0, \infty[\to \mathbb{R}$, $p_a(x) := x^a = \exp(a \log x)$, für $a \in \mathbb{R}$
- Exponentialfunktion $\exp_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\exp_b(x) := b^x = \exp(x \log b)$, für $b \in]0, \infty[$
- Logarithmus zur Basis b: $\log_b = \frac{\log}{\log b} :]0, \infty[\to \mathbb{R}$, für $b \in]0, \infty[$
- trigonometrische Funktion: (Ko-)Sinus, (Ko-)Tangens
  Grund: $\cos = \frac{1}{2}\big(\operatorname{Exp}(i\bullet) + \operatorname{Exp}(-i\bullet)\big)$, $\sin = \frac{i}{2}\big(-\operatorname{Exp}(i\bullet) + \operatorname{Exp}(-i\bullet)\big)$
- jede Arkusfunktion = Umkehrfunktion einer trigonometrischen Funktion
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \dfrac{e^{\sqrt{x^2+1}}}{\arctan \circ \log\left(\cos^4 x + 2\right)}$
- die eindeutige Lösung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der algebraischen Gleichung $f^5 + f + \mathrm{id} = 0$, d. h. $f(x)^5 + f(x) + x = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Beispiel 6.51. [nicht elementare Funktion, Integral ohne Formel] Jede Stammfunktion der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := e^{x^2},$$

ist nicht elementar. Das ist ein schwierig zu beweisender mathematischer Satz.[22] Das unbestimmte Integral $\int e^{x^2} dx$ lässt sich daher nicht durch eine Formel im Sinne einer elementaren Funktion darstellen. Die Funktion $f(x) := e^{x^2}$ lässt sich also nicht im obigen Sinne *symbolisch integrieren*. Das ist bemerkenswert, da wir bei der Definition einer elementaren Funktion sogar zulassen, dass wir eine algebraische Gleichung lösen, d. h. Nullstellen eines Polynoms nehmen.[23]

[21] In Büchern wird hier oft vorausgesetzt, dass X_0 und X offen sind.

[22] Siehe [Chu][Corollary 5.4].

[23] Gemäss dem Satz von Abel-Ruffini gibt keine Formel für diese Nullstellen, falls das Polynom Grad mindestens 5 besitzt. Mit einer *Formel* meinen wir hier einen endlichen Ausdruck, der aus den Koeffizienten des Polynoms mittels Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und Wurzelziehen gebildet wird.

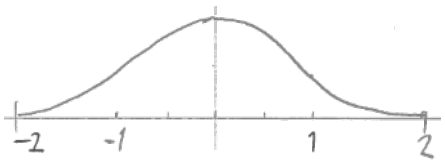


Abbildung 6.6: Gaußfunktion.

Eine Variante dieses Integrals ist durch die folgende Funktion gegeben:

$$\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{x_- \to -\infty} \int_{x_-}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Dieser Grenzwert ist ein *uneigentliches Integral*. Wir werden solche Integrale im Abschnitt 6.10 behandeln. Siehe Definition 6.67.) Die Funktion Φ heisst *Gaußsches Fehlerintegral*. Sie ist ebenfalls nicht elementar.

Bemerkungen 6.52. [Gaußsche Glockenfunktion, Gaußsches Fehlerintegral]

- Seien $C, \mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in]0, \infty[$. Wir definieren die *Gaußsche Glockenfunktion* (oder *Gauß-Funktion*) *mit Maximum C, Mittelwert (oder Erwartungswert) μ und Standardabweichung σ* als die Funktion

  $$f_{C,\mu,\sigma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_{C,\mu,\sigma}(x) = Ce^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

  Abbildung 6.6 zeigt diese Funktion für $\mu = 0$ und $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Wir betrachten den Fall $C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$. Dann ist die Funktion $f_{C,\mu,\sigma}$ *normiert* im Sinne, dass ihr uneigentliches Integral von $-\infty$ bis ∞ gleich 1 ist. Das folgt mit Hilfe eines zweidimensionalen Integrals, das wir in Analysis 2 behandeln werden. (Siehe Beispiel 10.29.)

  Die Funktion $f_{C,\mu,\sigma}$ ist die *Dichtefunktion* der Normalverteilung mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ. (Für diese Begriffe siehe die Vorlesung *Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik* (ITET und RW: 4. Semester). Das ist der Grund für die Terminologie *Gaußsche Glockenfunktion mit Maximum C, Mittelwert μ und Standardabweichung σ*. (Überprüfen Sie, dass C tatsächlich das Maximum der Funktion $f_{C,\mu,\sigma}$ ist.)

- Das Gaußsche Fehlerintegral Φ ist gleich dem Integral der Gaußschen Glockenfunktion $f := f_{C=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\mu=0,\sigma=1}$. Das bedeutet, dass Φ die Verteilungsfunktion der *Standardnormalverteilung* ist. Dass f normiert ist, ist der Grund für die Konstante $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ in der Definition von Φ.

  Das Gaußsche Fehlerintegral Φ spielt eine zentrale Rolle in der Statistik.

Bemerkung 6.53. [geschlossene Form, analytische Lösung]

(i) In angewandten Gebieten wird oft gesagt, dass eine gegebene Funktion f in *geschlossene Form* gebracht werden kann, wobei typischerweise nicht definiert wird, was das bedeutet. Meistens ist damit wohl gemeint, dass f *elementar* ist. (Siehe Seite 292.)[24] Der Begriff einer elementaren Funktion präzisiert also die Sprechweise *geschlossene Form*.

(ii) In angewandten Gebieten wird mit *analytischer Lösung* einer vorgegebenen Differentialgleichung oft eine Lösung f bezeichnet, die in geschlossene Form gebracht werden kann. Gemäss Bemerkung (i) bedeutet das wohl meistens, dass f elementar ist. Zum Beispiel ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x$ eine analytische Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung $f' = 1$.

Diese Verwendung des Wortes *analytisch* ist problematisch, da eine Funktion f im Sinne der Analysis *analytisch* genannt wird g. d. w. f lokal durch eine Potenzreihe dargestellt wird. (Siehe die Vorlesung *mathematische Methoden für ITET und RW*.) Viele in diesem Sinne analytische Funktionen sind nicht elementar. Ein Beispiel dafür ist das Gaußsche Fehlerintegral. (Siehe Beispiel 6.51.)

Weitere Beispiele von Funktionen, die sich nicht durch eine Formel im Sinne einer elementaren Funktion darstellen lassen, sind durch viele *elliptische Integrale* gegeben. Ein gewisses elliptisches Integral beschreibt die Bogenlänge einer Ellipse. Elliptische Integrale treten auch in der Physik auf, zum Beispiel beim ebenen Pendel und beim elektrischen Potential einer ringförmigen Ladungsverteilung.

Ein *(unvollständiges) elliptisches Integral* ist eine Funktion F einer reellen Variable der Form

$$F(x) := \int_0^x R\left(t, \sqrt{P(t)}\right) dt,$$

wobei R eine rationale Funktion zweier Variablen und P ein Polynom dritten oder vierten Grades mit nur einfachen Nullstellen ist.

Beispiel 6.54. [elliptisches Integral, keine Formel] Wir betrachten den Fall, dass $R(x, y) = \frac{1}{y}$. Dann ist das elliptische Integral $F = \int_0^{\bullet} \frac{1}{\sqrt{P}}$ nicht elementar (wie auf Seite 292 definiert). Das ist ein schwierig zu beweisender mathematischer Satz.[25] Das Integral $\int_0^{\bullet} \frac{1}{\sqrt{P}}$ lässt sich daher nicht durch eine Formel im Sinne einer elementaren Funktion darstellen. Es lässt sich also nicht symbolisch berechnen. Konkrete Beispiele

[24] Möglicherwise wird bei *geschlossener Form* allerdings nicht erlaubt, dass wir algebraische Gleichungen für (mehrwertige) Funktionen lösen.

[25] Siehe [Con, Example 4.3].

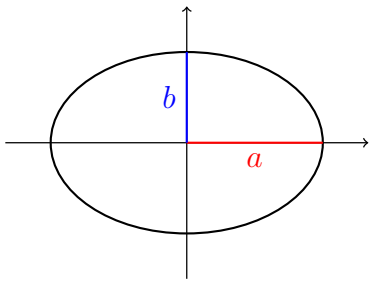


Abbildung 6.7: Die waagerechte Ellipse mit Mittelpunkt im Ursprung und Halbachsen a und b.

eines solchen Integrals sind

$$\int_0^{\cdot} \frac{1}{\sqrt{(x+1)x(x-1)}}dx,$$
$$\int_0^{\cdot} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(4-x^2)}}dx. \tag{6.109}$$

Bemerkung. [elliptisches Integral] Insbesondere führt die Integrationsstrategie 7 (Substitution mit $y = F(x) = a \sin x$) beim Integral (6.109) also nicht zum Ziel, obwohl der Integrand aus Ausdrücken der Form $\sqrt{a^2 - x^2}$ (mit $a = 1, 2$) besteht.

Bemerkung. [Zusammenhang zwischen elliptischem Integral und Länge der Ellipse, Grund für Namen] Der Name *elliptisches Integral* rührt daher, dass die Länge einer Ellipse durch ein (vollständiges) elliptisches Integral gegeben ist. Um das zu verstehen, betrachten wir die waagerechte Ellipse mit Mittelpunkt im Ursprung und Halbachsen a und b, d. h. die Menge

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1\right\}. \tag{6.110}$$

(Siehe Abbildung 6.7.) Wir definieren die *(numerische) Exzentriziät* der Ellipse als

$$\varepsilon := \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}.^{26} \tag{6.111}$$

Wir definieren

$$E :]0, 1[\to \mathbb{R}, \qquad E(k) := \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k^2x^2}{1 - x^2}}dx.$$

[26] Die *lineare Exzentrizität* e ist der Abstand jedes der beiden Brennpunkte der Ellipse zum Mittelpunkt. Die numerische Exzentriziät ist gegeben durch $\varepsilon = \frac{e}{a}$. Sie liegt zwischen 0 und 1. Für einen Kreis ist sie gleich 0. Wenn die Ellipse immer flacher wird, nähert sich ihre numerische Exzentriziät der Zahl 1.

Das ist ein *vollständiges elliptisches Integral*, d. h. der Wert eines unvollständigen elliptischen Integrals an der Stelle 1.[27]Die Länge L der Ellipse[28] ist durch ein Vielfaches dieses elliptischen Integrals gegeben, nämlich durch

$$L = 4aE(\varepsilon).^{29} \tag{6.112}$$

Das erklärt den Namen *elliptisches Integral*.

Bemerkung. [elliptische Integrale in der Mechanik und Elektrostatik] Elliptische Integrale treten in der Mechanik und Elektrostatik auf. Ein Beispiel hierfür ist die Schwingungsdauer des *Fadenpendels*, das in Abbildung 6.8 dargestellt ist. Um das zu erklären, verwenden wir die folgenden Bezeichnungen:

$\ell :=$ Länge des Fadens

$g :=$ Fallbeschleunigung $\approx 9.8\mathrm{m}\,\mathrm{sec}^{-2}$

$\varphi_{\max} :=$ maximaler Auslenkungswinkel

$$K :]0,1[, \qquad K(k) := \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

Das ist ein elliptisches Integral. Die Schwingungsdauer des Fadenpendels ist gegeben durch

$$T = 4K\left(\sin\left(\frac{\varphi_{\max}}{2}\right)\right)\sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

[27]Wir definieren $R(x,y) := \frac{1-k^2x^2}{y}$, $P(x) := (1-k^2x^2)(1-x^2)$ und $F(x) := \int_0^x R\left(t, \sqrt{P(t)}\right) dt$. Da $0 < k < 1$, ist P ist ein Polynom vierten Grades mit nur einfachen Nullstellen. (Wodurch sind sie gegeben?) Daher ist F ein unvollständiges elliptisches Integral. Es gilt $E(k) = F(1) = \int_0^1 R\left(t, \sqrt{P(t)}\right) dt$. Daher ist $E(k)$ ein vollständiges elliptisches Integral.

[28]Gemäss (6.110) ist die Ellipse eine Kurve, d. h. ein eindimensionales Objekt. Die Ellipse besitzt daher eine Länge. Die hier verwendete Definition des Begriffes einer Ellipse ist in der modernen höheren Mathematik gebräuchlich. In der elementaren Geometrie ist mit *Ellipse* stattdessen oft die elliptische Scheibe gemeint, die von der Kurve (6.110) begrenzt wird. Entsprechend wird dann vom *Umfang der Ellipse* statt von ihrer Länge gesprochen. Vergleiche mit Bemerkung 1.19.

[29]Beweis: Der Schnitt der Ellipse mit dem offenen ersten Quadranten ist durch den Graphen der Funktion $f :]0,a[\to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} = \frac{b}{a}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$, gegeben. Die Länge der Ellipse ist gegeben durch $L = 4\int_0^a \sqrt{1+f'(x)^2}dx$. Sei $x \in]0,a[$. Wir schreiben $t := \frac{x}{a}$. Gemäss der Kettenregel gilt $f'(x) = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = \frac{-\frac{b}{a}t}{\sqrt{1-t^2}}$ und daher $1 + f'(x)^2 = \frac{1-t^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2 t^2 = 1-\varepsilon^2t^2}{1-t^2}$. Hierbei haben wir (6.111) verwendet. Mittels der Substitution $x = at$ erhalten wir also $L = 4\int_0^a \sqrt{1+f'(x)^2}dx = 4a\int_0^1 \sqrt{\frac{1-\varepsilon^2t^2}{1-t^2}}dt = 4aE(\varepsilon)$. Das beweist (6.112).

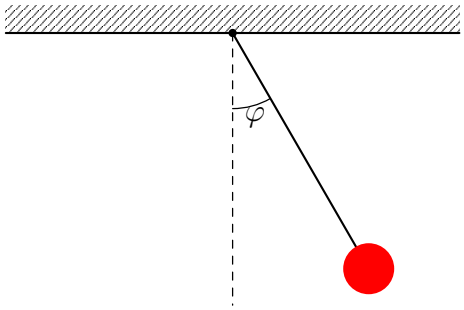


Abbildung 6.8: Ein Fadenpendel. Die Variable φ bezeichnet den Auslenkwinkel.

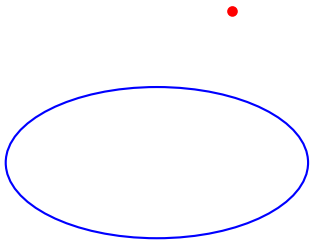


Abbildung 6.9: Der blaue Ring ist homogen (=gleichmässig) elektrisch geladen. Die Ladungsverteilung erzeugt im roten Punkt ein elektrisches Potential. Dieses Potential hängt vom Punkt gemäss einer Formel ab, in der ein elliptisches Integral auftritt.

Siehe zum Beispiel [Cra04, formula (14), p. 2] und [Tka, 1.1.2. The simple pendulum]. Idealisierend nehmen wir hier unter anderem an, dass der Faden vernachlässigbar dünn ist und die rote Kugel vernachlässigbar klein ist. Wir nehmen jedoch *nicht* näherungsweise an, dass die Rückstellkraft proportional zur Auslenkung ist.

Ein elliptisches Integral tritt auch in der Formel für das elektrische Potential einer homogenen ringförmigen Ladungsverteilung im dreidimensionalen Raum auf. Eine solche Ladungsverteilung ist in Abbildung 6.9 dargestellt. Sie erzeugt ein Potential, das durch eine Formel gegeben ist, die ein elliptisches Integral enthält. Siehe [Goo98, Example 6-11, p. 146].

6.8.3 Algorithmische symbolische Integrierbarkeit, Risch-Algorithmus

Ein *Algorithmus* ist eine endliche Abfolge von eindeutigen Anweisungen, die von einer Maschine automatisch ausgeführt werden können. Aus Beispielen 6.51 und 6.54 folgt, dass es keinen Algorithmus gibt, der *jede* elementare Funktion f symbolisch integriert, indem er eine elementare Funktion angibt, die eine Stammfunktion für f ist.

Auf der anderen Seite entscheidet der sogenannte *Risch-Algorithmus* für eine grosse Klasse von elementaren Funktionen f, ob f eine elementare Stammfunktion F besitzt und berechnet in diesem Fall ein solches F. Der Algorithmus wird zum Beispiel in [Gro13, Chapter 10, Risch Algorithm] und [Bro05, Chapters 5–8] beschrieben. Er ist teilweise in Computeralgebrasystemen (CAS) implementiert, zum Beispiel in *SageMath*. Das Sage-Skript in Abbildung 6.10 bestimmt mit Hilfe des Risch-Algorithmus, ob die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := e^{-x^2}$, eine elementare Stammfunktion F besitzt

```
from sage.interfaces.fricas import fricas
import re
fricas.eval("f:=exp(-x^2)")
f_sa=fricas("f::Expression(Complex(Integer))").sage()
m=fricas.eval(
    "F:=complexIntegrate(f,x);"
)
fricas.eval(
    "elem_ker(k) "
    "== symbolIfCan(k) case Symbol or "
    "(has?(operator(k), 'elem) or has?(operator(k), '%alg))"
)
fricas.eval(
    "elem_F:=f=0 or reduce(_and, [elem_ker(k) for k in tower(F)])"
)
if bool(re.compile(r"error", re.IGNORECASE).search(m)) or bool(
re.compile(r"cannot\s+convert", re.IGNORECASE).search(m)
)==True: print(
    "Es wurde nicht entschieden, ob x \u21A6",f_sa,
    "eine elementare Stammfunktion besitzt."
)
elif fricas("elem_F").sage()==True: print(
    "Eine elementare Stammfunktion von x \u21A6",f_sa,
    "ist gegeben durch:"
); print("x \u21A6",integrate(f_sa,x)
)
else: print(
    "Die Funktion x \u21A6", f_sa, "besitzt keine elementare Stammfunktion."
)
```

Abbildung 6.10: Ein Sage-Skript, das mit Hilfe des Risch-Algorithmus bestimmt, ob die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := e^{-x^2}$, eine elementare Stammfunktion F besitzt und in diesem Fall ein solches F berechnet.

und berechnet ein solches F in diesem Fall.[30] Sie können selbst überprüfen, was dabei herauskommt. Dazu kopieren Sie das Skript mit der Maus und füllen es in das Eingabefeld unter `https://sagecell.sagemath.org/` ein. Verwenden Sie das Skript, um für weitere Funktionen zu überprüfen, ob sie eine Stammfunktion besitzen! Passen Sie dazu in der dritten Zeile den Ausdruck `exp(-x^2)` entsprechend an.

[30] Ich bin Prof. Waldemar Hebisch dankbar für seine Hilfe mit diesem Sage-Skript.

Bemerkungen. • Das Sage-Skript ruft das Computeralgebrasystem *FriCAS* auf.[31] Der Ausdruck, der den Integranden `f` definiert, muss in der FriCAS-Sprache geschrieben werden, nicht in der Sage-Sprache.

- Multiplikation wird in der FriCAS-Sprache als `*` geschrieben. Zum Beispiel ist `x*2` das Produkt von `x` und `2`. Die Zeichenkette `x2` wird dagegen als der Name einer Variable interpretiert.

- Die Eulersche Zahl e und die Kreiszahl π werden als `%e` und `%pi` geschrieben.

- Die Arkus- und Areafunktionen, d. h. die Umkehrfunktionen der trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen, werden mit der Vorsilbe `a` geschrieben. Zum Beispiel bezeichnet `acos` den Arkuskosinus arccos und `acosh` den Areacosinus hyperbolicus arcosh.

- Folgende Tabelle liefert ein paar Beispiele von Ausdrücken in der üblichen mathematischen Schreibweise und der entsprechenden Ausdrücke in der FriCAS-Sprache:

e^{2x}	$\cos(2\pi x)$	$\sin\big(\arcsin(\exp(\log(x)))\big)$
`%e^(2*x)`	`cos(2*%pi*x)`	`sin(asin(exp(log(x))))`

$\sqrt{x}$	$\sqrt[3]{x^2+1}$
`sqrt x`	`nthRoot(x^2+1,3)`

[Was kommt wohl heraus, wenn wir `sin(asin(exp(log(x))))` in obiges Skript einfüllen?

`nthRoot(1-x^2,3)`

$\int x^a \left(\alpha+\beta x^b\right)^c dx = \left(x \mapsto x^{a+1}\cdot{}_2F_1\left(\frac{a+1}{b}, -c; \frac{a+1}{b}+1; -\frac{\beta}{\alpha}x^b\right)\right) + \mathcal{C}_{\text{loc}}$

$\int \sqrt[3]{x^2+1}dx = \left(x \mapsto x\cdot{}_2F_1(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}; \frac{3}{2}; -x^2)\right) + \mathcal{C}_{\text{loc}}$

Gaußsche hypergeometrische Funktion:

$$\cdot{}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}$$

Satz von Chebyshev (integration of differential binomial) $\to x \mapsto \sqrt[3]{x^2+1}$ besitzt keine elementare Stammfunktion.

`acos(x^2)` : keine elementare Stammfunktion

`asin(log(x))` : Es wurde nicht entschieden ...

]

[31] Für eine Dokumentation dieses CAS siehe [BBD+25].

- Das Sage-Skript und FriCAS enthalten möglicherweise Fehler. Es gibt daher keine Garantie, dass das Ergebnis stimmt.

  [`f:=integrate(acos(x^2),x)` ist nicht elementar integrierbar, aber Ausgabe: Eine Stammfunktion ... ist gegeben durch ...

  ]

Eine auf *Mathematica* aufbauende Antwortmaschine ist *Wolfram Alpha*, verfügbar unter `https://www.wolframalpha.com/` . Die Eingabe kann in natürlicher Sprache erfolgen. Zum Beispiel berechnet Wolfram Alpha bei folgender Eingabe das unbestimmte Integral $\int xe^x dx$:

```
integrate x*e^x with respect to x
```

Wolfram Alpha liefert das Resultat $e^x(x-1) + \text{constant}$. Dieses Resultat ist nicht wörtlich korrekt. Gemeint und korrekt ist $\int xe^x dx = (x \mapsto (x-1)e^x) + \mathcal{C}$, da das die Menge der Stammfunktionen von $x \mapsto xe^x$ ist. Vergleiche mit Bemerkung 6.28.

Bisher ist der Risch-Algorithmus in keinem Computeralgebrasystem *vollständig* implementiert. Der Grund dafür ist, dass dieser Algorithmus sehr kompliziert ist.

Die Computeralgebrasysteme Sage und Mathematica berechnen in einem *erweiterten Sinn* auch gewisse *nicht* elementare unbestimmte Integrale.

[Probieren wir mal `integral(e^(-x^2),x)` aus.

] So besitzt die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := e^{-x^2}$ keine elementare Stammfunktion, wie in Beispiel 6.51 erwähnt. Trotzdem liefert Sage auf die Eingabe `integral(e^(-x^2),x)` das folgende Resultat: `1/2*sqrt(pi)*erf(x)`. Die Notation `sqrt` steht dabei für *square root = Quadratwurzel*. Die Notation erf steht für ***er**ror **f**unction*. Das ist die *Gaußsche Fehlerfunktion*. Sie ist definiert als

$$\operatorname{erf} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy. \tag{6.113}$$

Die Funktion erf ist also gerade so definiert, dass sie bis auf eine multiplikative Konstante eine Stammfunktion der Gaußfunktion f ist. In diesem Beispiel hat Sage also nichts wirklich berechnet, sondern einer Stammfunktion von f bis auf eine multiplikative Konstante einfach einen Namen gegeben.

Die Gaußsche Fehlerfunktion erf spielt eine wichtige Rolle in der Statistik.

6.8.4 Numerische Quadratur (Integration)

Mathematik lässt sich grob aufspalten in *kontinuierliche* und *diskrete* Mathematik. *Kontinuierliche Mathematik* befasst sich mit *kontinuierlichen Objekten*, wie zum Beispiel Funktionen reeller und komplexer Veränderlicher. In diesen Bereich gehören zum Beispiel die Analysis und die lineare Algebra[32]. Im Gegensatz dazu befasst sich *diskrete Mathematik* mit *diskreten Objekten* wie den ganzen Zahlen und Graphen. (Siehe die Vorlesungen *Diskrete Mathematik* für ITET im 3. Semester und *Diskrete Mathematik* für RW im 1. Semester.) *Numerik* ist ein Teilgebiet der Mathematik, das sich mit Algorithmen zur näherungsweisen Lösung von Problemen der kontinuierlichen Mathematik befasst. Ein Algorithmus ist endliche Abfolge von eindeutigen Anweisungen, die von einer Maschine automatisch ausgeführt werden können.

In der Numerik wird unter anderem *numerische Quadratur* (oder *numerische Integration*) behandelt. Das ist das näherungsweise Berechnen eines Integrals mittels einer *Quadraturformel* (oder *Näherungsformel*). Quadraturformeln werden verwendet, falls ein Integral nicht symbolisch berechnet werden[33] oder auf andere Weise explizit angegeben werden kann, zum Beispiel mittels einer konvergenten Potenzreihe. (Für Beispiele nicht symbolisch berechenbarer Integrale siehe Abschnitt 6.8.2.) Selbst für ein symbolisch berechenbares Integral wird allerdings eine Quadraturformel verwendet, wenn damit das Integral schneller näherungsweise berechnet werden kann als durch die numerische Auswertung einer Stammfunktion. Dieser Abschnitt enthält eine sehr kurze Einführung in die *numerische Quadratur*. Das Thema wird in den Vorlesungen *Numerische Methoden* (ITET, 4. Semester) und *Numerical Methods for CSE* (RW, 3. Semester) ausführlicher behandelt.

Bemerkungen. [Quadratur, (numerische) Integration]

- *Quadratur* ist eine traditionelle Bezeichnung für das Berechnen eines Flächeninhaltes. Zum Beispiel ist eines der drei klassischen Probleme der griechischen Mathematik die *Quadratur des Kreises*. Es besteht darin, in endlich vielen Schritten mit Zirkel und Lineal ein Quadrat mit dem Flächeninhalt des Einheitskreises zu konstruieren.

  Das Integral einer Funktion f ist der Flächeninhalt des Gebietes unter dem Graphen von f. Das erklärt die Bezeichnung *numerische Quadratur* für das näherungsweise Berechnen eines Integrals.

[32] über dem Körper der reellen und komplexen Zahlen

[33] Mit einer *symbolischen Berechnung* eines unbestimmten Integrals meinen wir eine Folge von symbolischen Umformungen, an deren Ende eine elementare Funktion (plus lokal konstante Funktionen) steht. (Siehe die Definition auf Seite 292.) Ein Beispiel dafür ist die Berechnung des unbestimmten Integrals $\int xe^x dx$ gegeben durch $\int xe^x dx = (x \mapsto xe^x) - \int 1 \cdot e^x dx = \left(x \mapsto xe^x - e^x\right) + \mathcal{C}_{\text{loc}}$.

- Der Term *Integration* wird nicht nur für das Bestimmen von Integralen verwendet, sondern allgemeiner auch für das Lösen einer Differentialgleichung. (Wir werden gewöhnliche Differentialgleichungen im Kapitel 7 behandeln.) Diese verallgemeinerte Sprechweise ist sinnvoll, da wir das bestimmte Integral $\int_a^b f$ bestimmen können, indem wir die Differentialgleichung $F' = f$ für F lösen. Gemäss dem zweiten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt nämlich $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.
- Entsprechend wird der Term *numerische Integration* nicht nur für das näherungsweise Berechnen eines Integrals verwendet, sondern allgemeiner auch für das näherungsweise Lösen einer Differentialgleichung.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $a \leq b$, $n \in \mathbb{N}$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Eine Quadraturformel ist eine gewichtete Summe von Werten von f an n sogenannten Stützstellen. Für grosses n liefert sie in guten Fällen eine gute Näherung für das bestimmte Integral $\int_a^b f$. Eine einfache Quadraturformel ist die linke Rechteckregel. Um sie zu beschreiben, definieren wir die *Gitterweite* (oder *Schrittweite*) als

$$h := \frac{b-a}{n}. \tag{6.114}$$

Die (*zusammengesetzte*) *linke Rechteckregel* ist gegeben durch

$$L_n(f) := h \sum_{i=0}^{n-1} f(a + ih). \tag{6.115}$$

Bemerkungen 6.55. [Riemann-Summe, linke Rechteckregel]

(i) Seien $x_0, \ldots, x_n$ so, dass $x_i \leq x_{i+1}$ für jedes $i = 0, \ldots, n-1$, $x_0 = a$, $x_n = b$. Wir nennen das Tupel $Z := (x_0, \ldots, x_n)$ eine *Zerlegung*[34] *des Intervalls* $[a, b]$. Für jedes $i = 1, \ldots, n$ sei $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Wir nennen ξ_i eine *Zwischenstelle*. Wir definieren die zur Funktion f, der Zerlegung Z und den Zwischenstellen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ gehörige *Riemann-Summe* als

$$S\big(f, Z, \xi_1, \ldots, \xi_n\big) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Siehe Abbildung 6.11. Wir betrachten jetzt den Fall, in dem f stetig ist und $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$, für jedes $i = 0, \ldots, n$. Dann konvergiert für jede Wahl der Zwischenstellen die Riemann-Summe für $n \to \infty$ gegen das Integral $\int_a^b f$. Das folgt aus [Stra, Satz 6.2.3]. In diesem Sinn nähert die Riemann-Summe das Integral an.

[34] Das Wort *Zerlegung* wird ausserhalb der Integrationstheorie in einem etwas abweichenden Sinn verwendet, siehe Bemerkung 10.3(i).

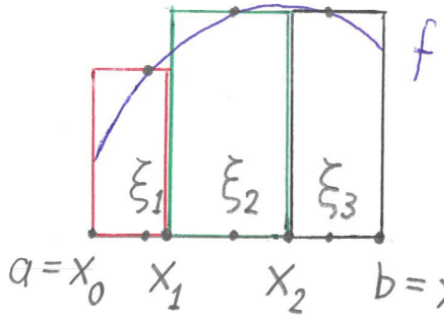


Abbildung 6.11: Riemann-Summe mit $n = 3$. Sie ist durch die Summe der Flächeninhalte der Rechtecke gegeben.

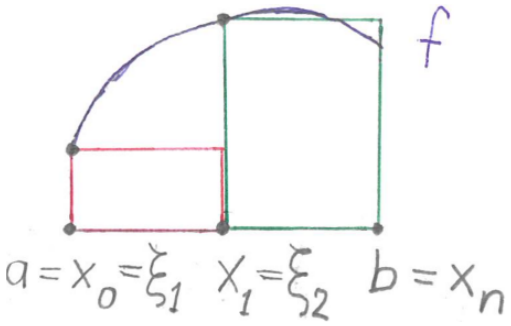


Abbildung 6.12: Linke Rechteckregel für $n = 2$. Sie ist durch die Riemann-Summe für $x_i = \xi_i = a + i\frac{b-a}{n}$ gegeben.

(ii) Die linke Rechteckregel L_n ist gegeben durch die Riemann-Summe für $x_i = \xi_i = a + i\frac{b-a}{n}$. Siehe Abbildung 6.12. Gemäss Bemerkung (i) nähert $L_n(f)$ daher für grosses n das Integral von f beliebig genau an.

Wir definieren den *Fehler* E_n der linken Rechteckregel L_n durch

$$E_n(f) := L_n(f) - \int_a^b f.$$

Gemäss Bemerkung 6.55(ii) konvergiert $E_n(f)$ für $n \to \infty$ gegen 0. Folgende Proposition schätzt den Betrag dieses Fehlers präziser nach oben ab.

Proposition 6.56 (Fehler der linken Rechteckregel)**.** *Falls $f \in C^1([a,b])$, dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$, dass*

$$|E_n(f)| = \left| L_n(f) - \int_a^b f \right| \leq \frac{(b-a)^2 \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|}{2n}. \tag{6.116}$$

Beweis: S. 304

Bemerkungen. [Fehler der linken Rechteckregel]

- Diese Abschätzung ist in der Praxis nützlich, da wir damit herausfinden können, wie viele Stützpunkte wir benötigen, um das Integral von f mit einer vorgegebenen Genauigkeit zu berechnen.
- Nach dieser Proposition gibt es für jede Funktion f eine Konstante $C \in [0, \infty[$ so, dass

$$\left| L_n(f) - \int_a^b f \right| \leq \frac{C}{n}. \tag{6.117}$$

Beispiel 6.57. [linke Rechteckregel] **Aufgabe:** Berechne $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ bis auf einen Fehler mit Betrag höchstens $\frac{1}{10}$.

Lösung: Wir betrachten $a := 1$, $b := 2$ und die Funktion

$$f : [1, 2] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{1}{x}.$$

Es gilt $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ und daher $\max_{x\in[1,2]} |f'(x)| = |f'(1)| = 1$. Gemäss Proposition 6.56 gilt daher für jedes $n \in \mathbb{N}$, dass

$$|E_n(f)| \leq \frac{(2-1)^2 \cdot 1}{2n} = \frac{1}{2n}.$$

Für $n = 5$ gilt daher $|E_5(f)| \leq \frac{1}{10}$. Wir berechnen mit der linken Rechteckregel gemäss (6.115,6.114):

$$L_5(f) = \frac{2-1}{5}\left(\frac{1}{1+0} + \frac{1}{1+\frac{1}{5}} + \frac{1}{1+\frac{2}{5}} + \frac{1}{1+\frac{3}{5}} + \frac{1}{1+\frac{4}{5}}\right) = 0.74\cdots \tag{6.118}$$

Es gilt

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \log x|_{x=1}^2 = \log 2 - \log 1 = \log 2 = 0.69\cdots$$

(gemäss Taschenrechner), also mit Hilfe von (6.118)

$$\left| E_5(f) = L_5(f) - \int_1^2 \frac{1}{x} dx \right| = 0.05\cdots < \frac{1}{10}.$$

Der Betrag des Fehlers der linken Rechteckregel L_5 beträgt also tatsächlich höchstens $\frac{1}{10}$, wie gewünscht.

Bemerkung. [Berechnen von Logarithmen] Allgemeiner können wir für jedes $x \in]0, \infty[$ eine geeignete Quadraturformel zum näherungsweisen Berechnen des natürlichen Logarithmus von x verwenden, da $\log x = \int_1^x \frac{1}{y} dy$.

Beweis der Proposition 6.56: Wir schreiben

$$c := \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|.$$

Sei $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Wir definieren die i-te *Stützstelle* als

$$x_i := a + \frac{i}{n}(b-a). \tag{6.119}$$

Sei $x \in]x_i, x_{i+1}]$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $\xi \in]x_i, x[$ so, dass $\frac{f(x)-f(x_i)}{x-x_i} = f'(\xi)$, d. h. $f(x) - f(x_i) = f'(\xi)(x - x_i)$. Daher gilt

$$\big|f(x) - f(x_i)\big| = |f'(\xi)|(x - x_i) \le c(x - x_i), \tag{6.120}$$

$$\begin{aligned}
\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} \big(f(x) - f(x_i)\big)dx\right| &\le \int_{x_i}^{x_{i+1}} \big|f(x) - f(x_i)\big|dx \\
&\le c\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)dx \qquad \text{(wegen (6.120))} \\
&= c\,\frac{(x - x_i)^2}{2}\bigg|_{x=x_i}^{x_{i+1}} \\
&= \frac{c}{2}\left(\frac{(b-a)^2}{n^2} - 0\right) \qquad \text{(wegen (6.119))}, \qquad (6.121)
\end{aligned}$$

$$\int_a^b f - L_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} f - \frac{b-a}{n} f(x_i)\right) \quad (a = x_0,\, b = x_n,\, (6.115)), \tag{6.122}$$

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f - L_n(f)\right| &\le \sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} f - \frac{b-a}{n} f(x_i)\right| \quad ((6.122), \text{ Dreiecksungleichung}) \\
&\le \frac{c(b-a)^2 n}{2n^2} \qquad \text{(wegen (6.121,6.119))}. \qquad (6.123)
\end{aligned}$$

Das zeigt (6.116) und beweist Proposition 6.56. □

Wir definieren jetzt den Begriff einer allgemeinen Quadraturformel. Seien dazu $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $n \in \mathbb{N}$, $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$ und $w_0, \ldots, w_n \in \mathbb{R}$. Wir nennen $x_0, \ldots, x_n$ *Stützstellen* und $w_0, \ldots, w_n$ *Gewichte*.

Definition 6.58 (Quadraturformel)**.** *Die* zu den Integrationsgrenzen a, b, den Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ und den Gewichten $w_0, \ldots, w_n$ gehörige Quadraturformel *ist die Abbildung*

$$I := I_{a,b,x_0,\ldots,x_n,w_0,\ldots,w_n} : \big\{\textit{eigentlich Riemann-integrierbare Funktion } f : [a, b] \to \mathbb{R}\big\} \to \mathbb{R},$$

$$I(f) := \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i). \tag{6.124}$$

Beispiele 6.59. [Quadraturformel] Seien $a \le b$, $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren die Gitterweite $h := \frac{b-a}{n}$ und für $i = 0, \ldots, n$ die i-te Stützstelle als

$$x_i := a + ih.$$

Jede Zeile der folgenden Tabelle beschreibt eine Quadraturformel mit diesen Stützstellen und den angegebenen Gewichten.

Symbol	Name	$(w_0, \dots, w_n)$	$\lvert$Fehler $E_n(f)\rvert \leq$
L_n	(zusammengesetzte) linke Rechteckregel	$h\big(1, 1, \dots, 1, 0\big)$	$\dfrac{(b-a)^2 \max_{x\in[a,b]} \lvert f'(x)\rvert}{2} \cdot \dfrac{1}{n}$
T_n	(zusammengesetzte) Trapezregel =Trapezsumme	$h\left(\frac{1}{2}, 1, 1, \dots, 1, \frac{1}{2}\right)$	$\dfrac{(b-a)^3 \max_{x\in[a,b]} \lvert f''(x)\rvert}{12} \cdot \dfrac{1}{n^2}$
S_n	(zusammengesetzte) Simpson-Regel	$h\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$	$\dfrac{(b-a)^5 \max_{x\in[a,b]} \lvert f^{(4)}(x)\rvert}{180} \cdot \dfrac{1}{n^4}$

Erklärungen: Die dritte Spalte enthält die Gewichte der Quadraturformel. Wir betrachten eine Zeile der Tabelle und schreiben I_n für die entsprechende Quadraturformel. Wir definieren den Fehler der Quadraturformel als

$$E_n(f) := I_n(f) - \int_a^b f.$$

Die letzte Spalte der Tabelle gibt eine obere Abschätzung für den Betrag des Fehlers an. Wir nehmen hierbei an, dass die Funktion f k-mal stetig differenzierbar ist, wobei k die Anzahl Ableitungen von f ist, die in der Abschätzung auftreten. Bei der Simpson-Regel nehmen wir an, dass n gerade ist. Diese Regel ist nach Thomas Simpson (1710-1761, englischer Mathematiker) benannt. Wie wir sehen, ist die linke Rechteckregel also tatsächlich eine Quadraturformel. Für die Fehlerabschätzungen siehe Proposition 6.56 und [DH08, Tabelle 9.1, S. 300].[35]

Aus der obigen Tabelle können wir ablesen, dass die Fehlerabschätzung asymptotisch für grosses n für die Trapezregel besser ist als für die linke Rechteckregel und für die Simpson-Regel noch besser. Für die Simpson-Regel gibt es gemäss der Tabelle für jede Funktion f eine Konstante $C \in [0, \infty[$ so, dass

$$\left| E_n(f) = S_n(f) - \int_a^b f \right| \leq \frac{C}{n^4}.$$

[35] Die erste Zeile von [DH08, Tabelle 9.1, S. 300] beschreibt die *einfache* Trapezregel. Bei dieser Version der Regel ist n gleich 1, es gibt also 2 Stützstellen x_0, x_1. Wir erhalten die Fehlerabschätzung für die *zusammengesetzte* Trapezegel, indem wir das Intervall $[a, b]$ in n gleichlange Teilintervalle aufspalten und die einfache Trapezregel auf jedes Teilintervall anwenden. Die zweite Zeile von [DH08, Tabelle 9.1, S. 300] beschreibt die *einfache* Simpson-Regel, bei der n gleich 2 ist und es 3 Stützstellen x_0, x_1, x_2 gibt. Daraus folgt die Fehlerabschätzung für die *zusammengesetzte* Simpson-Regel.

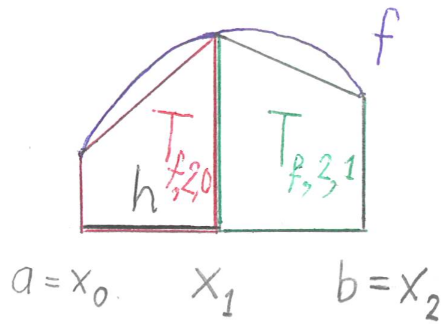


Abbildung 6.13: Trapezregel T_n für $n = 2$. $T_2(f)$ ist durch die Summe der Flächen der Trapeze $T_{f,2,0}$ und $T_{f,2,1}$ gegeben. Die Gitterweite h ist Länge der unteren Seite jedes Trapezes.

Der Fehler dieser Regel ist also von vierter Ordnung in der Gitterweite $h = \frac{b-a}{n}$.

Bemerkung. [Trapezregel] Um den Namen *Trapezregel* zu erklären, bezeichnen wir für $i = 0, \ldots, n-1$ mit $T_{f,n,i}$ das Trapez mit Eckpunkten $(x_i, 0), (x_{i+1}, 0), (x_i, f(x_i)), (x_{i+1}, f(x_{i+1}))$, siehe Abbildung 6.13. Die Trapezregel T_n ist durch die Summe der Flächen dieser Trapeze gegeben, d. h.

$$T_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} |T_{f,n,i}|.$$

(Überlegen Sie sich das!) Das erklärt den Namen *Trapezregel*.

Beispiel. [näherungsweise Integration mittels Simpson-Regel] **Aufgabe:** Berechne $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ bis auf einen Fehler mit Betrag kleiner als 10^{-3}.

Lösung: Wir verwenden die Simpson-Regel S_n. Dazu betrachten wir $a := 1$, $b := 2$ und die Funktion

$$f : [1, 2] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Es gilt

$$f'(x) = -x^{-2}, \qquad f''(x) = 2x^{-3}, \qquad f^{(3)}(x) = -6x^{-4}, \qquad f^{(4)} = 24x^{-5}$$

und daher $\max_{x\in[1,2]} |f^{(4)}(x)| = |f^{(4)}(1)| = 24$. Gemäss der letzten Zeile der Tabelle in den Beispielen 6.59 gilt daher für jedes $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\left| E_n(f) = S_n(f) - \int_a^b f \right| \leq \frac{(2-1)^5 \cdot 24}{180n^4} = \frac{2}{15n^4}.$$

Für $n \geq \sqrt[4]{\frac{2}{15 \cdot 10^{-3}}} = 3.\cdots$ gilt daher $|E_n(f)| \leq 10^{-3}$. Daher berechnen wir für $n = 4$ die Gitterweite $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{4}$ und mit (6.124) und der Simpson-Regel $I_4 = S_4$ gemäss

der Tabelle in den Beispielen 6.59:

$$S_4(f) = \sum_{i=0}^{4} w_i f(x_i) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+0} + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{4}} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{4}} + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{3}{4}} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{4}{4}}\right)$$
$$= 0.69325\cdots \tag{6.125}$$

Es gilt

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx = \log x|_{x=1}^2 = \log 2 - \log 1 = \log 2 = 0.69314\cdots$$

(gemäss Taschenrechner). Der Fehler der Simpson-Regel mit $n = 4$ beträgt daher

$$E_4(f) = S_4(f) - \int_1^2 \frac{1}{x}dx = 0.00010\cdots < 1.1\cdot 10^{-4},$$

also tatsächlich weniger als 10^{-3}, wie gewünscht.

Bemerkung. [Simpson-Regel, linke Rechteckregel] Gemäss (6.125) nähert die Simpson-Regel mit 5 Funktionsauswertungen, also sehr wenig Rechenaufwand, das Integral $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ bis fast auf einen Fehler von 10^{-4} an. Mit der linken Rechteckregel benötigen wir mehr als 2000 Funktionsauswertungen, um dieselbe Genauigkeit zu erreichen. (Siehe Beispiel 6.57.)

6.8.5 Grenzen des Rechnens

Gewisse mathematische Objekte lassen sich nicht berechnen, weder symbolisch noch numerisch. Das gilt zum Beispiel für fast alle reellen Zahlen. (Siehe Bemerkung 6.62((iii),(iv)).) Es gibt konkrete nicht berechenbare Objekte, zum Beispiel sogar eine explizit definierte reelle Zahl H. (Siehe (6.126) unten.) Es gibt keinen Algorithmus, der die Binärstellen[36] von H sukzessive berechnet. Es gibt auch keinen Algorithmus, der H näherungsweise berechnet, indem er zu einem gegebenen rationalen $\varepsilon > 0$ eine rationale Zahl r berechnet so, dass $|H - r| \leq \varepsilon$. Das intuitive Konzept eines Algorithmus wird durch den mathematischen Begriff einer *Turingmaschine* präzisiert. Dieser Abschnitt enthält eine sehr kurze Einführung in das Thema *Algorithmus*. Dieses Thema wird in den Vorlesungen *Informatik I*, *Informatik II* für ITET (2., 3. Semester) und *Informatik* für RW (1. Semester) ausführlich behandelt.

Um den Begriff der Berechenbarkeit zu verstehen und die Zahl H zu definieren, wiederholen wir zuerst kurz das intuitive Konzept eines Algorithmus. Ein *Algorithmus* ist eine endliche Abfolge von eindeutigen Anweisungen, die von einer Maschine automatisch ausgeführt werden können. Ein Beispiel für einen Algorithmus ist gegeben durch:

[36] oder Dezimalstellen

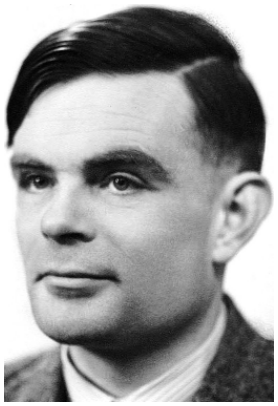


Abbildung 6.14: Alan Turing, britischer Logiker und Informatikpionier, 1912–1954. Turing wird als Vater der Informatik betrachtet.

1. Lies die Zahl n ein.
2. Definiere s als 0.
3. Für $i = 1$ bis n tue Folgendes:
   a) Addiere s und i.
   b) Überschreibe s mit dem Resultat.
4. Gib die Zahl s aus.
5. Halte an.

Dieser Algorithmus berechnet die Summe der ersten n Zahlen.

Algorithmen werden zum Beispiel verwendet, um die Grundrechenarten auszuführen und Funktionen symbolisch und numerisch abzuleiten und numerisch zu integrieren (siehe Abschnitt 6.8.4). Ein wichtiger Algorithmus in der Signal- und Systemtheorie ist die schnelle Fourier-Transformation. Sie berechnet die diskrete Fouriertransformation einer Funktion. (Siehe die Vorlesung *Signal- und Systemtheorie I* für ITET (3. Semester) und RW (3. Jahr)). Algorithmen lösen Probleme. Sie berechnen zum Beispiel numerische Lösungen von Differentialgleichungen und finden die kürzeste Veloroute zwischen zwei Punkten. Algorithmen "berechnen" also in einem sehr allgemeinen Sinn.

Turingmaschine ist ein mathematisch präziser Begriff, der die wesentlichen Aspekte eines Algorithmus erfasst. Der Begriff ist nach Alan Turing benannt. (Siehe Abbildung 6.14.) Eine (*deterministische*) *Turingmaschine* ist eine bestimmte Art Maschine, die aus einer Eingabe nach festgelegten Regeln eine Ausgabe berechnet. Schematisch wird

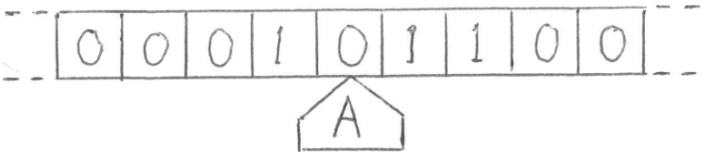


Abbildung 6.15: Schematische Darstellung einer Turingmaschine. Das Speicherband besteht aus unendlich vielen Feldern, die mit 0 und 1 gefüllt sind. Der Lese-Schreib-Kopf ist unterhalb des Speicherbandes dargestellt. Darin befindet sich in dieser schematischen Darstellung das Zustandsregister. Dieses enthält den Zustand der Turingmaschine, der hier durch A gegeben ist.

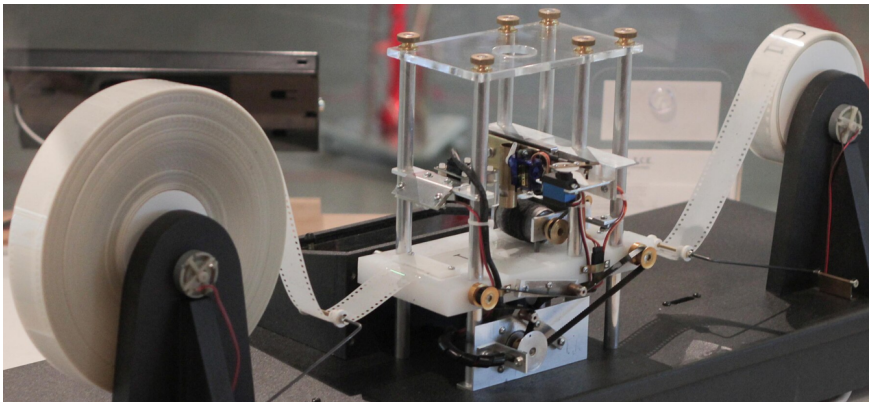


Abbildung 6.16: Ein physisches Modell einer Turingmaschine. Im Unterschied zu einer mathematischen Turingmaschine ist sein Speicherband endlich. Quelle: `https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=24369879`

eine Turingmaschine durch Abbildung 6.15 dargestellt. Für ein physisches Modell einer Turingmaschine siehe Abbildung 6.16. Eine Turingmaschine besteht aus:

- Einem *Speicherband*, das in beide Richtungen unbegrenzt ist und aus *unendlich* vielen aufeinanderfolgenden Feldern besteht. Jedes Feld enthält ein Zeichen aus einem *endlichen* Alphabet Γ, welches das Zeichen 0 enthält. (Wir fassen 0 als Leerzeichen auf.) Ein Beispiel ist $\Gamma = \{0, 1\}$.

- Einem *Lese-Schreib-Kopf*, der sich auf dem Speicherband befindet. Dieser kann das Zeichen im Feld einlesen, bei dem er sich befindet. Er kann dort auch ein Zeichen schreiben. Er kann sich auch auf dem Band hin- und herbewegen.

- Einem *Zustandsregister*, das den Zustand der Turingmaschine speichert. Dieser ist durch ein Element einer *endlichen* Menge Q gegeben, die A (Anfangszustand) und HALT (Endzustand) enthält. Ein Beispiel ist $Q = \{A, B, \text{HALT}\}$.

- Einer *Übergangstabelle*. Das ist eine endliche Tabelle, deren Zeilen die Form $q\,a\,q'\,a'\,d$ haben, wobei q, q' in der Zustandsmenge Q liegen, a, a' im Alphabet Γ liegen und d durch L, R oder N gegeben ist. Die Maschine interpretiert eine solche Zeile als folgende Regel:

  Falls der Zustand der Turingmaschine q ist und der Lese-Schreib-Kopf das Zeichen a vom Speicherband einliest, dann tue der Reihe nach Folgendes:

  - Überschreibe das Zeichen auf dem Speicherband mit a'.[37]
  - Bewege den Lese-Schreib-Kopf um ein Feld nach links ($d = \mathrm{L}$)/ rechts ($d = \mathrm{R}$)/ bleibe stehen ($d = \mathrm{N}$).
  - Wechsle in den Zustand q'.

  Diese Regel wird auch *Übergangsregel* genannt, da sie den Übergang der Turingmaschine in einen neuen Zustand und Bandinhalt und eine neue Kopf-Position regelt. Für jedes gegebene Paar (q, a) enthält die Tabelle genau eine Regel, falls $q \neq \mathrm{HALT}$, und keine Regel, falls $q = \mathrm{HALT}$. Ein Beispiel einer Regel ist durch $q\,a\,q'\,a'\,d\;=\;A\,0\,B\,1\,\mathrm{R}$ gegeben.

Die *Eingabe* besteht aus einem Wort (= endliche Zeichenfolge) im vorgegebenen Alphabet. Dieses Wort steht zu Beginn der Berechnung auf dem Speicherband. Die restlichen Felder werden mit 0 gefüllt. Zu Beginn befindet sich der Lese-Schreib-Kopf beim ersten Zeichen des Eingabewortes[38] und die Turingmaschine im Zustand A.

Die Turingmaschine führt jetzt schrittweise die durch die Tabelle vorgegebenen Regeln aus. Die *Konfiguration* der Maschine ist das eindeutige Tupel $\big(q, u, a, v\big)$ mit den folgenden Eigenschaften:

- q ist der Zustand der Maschine.
- u, v sind Wörter im Alphabet Γ.[39] a ist ein Buchstabe aus Γ. u beginnt nicht mit 0. v endet nicht mit 0.
- Der gegenwärtige Inhalt des Speicherbandes ist durch $\cdots 00uav00 \cdots$ gegeben.
- Der Lese-Schreib-Kopf befindet sich beim Zeichen a.

Falls die Maschine dabei den Endzustand HALT erreicht, stoppt sie und liefert als *Ausgabe* das Tripel (u, a, v). Als ein Beispiel betrachten wir die Zustandsmenge $Q := \{A, B, \mathrm{HALT}\}$, das Alphabet $\Gamma := \{0, 1\}$ und die folgende Übergangstabelle:

[37] Es ist erlaubt, dass $a = a'$. In diesem Fall ändert das Überschreiben nichts.

[38] falls dieses nicht leer ist

[39] Das leere Wort ist erlaubt.

jetziger Zustand	eingelesen	nächster Zustand	schreibe	bewege
A	0	B	1	R
A	1	HALT	0	N
B	0	A	1	L
B	1	B	1	N

Wir starten mit dem leeren Eingabewort, das wir mit ε bezeichnen. Das entspricht dem Text $\cdots 0\mathbf{0}0\cdots$ auf dem Speicherband. Die aktuelle Kopfposition ist fettgedruckt. Die Turingmaschine durchläuft folgende Kombinationen von Zustand und Bandinhalt:

Zustand	Bandinhalt	Konfiguration
A	$\cdots 0\mathbf{0}00\cdots$	$\big(A, \varepsilon, 0, \varepsilon\big)$
B	$\cdots 01\mathbf{0}0\cdots$	$\big(B, 1, 0, \varepsilon\big)$
A	$\cdots 0\mathbf{1}10\cdots$	$\big(A, \varepsilon, 1, 1\big)$
HALT	$\cdots 0\mathbf{0}10\cdots$	$\big(\text{HALT}, \varepsilon, 0, 1\big)$

In der letzten Spalte stehen die entsprechenden Konfigurationen. Die Ausgabe ist $(u, a, v) = \big(\varepsilon, 0, 1\big)$. Es kann passieren, dass die Turingmaschine nicht anhält, sondern ewig weiterläuft. Das ist zum Beispiel der Fall für $Q := \{A, \text{HALT}\}$, $\Gamma := \{0\}$, die Tabelle gegeben durch die einzige Anweisung $A\,0\,A\,0$ N und das leere Eingabewort ε. Die Turingmaschine bleibt in diesem Beispiel ewig in der Kombination des Zustandes A und des Bandinhaltes $\cdots 0\mathbf{0}0\cdots$ stecken.

Ein weiteres Beispiel ist gegeben durch $Q := \{A, \text{HALT}\}$, $\Gamma := \{0, 1\}$, die Übergangstabelle

jetziger Zustand	eingelesen	nächster Zustand	schreibe	bewege
A	0	A	1	R
A	1	HALT	0	N

und das leere Eingabewort. Die Turingmaschine durchläuft in diesem Beispiel die folgenden Kombinationen:

Zustand	Bandinhalt
A	$\cdots 0\mathbf{0}000\cdots$
A	$\cdots 01\mathbf{0}00\cdots$
A	$\cdots 011\mathbf{0}0\cdots$
$\vdots$	

Sie läuft also ewig weiter. Gewisse Turingmaschinen laufen ewig weiter, da sie in eine Endlosschleife geraten sind.

Bemerkungen 6.60. [Turingmaschinen, Algorithmen, Computerprogramme]

(i) Die Church-Turing-These besagt, dass Turingmaschinen genau die mathematischen Objekte berechnen können, die intuitiv berechenbar sind. Das bedeutet, dass der Begriff einer Turingmaschine das intuitive Konzept eines Algorithmus richtig erfasst. Die Church-Turing-These ist keine präzise mathematische Aussage, da das Wort *intuitiv* keine präzise Bedeutung besitzt. Die These wird allgemein als wahr angenommen.

(ii) Wir betrachten eine Allzweck-Programmiersprache L wie Pascal oder C++. Ein mathematisches Objekt kann genau dann mittels einer Turingmaschine berechnet werden, falls es ein Programm in der Sprache L gibt, welches das Objekt berechnet. Der Begriff einer Turingmaschine entspricht in diesem Sinne dem eines Computerprogrammes.

Sei x eine reelle Zahl. Für $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir x_{-n} für die n-te Binärstelle von x nach dem Radixpunkt (=Komma). Wir nennen x *berechenbar* g. d. w. es eine Turingmaschine M mit Alphabet $\Gamma = \{0, 1\}$ gibt, die für jedes $n \in \mathbb{N}$ bei Eingabe von n [40] nach endlich vielen Schritten hält mit der Ausgabe x_{-n}. [41]

Bemerkung. [Berechenbarkeit] Der Vorkommaanteil von x ist automatisch berechenbar mit Alphabet $\{0, 1\}$, da er endliche Länge besitzt. x ist daher genau dann berechenbar, falls es eine Turingmaschine mit Alphabet $\{0, 1\}$ gibt, die alle Stellen von x berechnet.

Beispiel 6.61. Jede rationale Zahl, $\sqrt{2}$, π und e sind berechenbar.

Wir betrachten eine Allzweck-Programmiersprache L wie Pascal oder C++. Dann ist x genau dann berechenbar, falls es ein Computerprogramm in der Sprache L gibt, das x berechnet. Der hier definierte Begriff der Berechenbarkeit stimmt daher mit unserem intuitiven Konzept überein.

Bemerkungen 6.62. [in Praxis auftretende Zahlen berechenbar, Mehrheit der reellen Zahlen nicht berechenbar, berechenbar ist verschwindend wahrscheinlich]

(i) Die konkreten Zahlen, die in der Praxis auftreten, *sind* berechenbar. Wie im Beispiel 6.61 erwähnt gilt das unter anderem für alle rationalen Zahlen, $\sqrt{2}$, π und e.

[40] Genauer gesagt schreiben wir n_i für die i-te Binärstelle von n und k für den maximalen Index wofür $n_k \neq 0$. Die Eingabe ist das Wort $n_0 \dots n_k$.

[41] Genauer gesagt meinen wir die Ausgabe $(u, a, v) = (\varepsilon, x_{-n}, \varepsilon)$.

(ii) Es gibt abzählbar unendlich viele berechenbare reelle Zahlen, also gleich viele wie natürliche Zahlen. (Siehe Bemerkung 2.19(v).) Es gibt nämlich unendlich viele berechenbare Zahlen, da jede natürliche Zahl berechenbar ist und es unendlich viele natürliche Zahlen gibt. Andererseits gibt es höchstens abzählbar viele berechenbare Zahlen, da es nur abzählbar viele Turingmaschinen gibt, bis auf Umbenennung der Zeichen im Alphabet und in der Zustandsmenge.

(iii) Es gibt überabzählbar viele reelle Zahlen. (Siehe Bemerkung 2.19(iv).) Wegen (ii) gibt es daher mehr reelle Zahlen als berechenbare Zahlen. Die allermeisten Zahlen sind also *nicht* berechenbar.

(iv) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig gewählte reelle Zahl $x \in [0,1]$ berechenbar ist, ist 0.[42] Präzise gesagt ist das Lebesguemass der Menge aller berechenbaren Zahlen gleich 0. Intuitiv ist das Lebesguemass einer Teilmenge von $\mathbb{R}$ ihre Länge. Dieses Mass wird in der Vorlesung *Analysis III (Masstheorie)* für Mathematiker/innen behandelt. Die berechenbaren Zahlen bilden also auch im wahrscheinlichkeitstheoretischen Sinne eine verschwindend kleine Menge. Das widerspricht (i) nicht, da wir in der Praxis Zahlen nicht zufällig aus allen reellen Zahlen wählen.

Gemäss Bemerkung 6.62(iii) sind die allermeisten reellen Zahlen nicht berechenbar. Wir konstruieren jetzt eine *konkrete* solche Zahl mit Hilfe von Turingmaschinen. Dazu betrachten wir die Symbole $\mathrm{HALT}, A_1, A_2, \ldots$.[43] Wir erstellen wie folgt eine Liste aller Turingmaschinen, für welche gilt, dass $Q = \{\mathrm{HALT}, A_1, \ldots, A_m\}$ und $\Gamma = \{0, \ldots, n\}$ für gewisse Zahlen $m, n \in \mathbb{N}_0$. Sei M eine solche Maschine. Wir definieren die Zeichenfolge s_M wie folgt. Wir ordnen die Zeilen der Übergangstabelle für M lexikographisch.[44] Dabei verwenden wir die Reihenfolgen $\mathrm{HALT}, A_1, A_2, \ldots$ und $0, 1, \ldots$ und $\mathrm{L}, \mathrm{N}, \mathrm{R}$. Hierbei fassen wir jede natürliche Zahl als *ein* Symbol auf. Zum Beispiel ist folgende Übergangstabelle lexikographisch geordnet:

jetziger Zustand	eingelesen	nächster Zustand	schreibe	bewege
A_1	0	A_2	1	L
A_1	1	A_1	0	N
A_2	0	HALT	0	R
A_2	1	A_1	0	N

Wir definieren s_M als die endliche Zeichenfolge, die wir erhalten, indem wir nebeneinander $m + n$, n und alle Einträge der Übergangstabelle in den Spalten *nächster*

[42] Wir nehmen hier an, dass die Zufallsvariable, die x bestimmt, gleichverteilt ist.

[43] Wir fassen hier HALT als *ein* Symbol auf. Das Gleiche gilt für A_1 usw.

[44] Die Ordnung ist also wie in einem Lexikon oder Wörterbuch. Zuerst sortieren wir die Zeilen nach dem ersten Zeichen, dann die Zeilen mit dem gleichen ersten Zeichen nach dem zweiten Zeichen usw.

Zustand, schreibe, bewege Zeile für Zeile hinschreiben. Im obigen Beispiel ist $m = 2$, $n = 1$, $m + n = 3$ und s_M daher gegeben durch:

$$s_M = 3\,1A_2 1\mathrm{L}A_1 0\,\mathrm{N}\,\mathrm{HALT}\,0\,\mathrm{R}\,A_1 0\,\mathrm{N}$$

Für zwei Zeichenfolgen s und s' schreiben wir $s < s'$ g. d. w. s lexikographisch vor s' steht. Zum Beispiel gilt:

$$1\,0A_1 0\,\mathrm{R} < 2\,1A_1 0\,\mathrm{R}\,A_1 1\,\mathrm{R} < 2\,1A_1 1\mathrm{L}A_1 0\,\mathrm{R} < 2\,1A_1 1\,\mathrm{R}\,A_1 0\mathrm{L}$$

Wir ordnen nun die Turingmaschinen mit $Q = \{\,\mathrm{HALT}, A_1, \ldots, A_m\}$ und $\Gamma = \{0, \ldots, n\}$ so, dass für je zwei Maschinen M und M' die Maschine M in unserer Liste vor M' erscheint g. d. w. $s_M < s_{M'}$.[45] Wir nummerieren die Maschinen in unserer Liste der Reihe nach und schreiben dafür $M_0, M_1, M_2, \ldots$. Zum Beispiel ist M_0 durch $Q = \{\mathrm{HALT}\}$, $\Gamma = \{0\}$ und die leere Übergangstabelle gegeben. M_1 ist durch $Q = \{\mathrm{HALT}, A_1\}$, $\Gamma = \{0\}$ und die Übergangstabelle $A_1\,0$ HALT $0\,\mathrm{L}$ gegeben. (Wodurch sind M_2, M_3, M_4 gegeben?) Für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ definieren wir

$$a_i := \begin{cases} 1, & \text{falls } M_i \text{ für das leere Eingabewort irgendwann hält,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ gilt $0 \leq a_i 2^{-i} \leq 2^{-i}$. Da die geometrische Reihe konvergiert, konvergiert daher auch die Reihe $\left(\sum_{i=0}^{k} a_i 2^{-i}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$. Wir definieren die reelle Zahl H als den Limes dieser Reihe, d. h.

$$H := \sum_{i=0}^{\infty} a_i 2^{-i} = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{k} a_i 2^{-i}. \tag{6.126}$$

Es gilt $H \leq \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} = 2$.

Satz. *Die Zahl H ist nicht berechenbar.*

Dieser Satz folgt daraus, dass das Halteproblem nicht entscheidbar ist. (Siehe [Sip12, Theorem 5.1].) Es gibt also keine Turingmaschine, die für jeden gegebenen Index n die n-te Binärstelle von H nach dem Radixpunkt berechnet. Wegen Bemerkung 6.60(ii) gibt es somit auch kein C++ Programm, welches H berechnet.

Bemerkungen. [die nicht berechenbare Zahl H]

- Die in (6.126) definierte Zahl H ist nicht einmal *näherungsweise* berechenbar. Damit meinen wir, dass es keine Turingmaschine gibt, die für ein gegebenes rationales $\varepsilon > 0$ eine rationale Zahl r berechnet so, dass $|H - r| \leq \varepsilon$. In diesem Beispiel versagt also auch jede numerische Methode.
- Die Zahl H enthält die Information über eine Variante des Halteproblems. (Siehe [Sip12, p. 216].) Dieses spielt eine wichtige Rolle in der theoretischen Informatik.

[45] Das legt die Ordnung eindeutig fest.

6.9 Integration und gleichmässiger Limes, gliedweise Integration einer Potenzreihe

Dieser Abschnitt entspricht [Stra, 6.3, Korollare 6.3.2, 6.3.3]. Seien I ein Intervall und $f, f_m : I \to \mathbb{C}$ für $m \in \mathbb{N}_0$ Riemann-integrierbare Funktionen.

Proposition 6.63 (Integral eines gleichmässigen Limes)**.** *Falls die Folge $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ gleichmässig gegen f konvergiert, dann konvergiert die Folge der Integrale $\left(\int_I f_m\right)_{m\in\mathbb{N}_0}$ gegen das Integral $\int_I f$.*

Beweis: [Stra, Korollar 6.3.2., S. 137]

Bemerkung. Der Beweis beruht auf der Abschätzung $|\int_I f| \leq \int_I |f|$ (Proposition 6.12(vi)) und auf Monotonie des Integrierens (Proposition 6.12(iv)).

Aus Proposition 6.63 folgt, dass jede durch eine Potenzreihe definierte Funktion auf jedem kompakten in der Konvergenzkreisscheibe enthaltenen Intervall integrierbar ist mit Integral gegeben durch gliedweise Integration. Das ist der Inhalt des folgenden Korollars. Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und ρ der zugehörige Konvergenzradius (wie in Definition 3.27). Wir definieren die Funktion

$$f :]-\rho, \rho[\to \mathbb{C}, \qquad f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} c_k x^k.$$

Seien $a, b \in]-\rho, \rho[$.

Korollar 6.64 (durch Potenzreihe definierte Funktion ist gliedweise integrierbar)**.** *Es gilt*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{k+1} \left(b^{k+1} - a^{k+1}\right) \to \int_a^b f \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Bemerkungen.

- Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\frac{1}{k+1} \left(b^{k+1} - a^{k+1}\right) = \frac{x^{k+1}}{k+1}\bigg|_{x=a}^{b} = \int_a^b x^k dx, \tag{6.127}$$

wobei wir in der zweiten Gleichheit Beispiel 5.12(ii) und den zweiten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung verwendet haben. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \, dx &= \int_a^b f \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{k+1} \left(b^{k+1} - a^{k+1}\right) \qquad \text{(gemäss Korollar 6.64)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_a^b c_k x^k \, dx \,\text{(wegen Linearität der Integration und (6.127))} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b c_k x^k \, dx.\end{aligned}$$

Das bedeutet, dass wir eine Potenzreihe gliedweise integrieren dürfen.

Beweis des Korollars 6.64: Fall $a \leq b$: Für $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir

$$f_n : [a,b] \to \mathbb{C}, \qquad f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} c_k x^k.$$

Gemäss Proposition 4.58 konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf $[a,b]$ gleichmässig gegen f. Gemäss Proposition 6.63 gilt daher

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{k+1} \left(b^{k+1} - a^{k+1}\right) = \int_a^b f_n \to \int_a^b f \qquad (n \to \infty).$$

Der Fall $a > b$ kann analog behandelt werden. Das schliesst den Beweis von Korollar 6.64 ab. □

Beispiel. [durch Potenzreihe definierte Funktion ist gliedweise integrierbar, Potenzreihe für Logarithmus] Wir betrachten die *geometrische Reihe*, d. h. die zur Folge $(c_k := 1)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gehörige Potenzreihe, also die Abbildung $x \mapsto \left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Der zugehörige Konvergenzradius ist gegeben durch

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|1|}} = 1.$$

Die durch die geometrische Reihe definierte Funktion einer reellen Variable ist

$$f : \left]-\rho = -1, \rho = 1\right[\to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

Sei $x \in]-1,1[$. Gemäss Beispiel 6.27(ii) gilt

$$\begin{aligned}
\log(1-x) &= \log(1-x) - \log(1) \\
&= -\int_0^x \frac{1}{1-y} dy \\
&= -\int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} y^k \, dy \qquad \text{(gemäss Beispiel 3.9(iii))} \\
&= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1} - 0^{k+1}}{k+1} \qquad \text{(gemäss Korollar 6.64)} \\
&= -\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{x^\ell}{\ell}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k, \qquad \forall x \in]-1,1[. \tag{6.128}$$

Das ist eine Darstellung der Funktion $\log(1+\bullet)$ als punktweiser Limes einer Potenzreihe. Aus Beispiel 5.42(ii) folgt daher, dass $\left(\sum_{\ell=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \bullet^k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Taylorreihe von $\log(1+\bullet)$ um den Punkt $x_0 = 0$ ist. (Wir können diese Taylorreihe auch direkt berechnen.)

Wir kommen jetzt auf die Frage 3.36 nach dem Grenzwert der alternierenden Reihe zurück. Indem wir $x = 1$ in (6.128) einsetzen, erhalten wir für diesen Grenzwert heuristisch

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \mp \cdots = \log 2. \tag{6.129}$$

Diese Schlussfolgerung ist mathematisch nicht präzise, da wir die Gleichheit (6.128) nur für $x \in]-1,1[$ gezeigt haben. Sie stimmt allerdings tatsächlich auch für $x = 1$. Das folgt aus dem folgenden Satz. Seien $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und $r \in]0,\infty[$.

Satz 6.65 (Grenzwertsatz von Abel)**.** *Falls die Reihe* $\left(\sum_{k=0}^{n} c_k r^k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *konvergiert, dann gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \to \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k \qquad \textit{für } x \nearrow r. \tag{6.130}$$

Beweis: [Wal97, 7.12 Der Grenzwertsatz von Abel, S. 149] [46]

[46] In diesem Satz wird angenommen, dass r durch den zur Koeffizientenfolge $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gehörigen Konvergenzradius ρ gegeben ist. Falls $\rho > r$, dann gilt die Aussage des Satzes 6.65 gemäss Korollar 4.62.

Bemerkung. [Grenzwertsatz von Abel] Wir schreiben ρ für den zur Koeffizientenfolge $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gehörigen Konvergenzradius. Aus der Voraussetzung, dass die Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} c_k r^k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert, und aus Korollar 3.29(ii) folgt, dass $\rho \geq r$. Daher ist die linke Seite von (6.130) für jedes $x \in [0, r]$ sinnvoll.

Beispiel 6.66. [Potenzreihe für Logarithmus, Grenzwert der alternierenden Reihe] Wir betrachten $c_k := \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ für $k \in \mathbb{N}$. Gemäss Beispiel 3.34 konvergiert die alternierende harmonische Reihe $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Aus Satz 6.65 mit $r = 1$ folgt daher, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \to \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot 1^k \qquad \text{für } x \nearrow 1.$$

Die linke Seite ist durch (6.128) gegeben. Da $\log(1+\bullet)$ im Punkt $x = 1$ stetig ist, folgt, dass

$$\log(1+1) = \lim_{x\nearrow 1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Das beweist die Gleichheit (6.129).

Alternativer Beweis dieser Gleichheit ohne den Satz 6.65: Wir definieren

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}, \tag{6.131}$$

$$I_n := (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx. \tag{6.132}$$

Sei $x \in]-1, \infty[$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\big(\log(1+\bullet)\big)'(x) =& \frac{1}{1+x} \qquad \text{(gemäss (5.29) und der Kettenregel)} \\
=& \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+x} \qquad \text{(gemäss (3.10))}, \qquad (6.133) \\
\log 2 =& \log(1+1) - \log 1 \\
=& \int_0^1 \big(\log(1+\bullet)\big)' \qquad \text{(gemäss dem zweiten Hauptsatz)} \\
=& \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 x^k dx + I_n \\
& \text{(wegen (6.133), Linearität der Integration und (6.132))} \\
=& \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left. \frac{x^{k+1}}{k+1} \right|_{x=0}^{1} + I_n \\
=& s_n + I_n \qquad \text{(gemäss (6.131))}. \qquad (6.134)
\end{aligned}$$

Für jedes $x \in [0,1]$ gilt $\frac{1}{1+x} \leq 1$. Mittels (6.132) und Monotonie der Integration folgt daraus, dass

$$|I_n| \leq \int_0^1 x^{n+1} dx = \left. \frac{x^{n+2}}{n+2} \right|_{x=0}^{1} = \frac{1}{n+2} - 0.$$

Mittels (6.134) folgt, dass

$$s_n \to \log 2 \qquad \text{für} \qquad n \to \infty.$$

Das beweist die Gleichheit (6.129).

Somit haben wir nun Frage 3.36 beantwortet. Eine Variante dieser Frage ist die folgende.

Frage. *Was ist der Grenzwert der "ungeraden" alternierenden harmonischen Reihe, d. h. die folgende unendliche Summe?*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2j+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \mp \cdots$$

Wir können diese unendliche Summe analog zu Beispiel 6.66 berechnen. Siehe Übungsserie 14.

6.10 Uneigentliches Riemann-Integral, Beispiele: Gaußfunktion, Gammafunktion, Anwendung: Arbeit des elektrischen Feldes

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96b, 4.4] und [Stra, 6.4]. Um das uneigentliche Riemann-Integral zu definieren, benötigen wir Folgendes. Seien $X \subseteq \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$, $Y \subseteq \mathbb{R}^p$, $f : X \to Y$ und $y_0 \in \mathbb{R}^p$.

Definition 6.67 (Konvergenz und Grenzwert einer Funktion bei $\pm\infty$)**.** *(i) Wir nehmen an, dass X nach oben unbeschränkt ist. Wir sagen, dass f* bei ∞ gegen y_0 konvergiert *(oder dass $f(x)$* für $x \to \infty$ gegen y_0 konvergiert*) g. d. w.*

$$\forall \varepsilon \in]0, \infty[\exists x^* \in \mathbb{R} \, \forall x \in X : x \geq x^* \Rightarrow \big\| f(x) - y_0 \big\| \leq \varepsilon. \tag{6.135}$$

In diesem Fall nennen wir y_0 den Grenzwert von f bei ∞ *und schreiben*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) := \lim_{\infty} f := y_0.$$

(ii) Wir nehmen an, dass X nach unten unbeschränkt ist. Wir sagen, dass f bei $-\infty$ gegen y_0 *konvergiert (oder dass $f(x)$* für $x \to -\infty$ gegen y_0 konvergiert*) g. d. w.*

$$\forall \varepsilon \in]0, \infty[\exists x^* \in \mathbb{R} \, \forall x \in X : x \leq x^* \Rightarrow \big\| f(x) - y_0 \big\| \leq \varepsilon. \tag{6.136}$$

In diesem Fall nennen wir y_0 den Grenzwert von f bei $-\infty$ *und schreiben*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) := \lim_{-\infty} f := y_0.$$

Beispiele. [Konvergenz und Grenzwert einer Funktion bei $\pm\infty$]

(i) Wir betrachten die Funktion

$$f := p_{-1} : X := \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{1}{x}.$$

Diese Funktion konvergiert bei ∞ gegen $y_0 := 0$. (Überprüfen Sie das!) Es gilt also

$$\lim_{\infty} f = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Die Funktion konvergiert auch bei $-\infty$ gegen $y_0 := 0$.

(ii) Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := e^{-x},$$

konvergiert bei ∞ gegen $y_0 := 0$, also

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x} = 0.$$

Definition 6.68 (uneigentliche Riemann-Integrierbarkeit, uneigentliches Riemann-Integral). *(i) Seien $a_- \in \mathbb{R}$, $a_+ \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ so, dass $a_- < a_+$, und $f : [a_-, a_+[\to \mathbb{R}$. Wir nennen f* uneigentlich Riemann-integrierbar *g. d. w. f eingeschränkt auf jedes kompakte Teilintervall von $[a_-, a_+[$ eigentlich Riemann-integrierbar ist und*

$$\int_{a_-}^{x_+} f \text{ für } x_+ \nearrow a_+ \text{ konvergiert.}^{47}$$

In diesem Fall definieren wir das uneigentliche Integral von f *als*

$$\int_{a_-}^{a_+} f := \lim_{x_+ \nearrow a_+} \int_{a_-}^{x_+} f. \tag{6.137}$$

(ii) Seien $a_- \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $a_+ \in \mathbb{R}$ so, dass $a_- < a_+$, und $f :]a_-, a_+] \to \mathbb{R}$. Wir definieren uneigentliche Riemann-Integrierbarkeit *und das* uneigentliche Integral von f *analog zu (i).*

(iii) Seien $a_-, a_+ \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ so, dass $a_- < a_+$, und $f :]a_-, a_+[\to \mathbb{R}$. Wir nennen f uneigentlich Riemann-integrierbar *g. d. w. es ein $b \in]a_-, a_+[$ gibt so, dass $f|_{[b,a_+[}$ und $f|_{]a_-,b]}$ uneigentlich Riemann-integrierbar sind. In diesem Fall definieren wir das* uneigentliche Integral von f *als*

$$\int_{a_-}^{a_+} f := \int_{a_-}^{b} f + \int_{b}^{a_+} f, \tag{6.138}$$

wobei $b \in]a_-, a_+[$ beliebig ist.

Bemerkungen.

- Die rechte Seite von (6.138) hängt nicht von der Wahl von b ab.
- Falls $a_+ \in \mathbb{R}$, dann heisst (6.137) *uneigentliches Integral erster Gattung.* Falls $a_+ = \infty$, dann heisst (6.137) *uneigentliches Integral zweiter Gattung.*

Beispiele 6.69. [uneigentliche Riemann-Integrierbarkeit, uneigentliches Riemann-Integral]

(i) Sei $a \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Funktion $p_a :]0, 1] \to \mathbb{R}$, $p_a(x) := x^a$. Für jedes $x_- \in]0, 1]$ gilt

$$\int_{x_-}^{1} p_a = \begin{cases} \left.\dfrac{p_{a+1}}{a+1}\right|_{x_-}^{1} = \dfrac{1 - x_-^{a+1}}{a+1}, & \text{falls } a \neq -1, \\ \log|_{x_-}^{1} = 0 - \log x_-, & \text{falls } a = -1. \end{cases}$$

[47] Im Fall $a_+ = \infty$ ist diese Konvergenz wie in Definition 6.67 definiert. Wir schreiben dann *für $x_+ \to a_+$* statt *für $x_+ \nearrow a_+$*.

Fall $a > -1$: Dann ist p_a auf $]0,1]$ uneigentlich Riemann-integrierbar mit

$$\int_0^1 p_a = \int_0^1 x^a \, dx = \lim_{x_- \searrow 0} \frac{1 - x_-^{a+1}}{a+1} = \frac{1}{a+1}.$$

Fall $a \leq -1$: Dann ist p_a auf $]0,1]$ nicht uneigentlich Riemann-integrierbar, da die Funktion $x_- \mapsto \int_{x_-}^1 p_a$ in diesem Fall divergiert. (Überprüfen Sie das!)

(ii) Sei $a \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Funktion $p_a : [1, \infty[\to \mathbb{R}$, $p_a(x) := x^a$. Für jedes $x_+ \in [1, \infty[$ gilt

$$\int_1^{x_+} p_a = \begin{cases} \left. \frac{p_{a+1}}{a+1} \right|_1^{x_+} = \frac{x_+^{a+1} - 1}{a+1}, & \text{falls } a \neq -1, \\ \log|_1^{x_+} = \log x_+ - 0, & \text{falls } a = -1. \end{cases}$$

Fall $a < -1$: Dann konvergiert x_+^{a+1} für $x_+ \to \infty$ gegen 0. (Überprüfen Sie das!) Daher ist p_a auf $[1, \infty[$ uneigentlich Riemann-integrierbar mit

$$\int_1^\infty p_a = \int_1^\infty x^a \, dx = \lim_{x_+ \nearrow \infty} \frac{x_+^{a+1} - 1}{a+1} = -\frac{1}{a+1} > 0.$$

Hierbei verwenden wir Definition 6.67(i).

Fall $a \geq -1$: Für $x_+ \to \infty$ divergiert dann x_+^{a+1} und somit $\int_1^{x_+} p_a$. (Überprüfen Sie das!) Daher ist p_a auf $[1, \infty[$ nicht uneigentlich Riemann-integrierbar.

Beispiel 6.70. [bestimmtes Integral der Gaußfunktion] Wir betrachten die Gaußfunktion (gaußsche Glockenkurve)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := e^{-x^2},$$

siehe Abbildung 6.6. Diese Funktion ist uneigentlich Riemann-integrierbar mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx < 3. \tag{6.139}$$

Das folgt aus der Abschätzung $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ für $x \in [1, \infty[$, Monotonie der Integration und Gebietsadditivität. (Siehe Übungsserie 14.)

Bemerkungen. [bestimmtes Integral der Gaußfunktion]

- In Beispiel 10.29 werden wir das Integral (6.139) mit Hilfe des bestimmten Integrals der zweidimensionalen Gaußfunktion und der Substitutionsregel berechnen.

- Die Gaußfunktion spielt eine wichtige Rolle in der Stochastik, wo sie als Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Normalverteilung auftritt. Siehe Bemerkung 6.52 und die Vorlesung *Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik* (ITET und RW: 4. Semester).

Im nächsten Beispiel kommt die Γ-Funktion vor. Diese Funktion verallgemeinert die Fakultätsfunktion. Um sie zu definieren, benötigen wir den folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz 6.71 (uneigentliche Integrierbarkeit einer Potenzfunktion mal eine abklingende Exponentialfunktion)**.** *Seien $a \in]-1, \infty[$ und $c \in]-\infty, 0[$. Die Funktion*

$$f := f_{a,c} :]0, \infty[\to \mathbb{R}, \qquad f(t) := t^a e^{ct},$$

ist uneigentlich Riemann-integrierbar.

Im Beweis dieses Hilfssatzes werden wir den folgenden Hilfssatz verwenden.

Hilfssatz 6.72 (Jede steigende Exponentialfunktion wächst schneller als jede Potenzfunktion.)**.** *Für alle $a \in \mathbb{R}$ und $c \in]-\infty, 0[$ gilt*

$$f_{a,c}(t) \to 0 \qquad \textit{für} \qquad t \to \infty.$$

Beweis: Übungsserie 14.

Beweis des Hilfssatzes 6.71:

Behauptung 1. *Die eingeschränkte Funktion $f\big|[1, \infty[$ ist uneigentlich Riemann-integrierbar.*

Beweis der Behauptung 1: Die Funktion f ist stetig. Daher ist sie auf jedem kompakten Teilintervall von $]0, \infty[$ beschränkt und daher darüber eigentlich Riemann-integrierbar. Gemäss Hilfssatz 6.72 gibt es eine Zahl $t_0 \in]0, \infty[$ so, dass

$$\forall t \in \mathbb{R} : t \geq t_0 \Rightarrow t^a e^{\frac{c}{2}t} \leq 1.$$

Es gilt

$$f(t) = t^a e^{\frac{c}{2}t} e^{\frac{c}{2}t} \leq 1 \cdot e^{\frac{c}{2}t}, \qquad \forall t \in [t_0, \infty[.$$

Daher gilt gemäss Satz 6.12(iv) (Monotonie der Integration) für jedes $t \in [t_0, \infty[$, dass

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} f &\leq \int_{t_0}^{t} e^{\frac{c}{2}s} ds \\
&= \frac{2}{c}\, e^{\frac{c}{2}s}\Big|_{s=t_0}^{t} \\
&= \frac{2}{c}\left(e^{\frac{c}{2}t} - e^{\frac{c}{2}t_0}\right) \\
&\to 0 - \frac{2}{c} e^{\frac{c}{2}t_0} \qquad \text{für } t \to \infty,
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, dass $c < 0$. (Überprüfen Sie diese Konvergenz!) Da $f \geq 0$, folgt, dass $\int_{t_0}^{t} f$ für $t \to \infty$ konvergiert. Es folgt, dass $f|[1, \infty[$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist. Das beweist Behauptung 1. □

Behauptung 2. *Die eingeschränkte Funktion $f|]0, 1]$ ist uneigentlich Riemann-integrierbar.*

Beweis der Behauptung 2: Da f stetig ist, ist es auf jedem kompakten Teilintervall von $]0, 1]$ eigentlich Riemann-integrierbar. Es gilt

$$0 \leq f(t) \leq p_a(t) = t^a, \qquad \forall t \in]0, 1].$$

Da $a > -1$, ist gemäss Beispiel 6.69(i) die Funktion p_a auf $]0, 1]$ uneigentlich Riemann-integrierbar. Mittels Satz 6.12(iv) (Monotonie der Integration) folgt, $\int_{x_-}^{1} f$ für $x_- \searrow 0$ konvergiert.Es folgt, dass $f|]0, 1]$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist. Das beweist Behauptung 2. □
Aus Behauptungen 1 und 2 folgt, dass f uneigentlich Riemann-integrierbar ist. Das beweist Hilfssatz 6.71. □

Definition 6.73 (Gammafunktion)**.** *Wir definieren die* Gammafunktion *als die Funktion*

$$\Gamma :]0, \infty[\to \mathbb{R}, \qquad \Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Bemerkung. [Gammafunktion] Gemäss Hilfssatz 6.71 existiert dieses uneigentliche Riemann-Integral. Die Funktion Γ ist daher wohldefiniert.

Proposition 6.74 (Gammafunktion)**.** *Es gilt*

$$\Gamma(1) = 1, \tag{6.140}$$

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x), \qquad x \in]0, \infty[. \tag{6.141}$$

Korollar 6.75. *Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$\Gamma(n + 1) = n!$$

Beweis: Das folgt aus Proposition 6.74 und Induktion. (Überprüfen Sie das!) □

Bemerkung. Gemäss diesem Korollar verallgemeinert $\Gamma(\bullet+1)$ also die Fakultätsfunktion.

Frage. *Was ist $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$?*

Diese Zahl kann mit Hilfe des Integrals der zweidimensionalen Gaußfunktion berechnet werden. (Siehe Analysis 2.)

Beweis der Proposition 6.74: (6.140): Es gilt

$$\int_0^{t_+} e^{-t}dt = -\,e^{-t}\big|_0^{t_+} = -e^{-t_+} + e^{-0}, \qquad \forall t_+ \in]0,\infty[$$

und daher

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty t^{1-1}e^{-t}dt = \lim_{t_+\to\infty}\int_0^{t_+} e^{-t}dt = \lim_{t_+\to\infty}\big(-e^{-t_+}+1\big) = 1.$$

Das beweist (6.140).

(6.141): Seien $x \in]0,\infty[$ und $t_-, t_+ \in]0,\infty[$. Gemäss Satz 6.30, partielle Integration, mit $u(t) := t^x$, $v(t) := -e^{-t}$ gilt, dass

$$\int_{t_-}^1 t^x e^{-t}dt = -\,t^x e^{-t}\big|_{t_-}^1 + \int_{t_-}^1 xt^{x-1}e^{-t}dt \to -1^x e^{-1} + 0 + x\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt \qquad \text{für } t_- \to 0. \tag{6.142}$$

Analog gilt, dass

$$\begin{aligned}\int_1^{t_+} t^x e^{-t}dt &= -\,t^x e^{-t}\big|_{t=1}^{t_+} + \int_1^{t_+} xt^{x-1}e^{-t}dt \\ &\qquad () \\ &\to -\,0 + 1^x e^{-1} + x\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \quad \text{für } t_+ \to \infty \quad \text{(gemäss Hilfssatz 6.72).}\end{aligned} \tag{6.143}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^x e^{-t}dt \\ &= \int_0^1 t^x e^{-t}dt + \int_1^\infty t^x e^{-t}dt \\ &= -e^{-1} + x\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt + e^{-1} + x\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \qquad \text{(wegen (6.142,(6.143))} \\ &= x\Gamma(x).\end{aligned}$$

Das beweist (6.141) und schliesst den Beweis der Proposition 6.74 ab. □

Beispiel. [Anwendung des uneigentlichen Integrals: Arbeit des elektrischen Feldes] Wir betrachten zwei Teilchen, welche wir mit 0 und 1 bezeichnen und welche die Ladungen $q_0 > 0$ und $q_1 > 0$ besitzen. Wir bezeichnen mit t die Zeit. Zum Anfangszeitpunkt t_0 sind die beiden Teilchen in Ruhe und befinden sich im Abstand $r_0 > 0$. Da die Teilchen gleich geladen sind, stossen sie sich ab. Daher beginnen sich die Teilchen zu bewegen und fliegen immer weiter auseinander.

Problem: Man berechne die Gesamtarbeit, also die Arbeit, welche die elektrostatische Kraft asymptotisch für grosse Zeiten verrichtet.

Bemerkung: Diese Arbeit ist gleich der potentiellen Energie des Systems zum Anfangszeitpunkt.

Lösung: Die elektrostatische Kraft zwischen den Teilchen ist gemäss dem Coulomb-Gesetz gegeben durch

$$F(r) := \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q_1}{r^2}, \tag{6.144}$$

$$\text{wobei} \qquad \varepsilon_0 := \text{ elektrische Feldkonstante } \approx 9 \cdot 10^{-12}\mathrm{F\,m^{-1}},$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9 \cdot 10^{9}\mathrm{N\,m^2\,C^{-2}}.$$

Wir betrachten einen Zeitpunkt $t_1 \geq t_0$ und schreiben r_i für den Abstand zwischen den Teilchen zum Zeitpunkt t_i. Wir kürzen ab:

$$C := \frac{q_0 q_1}{4\pi\varepsilon_0}.$$

Die von t_0 bis t_1 verrichtete Arbeit ist gegeben durch

$$\begin{aligned} W &= \int_{r_0}^{r_1} F(r)\,dr \\ &= C\int_{r_0}^{r_1} r^{-2}\,dr \qquad \text{(gemäss (6.144))} \\ &= -Cr^{-1}|_{r=r_0}^{r_1} \\ &= C\left(-r_1^{-1} + r_0^{-1}\right). \end{aligned} \tag{6.145}$$

Asymptotisch für grosse Zeiten verrichtet die elektrostatische Kraft die Arbeit

$$\begin{aligned} W_\infty &= \int_{r_0}^{\infty} F(r)dr \\ &= \lim_{r_1\to\infty}\int_{r_0}^{r_1} F(r)\,dr \\ &= C\lim_{r_1\to\infty}\left(-r_1^{-1} + r_0^{-1}\right) \qquad \text{(gemäss (6.145))} \\ &= \frac{C}{r_0}. \end{aligned}$$

Diese asymptotische Arbeit ist also durch ein uneigentliches Integral zweiter Gattung gegeben.

Kapitel 7

Gewöhnliche Differentialgleichungen, Anwendungen in der Mechanik und Elektrotechnik

Dieses Kapitel entspricht [Bla96b, 2.1, 3.5, 3.6] und [Stra, 5.6, 5.7]. Grob gesagt, ist eine gewöhnliche Differentialgleichung eine Gleichung für eine gesuchte Funktion einer reellen Veränderlichen, in der die Funktion und ihre Ableitungen auftreten. Solche Gleichungen beschreiben zahlreiche physikalische und chemische Gesetze. Dabei spielt die gesuchte Funktion die Rolle einer physikalischen oder chemischen Grösse, die von der Zeit abhängt.

7.1 Gewöhnliche Differentialgleichung, Anfangswertproblem, Beispiele: gedämpfter Federschwinger, elektrischer Schwingkreis

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96b, 2.1, 3.5] und [Stra, 5.6]. Sei $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ und I ein offenes Intervall. (I kann beschränkt oder unbeschränkt sein.) Wir bezeichnen die Variable in $\mathbb{R}$ mit t, verwenden die Notation $\dot{u} = u'$ für die Ableitung einer Funktion u [1] und schreiben $u^{(k)}$ für die k-te Ableitung von u.

Definition. *Eine* gewöhnliche Differentialgleichung (GDG) *der Ordnung n für eine Funktion $u : I \to \mathbb{R}$ ist eine Gleichung der Form*

$$\varphi\big(t, u(t), \dot{u}(t), \ldots, u^{(n)}(t)\big) = 0, \qquad \forall t \in I, \tag{7.1}$$

[1] Diese Notation ist in der Physik gebräuchlich, falls die Variable t die Rolle der Zeit spielt.

wobei $\varphi : I \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ eine feste Funktion ist, die nicht bezüglich der letzten Variable konstant ist.

Analog definieren wir den Begriff einer GDG für eine Funktion $u : I \to \mathbb{C}$, indem wir oben überall $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$ ersetzen.[2]

Beispiele 7.1. [gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung, radioaktiver Zerfall] Wir betrachten den Fall $n = 1$.

(i) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und die Funktion $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\varphi\big(t, x_0, x_1\big) := x_1 - f(t).$$

Gemäss 7.1 entspricht diese Funktion der GDG

$$\begin{aligned} \varphi\big(t, u(t), \dot{u}(t)\big) = \dot{u}(t) - f(t) = 0, \, \forall t \in \mathbb{R}, \\ \text{d. h. } \dot{u}(t) = f(t), \, \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Aus dem ersten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt, dass für jede Konstante $c \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$u(t) = \int_0^t f(s)\, ds + c$$

die Gleichung (7.2) löst. Aus dem Mittelwertsatz folgt, dass das die einzigen Lösungen dieser Gleichung sind. (Siehe Korollar 5.16(i). Alternativ folgt das auch aus dem zweiten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.)

(ii) Sei $a_0 \in \mathbb{R}$ und die Funktion $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\varphi\big(t, x_0, x_1\big) := x_1 + a_0 x_0.$$

Gemäss 7.1 entspricht diese Funktion der GDG

$$\begin{aligned} \varphi\big(t, u(t), \dot{u}(t)\big) = \dot{u}(t) + a_0 u(t) = 0, \, \forall t \in \mathbb{R}, \\ \text{d. h. } \dot{u} = -a_0 u. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Diese GDG beschreibt zum Beispiel radioaktiven Zerfall. Dabei spielen t, u, a_0 folgende Rollen:

$t :=$ Zeit

$u(t) :=$ Anzahl Atome eines bestimmten Elementes, die zur Zeit t noch nicht zerfallen sind

[2] Das Intervall I bleibt dabei unverändert.

$a_0 :=$ Zerfallskonstante ($a_0 > 0$)

Die allgemeine Lösung der GDG (7.3) ist gegeben durch

$$u(t) = ce^{-a_0 t},$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist. Dass diese Funktion die Gleichung (7.3) löst, folgt durch Nachrechnen. (Rechnen Sie das nach!) Dass sie die einzige Lösung der Gleichung ist, haben wir in Beispiel 5.18 gesehen. $\triangle$ [3]

Bemerkung. [Anfangsbedingung] Sei $u_0 \in \mathbb{R}$. Die Konstante c im Beispiel 7.1(ii) wird eindeutig durch die *Anfangsbedingung*

$$u(0) = u_0$$

festgelegt. Es gilt nämlich $c = u_0$, d. h. $u(t) := u_0 e^{-a_0 t}$ ist die eindeutige Lösung des *Anfangswertproblems*

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -a_0 u, \\ u(0) &= u_0. \end{aligned}$$

$\triangle$

Beispiel. [keine GDG] Die Gleichung

$$\dot{u}(t) = u(t-1)$$

ist keine GDG[4], da sich das Argument $t-1$ der Funktion auf der rechten Seite vom Argument t der Funktion auf der linken Seite unterscheidet. Die Gleichung ist eine *retardierte Differentialgleichung* (english: *delayed differential equation*). $\triangle$

Im Folgenden betrachten wir ein Beispiel aus der Mechanik. Für eine ausführlichere Beschreibung dieses Beispiels siehe [Pap15, 4.1 Mechanische Schwingungen, S. 417].

Beispiel 7.2. [gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung, freier gedämpfter Federschwinger] Wir betrachten den Fall $n = 2$. Seien $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ und die Funktion $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\varphi\big(t, x_0, x_1, x_2\big) := x_2 + a_1 x_1 + a_0 x_0.$$

Gemäss 7.1 entspricht diese Funktion der GDG

$$\varphi\big(t, u(t), \dot{u}(t), \ddot{u}(t)\big) = \ddot{u}(t) + a_1 \dot{u}(t) + a_0 u(t) = 0, \ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{7.4}$$

[3] Mit diesem Zeichen wird das Ende eines Beispiels oder einer Bemerkung angedeutet.

[4] im Sinne dieser Vorlesung

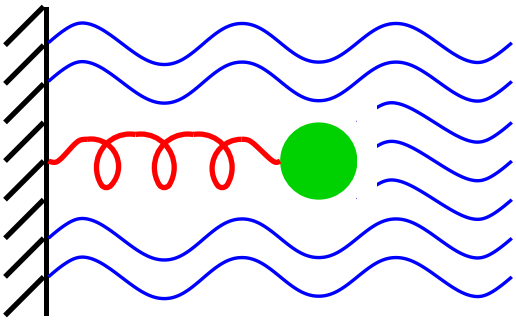


Abbildung 7.1: Federschwinger in einer zähen Flüssigkeit

Diese GDG beschreibt zum Beispiel die Bewegung eines freien[5] Federschwingers (=Federpendel), der in einer zähen Flüssigkeit liegt und daher durch viskose Reibung gedämpft wird. Damit meinen wir das mechanische System, das aus einem kugelförmigen Körper besteht, der über eine horizontale Feder an einer ruhenden Wand befestigt ist und in einer zähen Flüssigkeit liegt. Siehe Abbildung 7.1. Wir leiten die GDG (7.4) mittels Gesetzen der Mechanik und der Strömungslehre her. Wir schreiben:

$t :=$ Zeit

$x(t) :=$ Auslenkung des Körpers aus der Ruhelage zur Zeit t (= gesuchte Grösse)

$\mathbf{F}_0 :=$ Rückstellkraft der Feder

$\mathbf{F}_R :=$ durch die Viskosität der Flüssigkeit verursachte Reibungskraft

$\mathbf{F} :=$ gesamte auf den Körper einwirkende Kraft

$k :=$ Federkonstante

$c :=$ Dämpfungskonstante der Flüssigkeit

$m :=$ Masse des Körpers

Es gelten folgende Gesetze der Mechanik und der Strömungslehre:

- Hookesches Gesetz:
$$\mathbf{F}_0 = -kx$$
- Stokessches Reibungsgesetz:
$$\mathbf{F}_R = -c\dot{x}$$
- zweites Newtonsches Gesetz:
$$\mathbf{F} = m\ddot{x}.$$

[5]Frei bedeutet, dass es keine äussere Anregungskraft gibt.

Diese Gesetze werden in den Vorlesungen *Technische Mechanik* (ITET, 1. Semester), *Physik I* (RW, 1. Semester) und *Fluiddynamik I* (RW, 4. Semester, Grundlagenfach) behandelt. Durch Kombinieren dieser Gesetze erhalten wir

$$\begin{aligned} m\ddot{x} = \mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_R = -kx - c\dot{x}, \\ \text{also} \quad \ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Wir erhalten also die GDG (7.4) mit $a_0 = \frac{k}{m}$ und $a_1 = \frac{c}{m}$.

Wir betrachten jetzt den Fall eines idealen (d. h. ungedämpften) Federschwingers. Das bedeutet, dass $c = 0$.Wir nehmen an, dass $k, m > 0$. Wir definieren

$$\omega_0 := \sqrt{a_0} = \sqrt{\frac{k}{m}} \in]0, \infty[.$$

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ löst die Funktion

$$x(t) := a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t) \tag{7.6}$$

in diesem Fall die GDG (7.4). (Überprüfen Sie das!) △

Bemerkungen. [gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung]

- Die Funktionen (7.6) sind die einzigen Lösungen der GDG $\ddot{u} + a_0 u = 0$. Das folgt aus Satz 7.6 und der Tatsache, dass die Funktionen $\cos(\omega_0 \bullet)$ und $\sin(\omega_0 \bullet)$ linear unabhängig sind.
- Wir werden eine Formel für die allgemeine Lösung der GDG (7.4) im allgemeinen Fall kennenlernen. (Siehe Proposition 7.9 in Abschnitt 7.2.)

Wir betrachten nun ein Beispiel aus der Elektrotechnik. Für eine ausführlichere Beschreibung dieses Beispiels siehe [Pap15, 4.2 Elektrische Schwingungen, S. 445].

Beispiel 7.3. [elektrischer Schwingkreis, freie und erzwungene gedämpfte Schwingung] In diesem Beispiel betrachten wir die elektrische Reihenschaltung, die aus einem Widerstand, einem Kondensator und einer Spule besteht, die hintereinandergeschaltet sind. Wir betrachten zwei Typen realer (gedämpfter) Reihenschwingkreise:

(a) Freier Schwingkreis. Das ist die Schaltung, die wir aus der Reihenschaltung erhalten, indem wir ihre Enden miteinander verbinden. (Dadurch entsteht ein Kreis.) Siehe Abbildung 7.2.

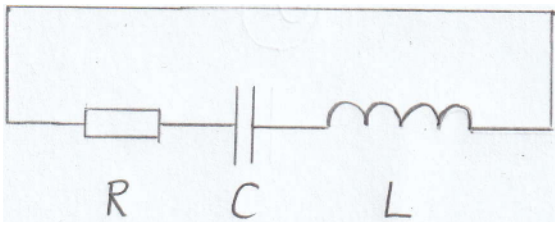


Abbildung 7.2: Freier Schwingkreis.

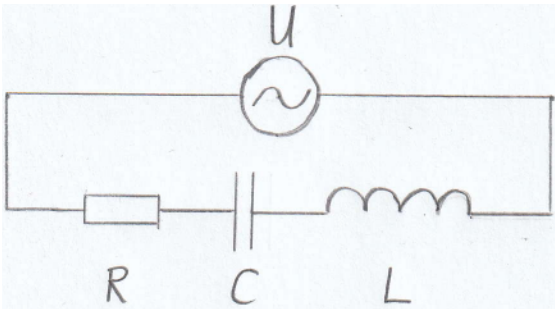


Abbildung 7.3: Schwingkreis mit Wechselspannungsquelle. Die angelegte Spannung erzwingt eine Schwingung.

(b) Schwingkreis mit Wechselspannungsquelle. Das ist die Schaltung, die durch die Reihenschaltung entsteht, indem wir ihre Enden mit einer Wechselspannungsquelle verbinden. Siehe Abbildung 7.3.

Probleme:

(i) **(Freie Schwingung:)** Beschreibe die Schwingungen der Stromstärke im freien Schwingkreis (a).

(ii) **(Erzwungene Schwingung:)** Beschreibe die durch die angelegte Spannung erzeugte zeitabhängige Stromstärke I des Stroms, der durch die Schaltung (b) fliesst!

Bemerkungen:

- Diejenigen von Ihnen, die ITET studieren, haben elektrische Schaltungen in der Vorlesung *Netzwerke und Schaltungen I* kennengelernt. Sie werden sie noch gründlicher in der Vorlesung *Netzwerke und Schaltungen II* untersuchen.
- Das 1. Kirchhoffsche Gesetz (Knotenregel) besagt, dass in einem Knotenpunkt eines elektrischen Netzwerkes die Summe der zufliessenden Ströme gleich der Summe der abfliessenden Ströme ist. (Siehe *Netzwerke und Schaltungen II.*) Da wir eine Reihenschaltung betrachten, ist die Stromstärke daher an jedem Punkt der Schaltung gleich. Es ist daher sinnvoll, von *der* Stromstärke des durch die Schaltung fliessenden Stromes zu sprechen.
- Der freie Schwingkreis (a) entspricht dem Spezialfall des Schwingkreises mit Wechselspannungsquelle, in dem die angelegte Spannung konstant gleich null ist.

Um die Schwingungen des freien Schwingkreises zu beschreiben, reicht es daher, den Schwingkreis mit Wechselspannungsquelle zu beschreiben.

- Zu Problem (ii): Mit der erzeugten Stromstärke meinen wir die nach einer Einschwingphase erzeugte Stromstärke. Wir betrachten die angelegte Spannung als ein Eingangssignal und die erzeugte Stromstärke als ein Ausgangssignal. Unser Ziel ist es also, das Ausgangssignal in Abhängigkeit vom Eingangssignal zu berechnen.

  Wir werden Problem (ii) für eine angelegte Spannung lösen, die eine Kosinusfunktion der Zeit ist. (Siehe Beispiel 7.13, S. 352.) Wie wir sehen werden, erzwingt die Spannung in diesem Fall eine kosinusförmige Schwingung der Stromstärke mit der gleichen Frequenz.

Wir betrachten jetzt den Schwingkreis mit Wechselspannungsquelle (b). Wir werden das Problem (ii) mittels der zwei folgenden Schritte lösen:

1. Mittels Gesetzen der Elektrotechnik leiten wir eine gewöhnliche Differentialgleichung für die Ladung Q des Kondensators her.
2. Wir lösen die GDG und erhalten Q. Die gesuchte Stromstärke ist die Zeitableitung von Q.

Schritt 1: Wir schreiben:

- $Q :=$ Ladung des Kondensators
- $I :=$ Stromstärke
- $U :=$ angelegte elektrische Spannung
- $U_x :=$ Spannungsabfall an $x = C, R, L$, also $U_C :=$ Spannungsabfall am Kondensator C, etc.
- $C :=$ Kapazität des Kondensators
- $R :=$ elektrischer Widerstand des Widerstands (Bauelement)
- $L :=$ Induktivität der Spule

Es gelten folgende Gesetze der Elektrotechnik (siehe *Netzwerke und Schaltungen I und II*):

- Aus der Ladungserhaltung folgt, dass die Stromstärke die Zeitableitung der Ladung des Kondensators ist, also
$$I = \dot{Q}. \tag{7.7}$$

- Kondensatorformel:
$$Q = CU_C \tag{7.8}$$
Das folgt aus dem Gaußschen Gesetz der Elektrostatik. (Siehe *Elektromagnetische Felder und Wellen.*)

- ohmsches Gesetz:
$$U_R = RI \tag{7.9}$$

- Spulengleichung:
$$U_L = L\dot{I} \tag{7.10}$$
Diese Gleichung folgt aus dem Induktionsgesetz von Faraday und dem Ampèreschen Gesetz. (Siehe *Elektromagnetische Felder und Wellen.*)

- 2. Kirchhoffsche Gesetz = Maschenregel: Alle Teilspannungen einer Masche in einem elektrischen Netzwerk addieren sich zu null. Daraus folgt, dass
$$U_L + U_R + U_C = U. \tag{7.11}$$

Indem wir (7.11,7.8,7.9,7.7,7.10) kombinieren, erhalten wir

$$\begin{aligned} L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q &= U, \\ \text{d. h.} \quad \ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \frac{1}{CL}Q &= \frac{U}{L}. \end{aligned} \tag{7.12}$$

Wir erhalten also die GDG (7.4) für die Ladung $u = Q$ mit $a_0 = \frac{1}{CL}$ und $a_1 = \frac{R}{L}$. Somit haben wir Schritt 1 ausgeführt (Aufstellen einer GDG für Q). Schritt 2 (Lösen der GDG) werden wir im Fall $U \equiv 0$ in Proposition 7.9 in Abschnitt 7.2 ausführen und im Fall einer kosinusförmigen Spannung U in Abschnitt 7.4 (siehe (7.45), S. 353). △

Bemerkung. [Federschwinger und elektrischer Schwingkreis] Durch Vergleich der in den Beispielen 7.2 und 7.3 verwendeten physikalischen Gesetze sehen wir, dass ein freier Federschwinger und ein freier elektrischer Schwingkreis analog beschrieben werden können.Die physikalischen Grössen der beiden Systeme entsprechen einander gemäss folgender Tabelle:

Auslenkung	x	Q	Ladung des Kondensators
Geschwindigkeit	v	I	Stromstärke
− Rückstellkraft	$-\mathbf{F}_0$	U_C	Spannung am Kondensator
− Reibungskraft	$-\mathbf{F}_R$	U_R	Spannung am Widerstand
gesamte Kraft	$\mathbf{F}$	U_L	Spannung an der Spule
Federkonstante	k	$\frac{1}{C}$	Kehrwert der Kapazität des Kondensators
Dämpfungskonstante	c	R	Widerstand
Masse	m	L	Induktivität

(Ordnen Sie die in den Beispielen 7.2 und 7.3 gebrauchten physikalischen Gesetze einander zu!)

7.2 Linearität und Homogenität einer GDG, Superpositionsprinzip, Lösungsraum einer homogenen linearen GDG, charakteristisches Polynom einer GDG

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96b, 3.5, 3.6] und [Stra, 5.6]. Eine GDG heisst *linear* g. d. w. nach Verschieben von Termen die linke Seite der GDG durch eine Linearkombination der gesuchten Funktion und ihrer Ableitungen gegeben ist und die rechte Seite durch eine feste Funktion. Die folgende Definition macht das präzise. Sei I ein Intervall mit positiver Länge.

Definition (Linearität und Homogenität einer GDG)**.** *Wir nennen die GDG für eine reellwertige Funktion* linear *g. d. w. es Funktionen $a_i, f : I \to \mathbb{R}$ $(i = 0, \ldots, n)$ gibt so, dass die GDG nach Verschieben von Termen* [6] *gegeben ist durch*

$$\sum_{i=0}^{n} a_i u^{(i)} = f, \qquad d.\ h. \qquad \sum_{i=0}^{n} a_i(t) u^{(i)}(t) = f(t), \qquad \forall t \in I. \tag{7.13}$$

Wir definieren Linearität für eine GDG für eine komplexwertige Funktion analog.

Wir nehmen jetzt an, dass die GDG linear ist. Falls in der Darstellung (7.13) *die Funktion f konstant gleich 0 ist, dann heisst die GDG* homogen*, sonst* inhomogen*. Die Funktion f heisst die* Inhomogenität *(*Quellterm *oder* Störterm*) der GDG.*

In dieser Vorlesung befassen wir uns vor allem mit linearen GDG. Diese sind im Allgemeinen einfacher zu behandeln als nichtlineare GDG.

[6] von der linken Seite auf die rechte Seite oder umgekehrt

Beispiele. [(nicht-)lineare GDG, Homogenität]

- Die GDG aus den Beispielen 7.1, 7.2 und 7.3 sind alle linear. Die Gleichungen (7.3,7.4) (Beispiele 7.1(ii) und 7.2) sind homogen. Die Gleichungen (7.2,7.12) (Beispiele 7.1(i) und 7.3)sind inhomogen.

- Die GDG
$$\dot{u}(t) + t^2 u(t) = 0, \qquad \forall t \in I$$
ist linear.

- Die GDG erster Ordnung
$$\dot{u} = u^2$$
ist nichtlinear, da auf der rechten Seite die gesuchte Funktion u quadratisch vorkommt.

△

Bemerkung 7.4. [Linearität] Sei $\varphi : I \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ eine Funktion ist, die nicht bezüglich der letzten Variable konstant ist. Folgende Aussagen über eine GDG sind äquivalent:

(a) Die GDG (7.1) ist linear.

(b) Es gibt eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ so, dass die Abbildung $u \mapsto \varphi\big(\bullet, u, \dots, u^{(n)}\big) + f$ linear ist, d. h., die Bedingung (5.4) erfüllt.[7]

Die Implikation "(a) → (b)" folgt durch direktes Nachrechnen aus der Tatsache, dass Ableiten eine lineare Operation ist. (Überlegen Sie sich die Details!) △

Aus dieser Bemerkung folgt das Superpositionsprinzip. Um dieses zu formulieren, erinnern wir uns an Folgendes aus der linearen Algebra: Eine (endliche reelle) Linearkombination der Funktionen $u_1, \dots, u_\ell$ ist eine Funktion der Form $c_1 u_1 + \dots + c_\ell u_\ell$, wobei $c_1, \dots, c_\ell$ reelle Zahlen sind.

Bemerkungen 7.5. [Superpositionsprinzip]

[7] $\varphi\big(\bullet, u, \dots, u^{(n)}\big)$ bezeichnet die Funktion $t \mapsto \big(t, u(t), \dots, u^{(n)}(t)\big)$.

(i) Eine Version des *Superpositionsprinzips* besagt Folgendes.[8] Sei $\ell \in \mathbb{N}$ und für $k = 1, \dots, \ell$ seien $f_k : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $u_k : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der GDG (7.13) mit $f = f_k$ und $c_k \in \mathbb{R}$. Dann löst die Funktion $u := \sum_{k=1}^{\ell} c_k u_k$ die GDG (7.13) mit $f = \sum_{k=1}^{\ell} c_k f_k$. Das Superpositionsprinzip folgt aus Bemerkung 7.4.

(ii) Insbesondere löst jede Linearkombination von Lösungen der homogenen GDG

$$\sum_{i=0}^{n} a_i u^{(i)} = 0 \tag{7.14}$$

diese GDG ebenfalls.

(iii) Es gilt auch ein analoges Superpositionsprinzip für eine GDG für eine komplexwertige Funktion.

Folgender Satz beschreibt die Lösungsmenge der homogenen GDG (7.14). Der Beweis der ersten zwei Teilaussagen beruht auf Bemerkung 7.5. Seien I ein Intervall mit positiver Länge und $a_0, \dots, a_n : I \to \mathbb{C}$ Funktionen.

Satz 7.6 (Lösungsraum einer homogenen linearen GDG, Superpositionsprinzip)**.** *(i) Die Menge*

$$Z := \left\{ u \in C^n(I, \mathbb{C}) \;\middle|\; \sum_{i=0}^{n} a_i u^{(i)} = 0 \right\}$$

ist ein komplexer Vektorraum.

(ii) Die Menge

$$Z_{\mathbb{R}} := \left\{ u \in C^n(I, \mathbb{R}) \;\middle|\; \sum_{i=0}^{n} a_i u^{(i)} = 0 \right\}$$

ist ein reeller Vektorraum.

Wir nehmen nun an, dass die Funktionen $a_0, \dots, a_n$ stetig sind und dass a_n nirgends verschwindet.

(iii) Die (komplexe) Dimension von Z ist gegeben durch

$$\dim Z = n.$$

[8] In der Physik wird der Term *Superpositionsprinzip* für die verwandte Eigenschaft verwendet, dass die Wirkung einer Linearkombination von Anregungen eines Systems die entsprechende Linearkombination der Wirkungen der Anregungen ist.

(iv) Falls $a_0, \dots, a_n$ reellwertig sind, dann ist die (reelle) Dimension von $Z_{\mathbb{R}}$ ist gegeben durch

$$\dim Z_{\mathbb{R}} = n.$$

Beweis des Satzes 7.6: (i) folgt aus den folgenden Tatsachen:

- $C^n(\mathbb{R};\mathbb{C})$ ist ein komplexer Vektorraum.
- $u \equiv 0 \in C^n(\mathbb{R};\mathbb{C})$
- Superpositionsprinzip, siehe Bemerkung 7.5

(ii) folgt analog.

Aussagen ((iii),(iv)) folgen aus [Tes12, Theorem 3.13, p. 87]. (Im Fall konstanter Koeffizientenfunktionen $a_0, \dots, a_n$ stimmen diese Aussagen mit [Stra, Korollar 5.6.1, S. 108] überein.) □

Bemerkungen. [Lösungsraum einer homogenen linearen GDG, Superpositionsprinzip]

- Gemäss Satz 7.6(iii) ist die Dimension des Lösungsraums der homogenen GDG gleich dem Grad der GDG (7.14).
- Im Fall $n \geq 1$ folgt aus Satz 7.6(iii) insbesondere, dass die GDG (7.14) eine Lösung besitzt, die nicht konstant gleich 0 ist.

Beispiele. [Lösungsraum einer homogenen linearen GDG, Superpositionsprinzip]

- Die GDG

  $$\dot{u} - u = 0$$

  für eine Funktion $u : I \to \mathbb{C}$ ist linear und homogen. Gemäss Satz 7.6 ist ihr Lösungsraum Z ein komplexer Vektorraum der Dimension 1. Das haben wir auch schon in Beispiel 7.1(ii) gesehen. Gemäss diesem Beispiel ist der Lösungsraum nämlich gegeben durch

  $$Z = \{c \exp \mid c \in \mathbb{C}\}.$$

- Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung

  $$\ddot{u} = u \tag{7.15}$$

für eine Funktion $u : I \to \mathbb{C}$. Diese Gleichung ist linear und homogen, da wir sie durch Verschieben eines Terms umschreiben können als

$$1 \cdot \ddot{u} + (-1) \cdot u = 0$$

und sie dann die Form (7.13) hat. Gemäss Satz 7.6 ist der Lösungsraum Z dieser Gleichung ein komplexer Vektorraum der Dimension 2. Wir können diesen Raum wie folgt konkret beschreiben. Die Funktionen

$$u_1 := \exp, \qquad u_2 := \exp(-\bullet)$$

lösen die GDG (7.15). Gemäss Bemerkung 7.5 (Superpositionsprinzip) löst daher für alle $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ die Funktion

$$u := c_1 u_1 + c_2 u_2 = c_1 \exp + c_2 \exp(-\bullet)$$

ebenfalls die GDG (7.15). (Das folgt auch aus einer direkten Rechnung.) Die Funktionen u_1 und u_2 sind linear unabhängig. (Überprüfen Sie das!) Es folgt, dass

$$Z = \big\{ c_1 \exp + c_2 \exp(-\bullet) \,\big|\, c_1, c_2 \in \mathbb{C} \big\}.$$

- Sei $a_0 \in]0, \infty[$. Die GDG

$$\ddot{u} + a_0 u = 0 \tag{7.16}$$

für eine Funktion $u : I \to \mathbb{R}$ ist linear und homogen. Gemäss Satz 7.6 ist ihr reeller Lösungsraum $Z_{\mathbb{R}}$ ein reeller Vektorraum der Dimension 2. Wir können diesen Raum wie folgt konkret beschreiben. Wir definieren $\omega_0 := \sqrt{a_0}$. Die Funktionen

$$\cos(\omega_0 \bullet), \qquad \sin(\omega_0 \bullet)$$

lösen die GDG (7.16). Gemäss Bemerkung 7.5 (Superpositionsprinzip) löst daher für alle $a, b \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$u := a \cos(\omega_0 \bullet) + b \sin(\omega_0 \bullet)$$

ebenfalls die GDG (7.16). Die Funktionen $\cos(\omega_0 \bullet)$ und $\sin(\omega_0 \bullet)$ sind linear unabhängig. (Überprüfen Sie das!) Es folgt, dass

$$Z_{\mathbb{R}} = \big\{ a \cos(\omega_0 \bullet) + b \sin(\omega_0 \bullet) \,\big|\, a, b \in \mathbb{R} \big\}.$$

- Die GDG

$$\ddot{u}(t) = t u(t), \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

für eine Funktion $I \to \mathbb{R}$ ist linear und homogen. Gemäss Satz 7.6 ist ihr reeller Lösungsraum $Z_{\mathbb{R}}$ ein reeller Vektorraum der Dimension 2. Es gibt also eine *2-parametrige Schar* von Lösungen dieser Gleichung. Es gibt jedoch *keine* Formel

für die allgemeine Lösung der GDG. Siehe Beispiel 7.19. Man kann die Lösungen der GDG aber mit numerischen Methoden beliebig genau berechnen. Siehe das Fach *Numerische Methoden* (ITET, 4. Semester). Das Fach *Numerical Methods for Partial Differential Equations* (RW, Grundlagenfach, 4. Semester) behandelt numerische Verfahren für partielle Differentialgleichungen (siehe Analysis 3).

△

Bemerkung. [Superpositionsprinzip] Für eine *nicht*lineare GDG gilt das Superpositionsprinzip im Allgemeinen nicht. Ein Beispiel dafür ist die GDG

$$\dot{u} = u^2. \tag{7.17}$$

Die Funktion

$$u(t) := -\frac{1}{t}$$

löst die Gleichung (7.17). (Rechnen Sie das nach!) Wenn a eine reelle Zahl ist, dann löst au die GDG (7.17) nur in den Fällen $a = 0$ und $a = 1$. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} (au)^2 &= a^2u^2 \\ &= a^2\dot{u} \qquad \text{(da } u \text{ die GDG (7.17) löst)} \\ &= a(au)^{\cdot} \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist genau dann gleich $(au)^{\cdot}$, wenn $a = 0$ oder $a = 1$ ist. Das bedeutet, dass au die GDG (7.17) nur in diesen zwei Fällen löst. Daher gilt das Superpositionsprinzip für die GDG (7.17) nicht. △

Seien jetzt $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. Wir betrachten die homogene lineare GDG n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$u^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i u^{(i)} = u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + a_0 u = 0. \tag{7.18}$$

Um eine Lösung dieser GDG zu finden, machen wir den *eulerschen Ansatz*[9]

$$u(t) = u_\lambda(t) := e^{\lambda t}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{7.19}$$

Indem wir das in (7.18) einsetzen, erhalten wir

$$\left(\lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_k \lambda^i\right) e^{\lambda t} = 0, \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{7.20}$$

[9]Dieser Ansatz ist nach Leonhard Euler benannt, siehe Abbildung 3.5.

Definition (charakteristisches Polynom)**.** *Wir definieren das* charakteristische Polynom *der GDG* (7.18) *als die Funktion*

$$p(\lambda) := \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0.$$

Wenn u die GDG (7.18) löst, dann gilt wegen (7.20) mit $t = 0$ also insbesondere

$$0 = p(\lambda)e^{\lambda 0} = p(\lambda).$$

Umgekehrt löst für jede Nullstelle λ von p die Funktion u_λ (gegeben durch (7.19)) die GDG (7.18).

Beispiel 7.7. [charakteristisches Polynom, Lösungen der GDG] Das charakteristische Polynom der GDG

$$\ddot{u} - u = 0$$

ist gegeben durch

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 1.$$

Die Nullstellen dieses Polynoms sind $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$. Also lösen die Funktionen

$$u_1(t) = e^{1\cdot t}, \qquad u_{-1}(t) = e^{(-1)\cdot t}$$

die GDG (7.18).

Die Funktionen u_λ bilden eine Basis des Vektorraums der Lösungen der GDG, falls p nur einfache Nullstellen besitzt. Das folgt aus dem nächsten Satz, der die Lösungsmenge der GDG (7.18) beschreibt.

Seien $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, $\ell \in \mathbb{N}_0$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell \in \mathbb{C}$ die Nullstellen[10] des zugehörigen charakteristischen Polynoms p, und für $i = 1, \ldots, \ell$ sei m_i die Vielfachheit von λ_i.

Bemerkung. Wir können p also als folgendes Produkt schreiben:

$$p(\lambda) = \prod_{i=1}^{\ell} (\lambda - \lambda_i)^{m_i} := (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_\ell)^{m_\ell}.$$

Satz 7.8 (Basis für den Lösungsraum)**.** *Die Funktionen*

$$u_{ik}(t) := t^k e^{\lambda_i t}, \qquad 1 \le i \le \ell,\ 0 \le k < m_i$$

bilden eine Basis des komplexen Vektorraums

$$Z := \big\{ u \in C^n(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \,\big|\, u \text{ löst } (7.18) \big\}.$$

[10] Wir nehmen an, dass $\lambda_i \neq \lambda_j$, falls $i \neq j$.

Bemerkungen.

- Gemäss Satz 7.6 ist Z tatsächlich ein Vektorraum. Die Aussage des Satzes 7.8 ist daher sinnvoll.
- Eine Basis eines Vektorraums ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem. Satz 7.8 sagt also Folgendes:
  - Die Funktionen u_{ik} liegen in Z, d. h., sie lösen (7.18).
  - Die Funktionen u_{ik} sind linear unabhängig.
  - Jede Lösung der GDG (7.18) kann als eine Linearkombination der Funktionen u_{ik} geschrieben werden kann.

  Somit beschreibt der Satz die Lösungsmenge der GDG vollständig.

Beweis des Satzes 7.8: Seien $1 \leq i \leq \ell$ und $0 \leq k < m_i$. Wir zeigen, dass $u_{ik} \in Z$. Wir schreiben

$$D := \frac{d}{dt}, \qquad D^k := D \circ \cdots \circ D \ (k \text{ Operatoren } D), \qquad p(D) := D^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k.$$

Behauptung. *Es gilt*

$$p(D)u_{ik} = 0.$$

Beweis der Behauptung: [Stra, Beweis von Satz 5.6.3 i), S. 110]. Der Beweis beruht auf der Tatsache, dass $p(D) = \prod_i (D - \lambda_i \,\mathrm{id})^{m_i}$. □

Gemäss dieser Behauptung löst die Funktion u_{ik} also die GDG (7.18), d. h., $u_{ik} \in Z$, wie behauptet.

Lineare Unabhängigkeit der u_{ik}: [Stra, Beweis von Satz 5.6.3 ii), S. 111].

Die Funktionen u_{ik} erzeugen Z: Das folgt aus der Tatsache, dass die u_{ik} linear unabhängig sind, und ihre Anzahl gleich der Dimension von Z ist. (Gemäss [Stra, Korollar 5.6.1, S. 108] ist diese Dimension gleich n.)

Das beweist den Satz 7.8. □

Bemerkung. [Basis des Lösungsraums] Falls das charakteristische Polynoms p nur einfache Nullstellen besitzt, dann bilden die Funktionen

$$u_{\lambda_i}(t) = e^{\lambda_i t}, \qquad 1 \leq i \leq \ell$$

eine Basis des Lösungsraums Z. Das folgt unmittelbar aus Satz 7.8 und der Tatsache $u_{\lambda_i} = u_{i0}$.

Beispiele. • Wir betrachten die GDG

$$\ddot{u} - u = 0.$$

Das charakteristische Polynom dieser GDG ist $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$. Gemäss Beispiel 7.7 sind die Nullstellen dieses Polynoms gegeben durch $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$. Gemäss Satz 7.8 bilden die Funktionen

$$u_1(t) = e^t, \qquad u_{-1}(t) = e^{-t}$$

daher eine Basis des Lösungsraums Z der GDG. Insbesondere hat die allgemeine Lösung der GDG also die Form

$$u(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}, \qquad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

• Wir betrachten die GDG

$$\ddot{u} - 2\dot{u} + u = 0.$$

Das charakteristische Polynom dieser GDG ist $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$. Die einzige Nullstelle dieses Polynoms ist $\lambda_1 = 1$. Ihre Vielfachheit ist $m_1 = 2$. Gemäss Satz 7.8 bilden die Funktionen

$$u_{1\,0}(t) = e^t, \qquad u_{1\,1}(t) = te^t$$

daher eine Basis des Lösungsraums Z der GDG. Insbesondere hat die allgemeine Lösung der GDG also die Form

$$u(t) = c_{1\,0} e^t + c_{1\,1} te^t, \qquad \text{mit } c_{1\,0}, c_{1\,1} \in \mathbb{C}.$$

7.3 Homogene GDG zweiter Ordnung, freier gedämpfter harmonischer Oszillator

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96b, 3.6] und [Stra, 5.6]. Wir betrachten jetzt die GDG (7.18) im Fall $n = 2$ mit $a_0, a_1 \in [0, \infty[$, also die homogene GDG

$$\ddot{u} + a_1\dot{u} + a_0 u = 0. \tag{7.21}$$

Diese GDG beschreibt einen freien (gedämpften) *harmonischen Oszillator*. Beispiele dafür sind der freie Federschwinger (Beispiel 7.2) und der freie elektrische Schwingkreis (Beispiel 7.3(a)). Der Term $\ddot{u}$ drückt die Beschleunigung der Grösse u aus. Der Term $a_0 u$ bewirkt eine Rückstellung des Systems in die Ruhelage. Der Term $a_1\dot{u}$ bewirkt eine Dämpfung des Systems, also eine Abnahme der Amplitude der Schwingung.

Bemerkung. Ein *Oszillator* ist ein schwingungsfähiges System. *Harmonisch* bedeutet in diesem Kontext, dass für jedes t der Rückstellterm $a_0 u(t)$ linear von $u(t)$ abhängt.

Wir definieren *Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems* als

$$\omega_0 := \sqrt{a_0} \in [0, \infty[. \tag{7.22}$$

Das ist die Kreisfrequenz (= Winkelgeschwindigkeit) des ungedämpften Systems, welches durch die GDG

$$\ddot{u} + a_0 u = 0$$

beschrieben wird. Das folgt aus einer Rechnung wie in Beispiel 7.2. Wir definieren den *Dämpfungskoeffizienten*

$$\delta := \frac{a_1}{2}.$$

Mit diesen Notationen wird die GDG (7.21) zur Gleichung

$$\ddot{u} + 2\delta\dot{u} + \omega_0^2 u = 0. \tag{7.23}$$

Das nächste Resultat folgt aus Satz 7.8. Wir definieren

$$\mu := \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \in]0, \infty[.$$

Falls $\delta < \omega_0$, dann definieren wir die *Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung* als

$$\omega_d := \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \in]0, \infty[.$$

Proposition 7.9 (allgemeine Lösung der homogenen GDG zweiter Ordnung, freie gedämpfte Schwingung)**.** *Die allgemeine reellwertige Lösung u der GDG* (7.23) *ist gegeben durch:*

(a) Fall $\delta < \omega_0$ (unterkritische Dämpfung):

$$u(t) = e^{-\delta t}\big(a\cos(\omega_d t) + b\sin(\omega_d t)\big), \qquad a, b \in \mathbb{R} \tag{7.24}$$

(b) Fall $\delta = \omega_0$ (kritische Dämpfung, aperiodischer Grenzfall):

$$u(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\delta t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(c) Fall $\delta > \omega_0$ (überkritische Dämpfung, Kriechfall):

$$u(t) = c_1 e^{(-\delta+\mu)t} + c_2 e^{(-\delta-\mu)t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \tag{7.25}$$

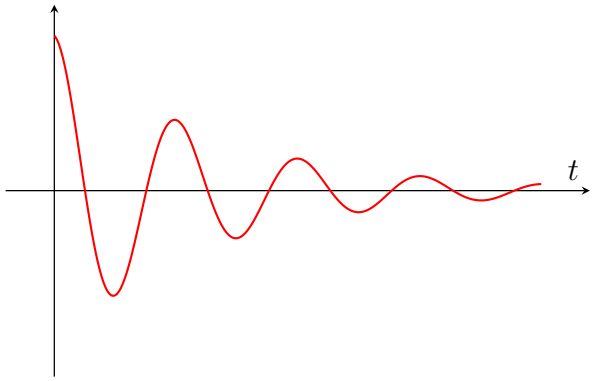


Abbildung 7.4: Die Lösung (7.24) für $a = 1$, $b = 0$ der GDG (7.23) im unterkritisch gedämpften Fall $\delta < \omega_0$.

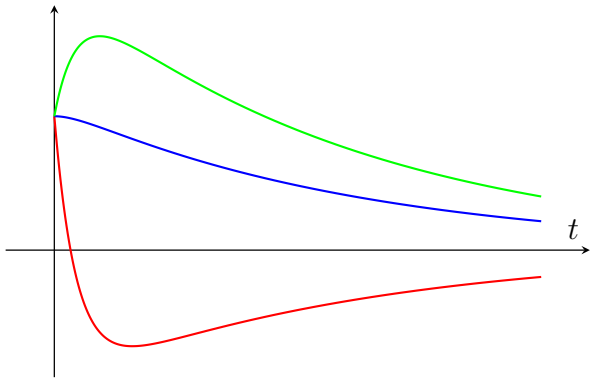


Abbildung 7.5: Die Lösung (7.25) der GDG (7.23) im überkritisch gedämpften Fall $\delta > \omega_0$ für verschiedene Wahlen von c_1 und c_2. Für die rote Lösung ist $\dot{x}(0) < 0$, für die blaue Lösung ist $\dot{x}(0) = 0$ und für die grüne Lösung ist $\dot{x}(0) > 0$. Die rote Lösung geht einmal durch 0 hindurch, die anderen Lösungen bleiben positiv.

Bemerkungen.

- Wir betrachten den Fall unterkritischer Dämpfung, also $\delta < \omega_0$. (Siehe Abbildung 7.4.) Die allgemeine Lösung u der GDG (7.23) ist dann das Produkt einer abfallenden Exponentialfunktion mit Abklingkonstante (= Abfallkonstante) δ und einer sinusförmigen Funktion. Das rechtfertigt den Namen *Dämpfungskoeffizient* für δ. Das System führt eine abklingende Schwingung mit der Kreisfrequenz ω_d aus, die kleiner als die Kreisfrequenz ω_0 der ungedämpften Schwingung ist. Die Bewegung des Systems ist also *gedämpft periodisch*[11].

- Wir betrachten jetzt den Fall überkritischer Dämpfung, also $\delta > \omega_0$. (Siehe Abbildung 7.5.) Dann ist u eine Linearkombination zweier Exponentialfunktionen mit Abklingkonstanten $\delta - \mu > 0$ und $\delta + \mu > 0$. Das System führt keine Schwingung

[11] Damit meinen wir, dass die Bewegung durch das Produkt einer abklingenden Exponentialfunktion und einer periodischen Funktion beschrieben wird.

aus. Die Funktion u geht maximal einmal durch Null hindurch.[12] Sie "kriecht" für grosse Zeiten zum Gleichgewichtszustand 0 zurück. Dieser Fall wird darum *Kriechfall* genannt. Die Bewegung des Systems ist also nicht (gedämpft) periodisch. Die zu starke Dämpfung verhindert Schwingungen.

- Wir betrachten den Fall kritischer Dämpfung, $\delta = \omega_0$. Das System führt keine Schwingung aus. Die Funktion u geht maximal einmal durch Null hindurch.[13] Sie "kriecht" für grosse Zeiten zum Gleichgewichtszustand 0 zurück. $\delta = \omega_0$ ist der kleinste Wert von δ, für den die Bewegung des Systems nicht gedämpft periodisch ist. Dieser Fall heisst darum *aperiodischer Grenzfall*.

Beweis der Proposition 7.9: Das charakteristische Polynom der GDG (7.23) ist gegeben durch

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2.$$

Gemäss der Mitternachtsformel[14] sind seine Nullstellen gegeben durch

$$\lambda_\pm = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm \mu \in \mathbb{C}.$$

In den Fällen $\delta > \omega_0$ und $\delta = \omega_0$ folgt die Aussage von Proposition 7.9 daher aus Satz 7.8. Wir betrachten den Fall $\delta < \omega_0$. Wir haben

$$\lambda_\pm = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta \pm i\omega_d.$$

Gemäss Satz 7.8 löst die Funktion

$$u_\pm(t) := e^{\lambda_\pm t} = e^{-\delta t} e^{\pm i\omega_d t} = e^{-\delta t}\big(\cos(\omega_d t) \pm i\sin(\omega_d t)\big)$$

daher die GDG (7.23). Daher löst die Funktion (7.24) die GDG.

Um zu zeigen, dass dies die *allgemeine* reellwertige Lösung ist, sei nun u eine solche Lösung. Gemäss Satz 7.8 erzeugen $u_\pm$ den Lösungsraum Z. Daher existieren Zahlen $c_\pm \in \mathbb{C}$ so, dass

$$u = c_- u_- + c_+ u_+.$$

Da u reellwertig ist, haben wir $u = \overline{u}$, daher

$$c_- e^{-i\omega_d t} + c_+ e^{i\omega_d t} = \overline{c_-} e^{i\omega_d t} + \overline{c_+} e^{-i\omega_d t},$$

daher $c_- = \overline{c_+}$ und darum

$$u(t) = e^{-\delta t}\big(a\cos(\omega_d t) + b\sin(\omega_d t)\big), \qquad \text{wobei } a := 2\,\mathrm{Re}(c_+),\ b := -2\,\mathrm{Im}(c_+).$$

Das beweist Proposition 7.9. □

[12] Wir nehmen hier an, dass c_1 und c_2 nicht beide gleich 0 sind.
[13] Wir nehmen hier an, dass c_1 und c_2 nicht beide gleich 0 sind.
[14] Damit meinen wir die Lösungformel für eine quadratische Gleichung.

Bemerkung. [freier Federschwinger, freier elektrischer Schwingkreis] Proposition 7.9 liefert die allgemeine Lösung der GDG (7.5). Somit beschreibt sie die Bewegung eines freien Federschwingers. (Siehe Beispiel 7.2 und Übungsserie 1 (Federschwinger).) Des Weiteren liefert Proposition 7.9 die allgemeine Lösung der GDG (7.12) mit $U \equiv 0$. Somit beschreibt sie die Zeitentwicklung eines freien elektrischen Schwingkreises. (Siehe Beispiel 7.3(a).) Somit haben wir Problem (i) (S. 334) gelöst.

7.4 Inhomogene lineare GDG, Anwendung: elektrischer Schwingkreis mit Wechselspannungsquelle, erzwungene Schwingung, Resonanz

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96b, 3.6] und [Stra, 5.7]. Wir behandeln hier die allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen GDG und beschreiben wir damit den elektrischen Schwingkreis mit kosinusförmiger Wechselspannungsquelle.

Wir betrachten die inhomogene lineare GDG (7.13), also

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(t)u^{(k)}(t) = f(t), \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{7.26}$$

Die allgemeine Lösung dieser GDG ist die Summe einer festen partikulären Lösung der GDG und einer beliebigen Lösung der entsprechenden homogenen GDG

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(t)u^{(k)}(t) = 0, \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{7.27}$$

Bemerkungen 7.10. [allgemeine Lösung der inhomogenen GDG]

(i) Für jede Lösung $u_\mathrm{p} \in C^n(\mathbb{R};\mathbb{C})$ von (7.26) gilt:

$$\big\{u \in C^n(\mathbb{R};\mathbb{C}) \,\big|\, u \text{ löst } (7.26)\big\} = \big\{u_\mathrm{p} + u_\mathrm{h} \,\big|\, u_\mathrm{h} \in C^n(\mathbb{R};\mathbb{C}) : \, u_\mathrm{h} \text{ löst } (7.27)\big\}.$$

Die Inklusion "$\supseteq$" folgt aus dem Superpositionsprinzip, Bemerkung 7.5(i). (Überprüfen Sie, dass auch "$\subseteq$" gilt!)

(ii) Das p in der Notation u_p steht für *partikulär*. Die Funktion u_p ist eine *partikuläre*, d. h., *spezielle* Lösung der GDG (7.26).

(iii) Es gilt auch die zu (i) analoge Aussage, die wir dadurch erhalten, dass wir $\mathbb{C}$ durch $\mathbb{R}$ ersetzen.

Bemerkung 7.11. [partikuläre Lösung der inhomogenen GDG]Seien $n \in \mathbb{N}_0, a_0, \ldots, a_n, c, \alpha \in \mathbb{C}$ so, dass $\sum_{k=0}^n a_k \alpha^k = a_n \alpha^n + \ldots + a_1 \alpha + a_0 \neq 0$. Dann löst die Funktion

$$U := U_{\mathrm{p}} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \qquad U_{\mathrm{p}}(t) := \frac{ce^{\alpha t}}{\sum_{k=0}^n a_k \alpha^k} \tag{7.28}$$

die GDG

$$\sum_{k=0}^n a_k U^{(k)}(t) = a_n U^{(n)}(t) + \ldots + a_1 \dot{U}(t) + a_0 U(t) = ce^{\alpha t}, \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{7.29}$$

Das folgt durch mehrfaches Ableiten der Funktion U_{p} und Einsetzen in die GDG.

Beispiel. [allgemeine Lösung einer inhomogenen GDG] Wir betrachten die inhomogene GDG für eine Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\ddot{u}(t) + u(t) = e^{3t}. \tag{7.30}$$

Gemäss Bemerkung 7.11 löst die Funktion

$$U_{\mathrm{p}}(t) := \frac{e^{3t}}{1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^0} = \frac{e^{3t}}{10}$$

die GDG (7.30). Gemäss Proposition 7.9 ist die allgemeine reellwertige Lösung der homogenen GDG $\ddot{u} + u = 0$ gegeben durch

$$u_{\mathrm{h}}(t) = a\cos(t) + b\sin(t), \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

(Diese GDG ist unterkritisch gedämpft, d. h., Fall (a) trifft zu.) Gemäss Bemerkung 7.10(iii) ist die Lösungsmenge von (7.30) daher gegeben durch

$$\left\{u \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R}) \,\middle|\, u \text{ löst } (7.30)\right\} = \left\{t \mapsto \frac{e^{3t}}{10} + a\cos(t) + b\sin(t) \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R}\right\}.$$

Wir betrachten jetzt die inhomogene (7.29) im Fall $n = 2$, $a_2 = 1, a_0, a_1 \geq 0$ und f gegeben durch ein Vielfaches einer Kosinusfunktion.

Bemerkung 7.12. [partikuläre Lösung der inhomogenen GDG der Ordnung 2, mit kosinusförmiger Inhomogenität] Seien jetzt $a_0, a_1, c, \omega \in [0, \infty[$ so, dass $a_0 \neq \omega^2$ oder $a_1\omega \neq 0$. Wir betrachten die GDG

$$\ddot{u}(t) + a_1\dot{u}(t) + a_0 u(t) = c\cos(\omega t). \tag{7.31}$$

Wir schreiben in Polarform

$$re^{i\psi} := a_0 - \omega^2 + ia_1\omega, \qquad r \in]0, \infty[,\ \psi \in [0, \pi]. \tag{7.32}$$

Wir haben

$$r = \sqrt{(a_0 - \omega^2)^2 + a_1^2\omega^2}. \tag{7.33}$$

Wir definieren die Funktion

$$u_{\mathrm{p}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad u_{\mathrm{p}}(t) := \frac{c}{r}\cos(\omega t - \psi). \tag{7.34}$$

Wir zeigen, dass diese Funktion die GDG (7.31) erfüllt. Wir definieren U_{p} wie in (7.28) mit $a_2 = 1$ und $\alpha = i\omega$, also

$$\begin{aligned} U_{\mathrm{p}}(t) &= \frac{ce^{\alpha t}}{\sum_{k=0}^{n=2} a_k \alpha^k} \\ &= \frac{ce^{i\omega t}}{-\omega^2 + ia_1\omega + a_0} && (7.35) \\ &= \frac{ce^{i\omega t}}{re^{i\psi}} \qquad \text{(wegen 7.32)} && (7.36) \\ &= \frac{c}{r}e^{i(\omega t - \psi)}. && (7.37) \end{aligned}$$

Wir haben

$$\begin{aligned} u_{\mathrm{p}}(t) &= \frac{c}{r}\,\mathrm{Re}\left(e^{i(\omega t-\psi)}\right) \qquad \text{(wegen der Eulerschen Formel } e^{ix} = \cos x + i\sin x) \\ &= \mathrm{Re}(U_{\mathrm{p}}(t)) \qquad \text{(wegen 7.37).} \end{aligned} \tag{7.38}$$

Gemäss Bemerkung 7.11 löst $U = U_{\mathrm{p}}$ die GDG (7.29), also

$$\ddot{U}(t) + a_1\dot{U}(t) + a_0U(t) = ce^{i\omega t}.$$

Wegen (7.38) löst $u = u_{\mathrm{p}}$ daher die GDG

$$\ddot{u}(t) + a_1\dot{u}(t) + a_0u(t) = \mathrm{Re}\left(ce^{i\omega t}\right) = c\cos(\omega t),$$

also (7.31), wie behauptet. (Alternativ können wir das auch direkt nachrechnen, indem wir u_{p} zweimal ableiten und in die GDG einsetzen.) △

Bemerkung. [komplexe Zahlen] In Bemerkung 7.12 haben wir erfolgreich komplexe Zahlen und die Eulersche Formel verwendet, um eine reellwertige Lösung einer GDG mit reellen Koeffizienten zu bestimmen. Komplexe Zahlen können also auch in "reellen" Situationen nützlich sein. △

Wir verwenden jetzt die allgemeine Lösung der inhomogenen GDG, um den elektrischen Schwingkreis mit kosinusförmiger Wechselspannungsquelle zu beschreiben. Wir führen jetzt also Schritt 2 (Beispiel 7.3) aus:

Beispiel 7.13. [Schwingkreis mit Wechselspannungsquelle, Lösung der GDG für die Ladung] Wir betrachten einen gedämpften elektrischen Reihenschwingkreis mit Wechselspannungsquelle, wie in Beispiel 7.3 unter (b). Wir nehmen an, dass die vorgegebene Spannung U eine Kosinusfunktion der Zeit ist, also

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t), \qquad \text{wobei } U_0,\, \omega \in [0, \infty[. \tag{7.39}$$

(Die Funktion U ist proportional zur Inhomogenität in der GDG (7.12). Sie spielt also *nicht* die Rolle der komplexwertigen Lösung einer GDG wie in Bemerkung 7.11.) Die GDG (7.12)wird dann zur Gleichung

$$\left(\ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \frac{1}{CL}Q\right)(t) = \frac{U_0}{L}\cos(\omega t), \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{7.40}$$

Die GDG (7.40) stimmt dann mit (7.31) überein, wobei

$$a_0 := \frac{1}{CL}, \qquad a_1 := \frac{R}{L}, \qquad c := \frac{U_0}{L}. \tag{7.41}$$

Wir definieren r, ψ durch (7.32),

$$Q_{\mathrm{p}} := u_{\mathrm{p}}$$

wie in (7.34), die *Phasenverschiebung* als

$$\varphi := \psi - \frac{\pi}{2} \tag{7.42}$$

und den *Scheinwiderstand* als

$$Z := Z_\omega := \sqrt{R^2 + \left(-\frac{1}{C\omega} + L\omega\right)^2} \tag{7.43}$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
I_{\mathrm{p}} :=& \dot{Q}_{\mathrm{p}} \\
=& -\frac{c}{r}\omega \sin(\omega t - \psi) \qquad \text{(wegen (7.34))} \\
=& U_0 \frac{\omega}{L\sqrt{\left(\frac{1}{CL} - \omega^2\right)^2 + \frac{R^2}{L^2}\omega^2}} \cos(\omega t - \varphi) \\
& \text{(wegen (7.33,7.41,7.42) und } -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)) \\
=& \frac{U_0}{Z}\cos(\omega t - \varphi) \qquad \text{(wegen (7.43))}.
\end{aligned} \tag{7.44}$$

Gemäss Bemerkung 7.12 löst die Funktion Q_{p} die GDG (7.31), also die GDG (7.40). Die allgemeine Lösung der GDG ist gegeben durch

$$Q = Q_{\mathrm{h}} + Q_{\mathrm{p}},$$

wobei Q_{h} die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung ist. (Warum?) Gemäss (7.7) ist die Stromstärke I gegeben durch

$$I = \dot{Q} = \dot{Q}_{\mathrm{h}} + \dot{Q}_{\mathrm{p}} = I_{\mathrm{h}} + I_{\mathrm{p}}, \qquad \text{wobei } I_{\mathrm{h}} := \dot{Q}_{\mathrm{h}}.$$

Wir nehmen jetzt an, dass $R > 0$. Dann klingt I_{h} exponentiell ab. Daher ist I asymptotisch für nach unendlich gehende Zeit durch I_{p} gegeben. (In der Praxis bedeutet das, dass I nach einer Einschwingphase näherungsweise durch I_{p} gegeben ist.) Die angelegte Wechselspannung $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$ erzeugt im Schwingkreis mit Wechselspannungsquelle gemäss (7.44) also (asymptotisch) die Stromstärke

$$I(t) = I_{\mathrm{p}}(t) = \dot{Q}_{\mathrm{p}}(t) = \frac{U_0}{Z} \cos(\omega t - \varphi). \tag{7.45}$$

Somit haben wir Problem (ii) (S. 334) gelöst. △

Bemerkungen. [Schwingkreis mit Wechselspannungsquelle, Lösung der GDG]

- Gemäss (7.45,7.39) ist die erzeugte Stromstärke im Schwingkreis mit Wechselspannungsquelle gegeben durch die um den Winkel φ phasenverschobene Spannung U geteilt durch den Scheinwiderstand Z. Die Stromstärke führt also eine kosinusförmige Schwingung mit derselben Frequenz wie die angelegte Spannung aus, aber die Phasen unterscheiden sich. Bis auf eine Phasenverschiebung verhält sich ein solcher Schwingkreis also wie die Schaltung, die aus einem Widerstand besteht, der an eine Batterie geschaltet wird, wobei Z die Rolle des Widerstands spielt.

- Wir definieren die *Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems* wie in (7.22) als

$$\omega_0 := \sqrt{a_0} = \frac{1}{\sqrt{CL}}.$$

  Das ist die Kreisfrequenz des *idealen* (= ungedämpften) freien Schwingkreises, der durch Beispiel 7.3(a) mit $R = 0$ gegeben ist. (Das entspricht einem Schwingkreis, der nur aus einem Kondensator und einer Spule besteht, ohne einen Widerstand.) Im Fall $R \neq 0$ und $\omega = \omega_0$ ist φ gemäss (7.42,7.32) gleich 0. Die Spannung und die Stromstärke sind dann also in Phase.

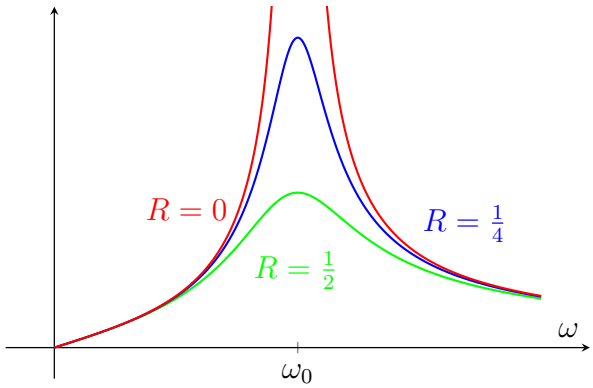


Abbildung 7.6: Amplitude A_ω der Stromstärke in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz ω für verschiedene Werte von R.

- Die *Amplitude der Stromstärke* ist durch

$$A_\omega := \frac{U_0}{Z_\omega}$$

gegeben. Siehe Abbildung 7.6. Die Amplitude ist genau dann maximal, wenn der Scheinwiderstand Z_ω minimal ist. Das ist genau für

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{CL}}$$

der Fall. (In diesem Fall ist die Klammer in (7.43) gleich null.) In diesem Fall ist das System in *Resonanz* mit der Anregung.

- Aus der Formel (7.43) folgt: Je mehr sich ω, die Anregungsfrequenz, von ω_0, der Eigenfrequenz des Schwingkreises, entfernt, desto kleiner wird die Amplitude A_ω. Für $\omega \to \infty$ und $\omega \to 0$ konvergiert A_ω gegen 0. Das Eingangssignal (die zeitabhängige Spannung U) wird also abhängig von der Kreisfrequenz ω in ein starkes oder schwaches Ausgangssignal (die zeitabhängige Stromstärke I) umgewandelt. Der Schwingkreis wirkt darum näherungsweise wie ein Filter, der nur Frequenzen in der Nähe von ω_0 durchlässt. Diese Eigenschaft wird in Anwendungen genutzt.

- Aus der Formel (7.43) folgt: Je grösser der Widerstand R, desto kleiner ist die Amplitude. Der Widerstand hat also eine dämpfende Wirkung auf den Schwingkreis. Für $R \to \infty$ konvergiert die Amplitude gegen 0. Im Fall $\omega = \omega_0$ konvergiert sie für $R \to 0$ gegen ∞. Tatsächlich wächst im Fall $\omega = \omega_0$ und $R = 0$ die Amplitude der Stromstärke linear mit der Zeit an. (In diesem Fall ist $Q_\mathrm{p}(t) := \frac{U_0}{2L\omega_0} t \sin(\omega_0 t)$ eine partikuläre Lösung der GDG (7.40).) Sie wächst dann also ins Unermessliche. Es tritt daher die sogenannte *Resonanzkatastrophe* ein.

△

7.5 System gewöhnlicher Differentialgleichungen, Umschreiben einer GDG als ein System erster Ordnung, Anfangswertproblem, Existenz- und Eindeutigkeit der Lösung, Matrixexponentiation, Fundamentallösung

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96b, 3.5] und [Stra, 5.6, 5.7]. Wir betrachten hier *Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen*. Ein solches System besteht aus mehreren Differentialgleichungen für mehrere Funktionen. Solche Systeme beschreiben die Wechselwirkung verschiedener physikalischer Grössen. Ein Beispiel dafür ist der elektrische Schwingkreis. Wir haben diesen mit Hilfe mehrerer Differentialgleichungen für verschiedene elektrische Grössen beschrieben. (Daraus haben wir dann eine einzelne GDG für die Ladung Q hergeleitet.) Jede GDG kann als ein System von GDG *erster Ordnung* umgeschrieben werden.

In Anwendungen beschreiben gewöhnliche Differentialgleichungen alleine ein physikalisches System meistens noch nicht vollständig. Das System wird jedoch oft vollständig beschrieben, wenn wir zusätzlich zur Differentialgleichung noch Anfangsbedingungen hinzunehmen. Diese Bedingungen werden oft durch den experimentellen Aufbau vorgegeben. Dadurch erhalten wir ein *Anfangswertproblem*. Für ein lineares System von GDG erster Ordnung existiert eine eindeutige Lösung des Anfangswertproblems. Diese Lösung kann mittels Matrixexponentiation ausgedrückt werden, falls das lineare System konstante Koeffizienten besitzt und aus gleich vielen Gleichungen besteht, wie wir Funktionen haben.

In diesem Abschnitt schreiben wir einen Punkt $X \in \mathbb{R}^n$ als

$$X = \left(X^0, \ldots, X^{n-1}\right).$$

(Der obere Index läuft also von 0 bis $n-1$.) Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$ und I ein offenes Intervall. Wir nennen eine Funktion $U : I \to \mathbb{R}^n$ *differenzierbar* g. d. w. für jedes $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ die Komponente $U^i : I \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar ist. In diesem Fall definieren wir

$$\dot{U} := \begin{pmatrix} \dot{U}^0 \\ \vdots \\ \dot{U}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Definition. *Ein* System von m gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung für n Funktionen von I nach $\mathbb{R}$ *ist eine Gleichung für eine differenzierbare Funktion* $U : I \to \mathbb{R}^n$ *der Form*

$$\Phi\big(t, U(t), \dot{U}(t)\big) = 0, \qquad \forall t \in I,$$

wobei $\Phi : I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *eine feste Funktion der Variablen* t, X, Y *ist, die nicht bezüglich* Y *konstant ist. Wir nennen ein solches System* linear *g. d. w. es eine Funktion* $F : I \to \mathbb{R}^m$ *gibt so, dass für jedes* $t \in I$ *die Funktion* $(X, Y) \mapsto \Phi(t, X, Y) + F(t)$ *linear ist.*

Analog definieren wir den Begriff eines Systems von GDG erster Ordnung für n Funktionen von I nach $\mathbb{C}$ *und Linearität eines solchen Systems.*

Wir nehmen jetzt an, dass das System linear ist. Falls F wie oben konstant gleich 0 gewählt werden kann, dann heisst das System homogen*, sonst* inhomogen*. Die Funktion F heisst die* Inhomogenität *(oder* Quellterm*) der GDG.*

Bemerkung. Die Funktion F wie oben ist eindeutig bestimmt (falls sie existiert).

Beispiel. [mehrstufiger radioaktiver Zerfall] Wir betrachten eine radioaktive Substanz S_0, die über die Zwischenstufen $S_1, \ldots, S_{n-2}$ in eine stabile Substanz S_{n-1} zerfällt. Wir schreiben:

$U^i(t) :=$ Anzahl Atome der Substanz S_i zum Zeitpunkt t [15]

$a_i :=$ Zerfallskonstante der Substanz S_i

Der mehrstufige Zerfall wird durch folgende GDG beschrieben:

$$\begin{aligned}
\dot{U}^0 &= -a_0 U^0 \\
\dot{U}^1 &= a_0 U^0 - a_1 U^1 \\
&\vdots \\
\dot{U}^{n-2} &= a_{n-3} U^{n-3} - a_{n-2} U^{n-2} \\
\dot{U}^{n-1} &= a_{n-2} U^{n-2}
\end{aligned} \tag{7.46}$$

[15] Im Zusammenhang mit Systemen von GDG verwenden wir einen oberen Index für die i-te gesuchte Funktion. Das stimmt mit der Konvention der Physik überein, einen oberen Index für die Komponenten eines Vektors zu verwenden. Wenn die Gefahr besteht, den oberen Index mit einer Potenz zu verwechseln, werden wir einen unteren Index verwenden.

Wir definieren

$$U := \begin{pmatrix} U^0 \\ \vdots \\ U^{n-1} \end{pmatrix} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \qquad A := \begin{pmatrix} -a_0 & 0 & \cdots & & 0 \\ a_0 & -a_1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & & -a_{n-2} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Phi(t, X, Y) := Y - AX.$$

(7.46) ist entspricht dem System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung gegeben durch

$$\begin{aligned} &\Phi\big(t, U(t), \dot{U}(t)\big) = 0, \ \forall t, \\ &\text{d. h.} \qquad \dot{U} = AU. \end{aligned} \tag{7.47}$$

Dieses System von GDG ist homogen linear.

Beispiel. [System von GDG] Wir betrachten den elektrischen Schwingkreis mit Wechselspannungsquelle, siehe Beispiel 7.3. Wie wir gesehen haben, wird der Schwingkreis durch die Gleichungen (7.7,7.8,7.9,7.10,7.11) für die elektrischen Grössen Q, I, U_C, U_R, U_L beschrieben. Diese Gleichungen formen ein *inhomogenes* lineares System von GDG. Die Inhomogenität enthält die angelegte Spannung U.

Bemerkung. In diesem Beispiel enthalten 3 Gleichungen keine Ableitungen. Das ist gemäss unserer Definition eines Systems von GDG erlaubt. Gewisse Autoren/innen von Büchern schliessen solche Systeme jedoch aus.

Wir betrachten jetzt eine Funktion $\varphi : I \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ und die entsprechende GDG der Ordnung n,

$$\varphi\big(t, u(t), \dot{u}(t), \ldots, u^{(n)}(t)\big) = 0, \qquad \forall t \in I. \tag{7.48}$$

Wir können diese GDG als ein System von GDG *erster Ordnung* umgeschreiben:

Bemerkungen 7.14. [Umschreiben einer GDG als ein System erster Ordnung]

(i) Wir definieren die Funktion

$$\Phi : I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad \Phi(t, X, Y) := \begin{pmatrix} Y^0 - X^1 \\ Y^1 - X^2 \\ \vdots \\ Y^{n-2} - X^{n-1} \\ \varphi\big(t, X, Y^{n-1}\big) \end{pmatrix}.$$

Sei $U = \big(U^0, \dots, U^{n-1}\big) : I \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion und $u := U^0$. U ist differenzierbar und löst das System von GDG

$$\Phi\big(t, U(t), \dot{U}(t)\big) = 0, \qquad \forall t \in I \tag{7.49}$$

genau dann, wenn die Funktion u n-mal differenzierbar ist, die Gleichheiten

$$u^{(k)} = U^k, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

erfüllt und die GDG (7.48) löst. Daraus folgt, dass die Abbildung

$$\begin{aligned}&\big\{\text{differenzierbare Lösung } U : I \to \mathbb{R}^n \text{ von (7.49)}\big\}\\ &\to \big\{n\text{-mal differenzierbare Lösung } u : I \to \mathbb{R} \text{ von (7.48)}\big\}\end{aligned}$$

wohldefiniert und bijektiv ist. Somit haben wir die GDG (7.48) als das System von GDG erster Ordnung (7.49) umgeschrieben.

(ii) Wir nennen eine GDG explizit, wenn sie die Form

$$u^{(n)} = \psi\big(\cdot, u, \dots, u^{(n-1)}\big), \qquad \forall t \tag{7.50}$$

hat. Wir betrachten jetzt eine solche GDG. Wir schreiben

$$\mathbb{R}^{m\times n} := \big\{m \times n\text{-Matrix mit Einträgen in } \mathbb{R}\big\}.$$

Wir nehmen an, dass die GDG (7.50) linear ist. Dann gibt es Funktionen $f, a_0, \dots, a_{n-1} : I \to \mathbb{R}$ so, dass

$$\psi\big(t, x^0, \dots, x^{n-1}\big) = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) x^k + f(t), \qquad \forall t.$$

Wir definieren die Funktionen

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & & & -a_{n-1} \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^{n\times n}, \qquad F := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^n. \tag{7.51}$$

Eine Funktion $U = \big(U^0, \dots, U^{n-1}\big) : I \to \mathbb{R}^n$ ist differenzierbar und löst das System von GDG

$$\dot{U} = AU + F \tag{7.52}$$

genau dann, wenn die Funktion $u := U^0$ n-mal differenzierbar ist, die Gleichheiten

$$u^{(k)} = U^k, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

erfüllt und die explizite lineare GDG

$$u^{(n)}(t) = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)u^{(k)}(t) + f(t), \qquad \forall t \in I, \tag{7.53}$$

löst. Daraus folgt, dass die Abbildung

$$\begin{aligned}&\big\{\text{differenzierbare Lösung } U : I \to \mathbb{R}^n \text{ von (7.52)}\big\}\\ &\to \big\{n\text{-mal differenzierbare Lösung } u : I \to \mathbb{R} \text{ von (7.53)}\big\}\end{aligned}$$

wohldefiniert und bijektiv ist. Somit haben wir die explizite lineare GDG (7.53) als das explizite lineare System von GDG erster Ordnung (7.52) umgeschrieben.

(iii) Es gelten auch zu den obigen Bemerkungen analoge Bemerkungen für GDG für komplexwertige Funktionen.

Beispiel 7.15. [Umschreiben] Wir können die explizite lineare GDG

$$\ddot{u} = -u$$

umschreiben als das System von GDG für eine vektorwertige Funktion $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\dot{U} = AU, \qquad \text{wobei } A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir schreiben $u := U^0$. Gemäss Bemerkung 7.14(ii) löst die Funktion U das Gleichungssystem $\dot{U} = AU$ genau dann, wenn

$$\dot{u} = U^1, \qquad \ddot{u} = -u.$$

Sei I ein Intervall, $t_0 \in I$, $\Phi : I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion und $U_0 \in \mathbb{R}^m$. Das zugehörige *Anfangswertproblem* ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\Phi\big(t, U(t), \dot{U}(t)\big) &= 0, \qquad \forall t \in I,\\ U(t_0) &= U_0.\end{aligned}$$

Wir betrachten jetzt den Fall $m = n$.

Satz 7.16 (Existenz- und Eindeutigkeit der globalen Lösung eines linearen Systems von GDG)**.** *Seien $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ und $F : I \to \mathbb{R}^n$ stetige Funktionen. Das Anfangswertproblem*

$$\dot{U}(t) = A(t)U(t) + F(t), \qquad \forall t \in I, \tag{7.54}$$

$$U(t_0) = U_0. \tag{7.55}$$

besitzt eine eindeutige Lösung $U \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$.

Beweis: [Tes12, Theorem 3.9, p. 81]. Für den Fall, dass A konstant ist, siehe auch [Stra, Satz 5.6.1, S. 104]. □

Bemerkung. Die in diesem Satz beschriebene Lösung ist *global* definiert, d. h. auf dem ganzen Intervall I.

Mit Hilfe der oben beschriebenen Reduktion einer GDG auf ein System von GDG erster Ordnung impliziert dieser Satz, dass jede lineare GDG eine eindeutige globale Lösung hat:

Korollar 7.17 (Existenz- und Eindeutigkeit der globalen Lösung einer linearen GDG)**.** *Seien $f, a_0, \dots, a_{n-1} : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $u_0^0, \dots, u_0^{n-1} \in \mathbb{R}$. Das Anfangswertproblem*

$$u^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) u^{(k)}(t) = f(t), \qquad \forall t \in I, \tag{7.56}$$

$$u^{(k)}(t_0) = u_0^k, \qquad \forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \tag{7.57}$$

besitzt eine eindeutige Lösung $u \in C^n(I; \mathbb{R})$.

Bemerkung. Es gilt auch ein analoges Resultat für GDG für komplexwertige Funktionen.

Beweis des Korollars 7.17: Existenz: Wir definieren A und F wie in (7.51) und

$$U_0 := \begin{pmatrix} u_0^0 \\ \vdots \\ u_0^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Gemäss Satz 7.16 gibt es eine Lösung $U = \left(U^0, \dots, U^{n-1}\right) \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ des Anfangswertproblems (7.54,7.55) . Gemäss Bemerkung 7.14(ii) ist die Funktion $u := U^0$ n-mal differenzierbar, löst die GDG (7.56) und erfüllt

$$u^{(k)} = U^k, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Mit Hilfe der Anfangsbedingung (7.55) folgt daraus, dass

$$u^{(k)}(t_0) = u_0^k, \qquad \forall k \in \{0, \dots, n-1\},$$

d. h., u erfüllt die Anfangsbedingungen (7.57). Da u die GDG (7.56) löst und $u, \dots, u^{(n-1)}, a_0, \dots, a_{n-1}, f$ stetig sind, ist u n-mal *stetig* differenzierbar. Das zeigt, dass ein u mit den gewünschten Eigenschaften existiert.

Eindeutigkeit von u folgt mittels eines ähnlichen Arguments aus der Eindeutigkeitsaussage von Satz 7.16 und Bemerkung 7.14(ii). Das beweist Korollar 7.17. □

Beispiel 7.18. Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \ddot{u} + u &= 0, \\ u(0) = 1, \qquad \dot{u}(0) &= 0 \end{aligned}$$

besitzt die eindeutige Lösung

$$u = \cos .$$

Dass diese Funktion das Anfangswertproblem löst, folgt durch Nachrechnen. Dass es die einzige Lösung ist, folgt aus Korollar 7.17.

Bemerkungen. Um die Lösung eines Anfangswertproblem für eine homogene lineare GDG mit konstanten Koeffizienten zu finden, können wir die folgende Strategie verwenden:

- Bestimme die allgemeine Lösung der GDG mittels Satz 7.8. Wir schreiben diese Lösung als eine Linearkombination der Basisfunktionen u_{ik}.
- Die Anfangsbedingungen liefern ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten der Linearkombination. Wir lösen dieses Gleichungssystem mit einer Methode aus der Vorlesung *Lineare Algebra* (zum Beispiel mit Gaußelimination).

Im reellen Fall mit $n = 2$ können wir statt Satz 7.8 die Proposition 7.9 verwenden.

Beispiel. Wir verwenden diese Strategie, um die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \ddot{u} + u &= 0, \\ u(0) = 1, \qquad \dot{u}(0) &= 0 \end{aligned} \tag{7.58}$$

zu bestimmen. Gemäss Proposition 7.9 ist die allgemeine reellwertige Lösung der GDG $\ddot{u} + u = 0$ gegeben durch

$$u = a\cos + b\sin, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

(Wir sind im unterkritischen Fall (a).) Durch Einsetzen in (7.58) erhalten wir folgendes lineare Gleichungssystem für die Koeffizienten a, b:

$$\begin{aligned} 1 = u(0) &= a\cos(0) + b\sin(0) = a, \\ 0 = \dot{u}(0) &= -a\sin(0) + b\cos(0) = b. \end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$u = 1 \cdot \cos + 0 \cdot \sin = \cos .$$

(Vergleiche mit Beispiel 7.18.)

Obwohl gemäss Korollar 7.17 das Anfangswertproblem für eine lineare GDG eine eindeutige Lösung besitzt, lassen sich gewisse dieser Lösungen nicht durch eine explizite Formel darstellen, selbst wenn die GDG homogen ist. Mit *sich durch eine explizite Formel darstellen lassen* meinen wir hier *Liouville-Typ besitzen*. Um diesen Begriff zu erklären, benötigen wir das Folgende. Sei $X_0 \subseteq \mathbb{C}$. Eine *(komplex) mehrwertige Funktion auf* X_0 ist eine Abbildung von X_0 nach der Menge der Teilmengen von $\mathbb{C}$. Ein *Zweig* einer mehrwertigen Funktion F auf X_0 ist eine stetige Funktion f auf einer Teilmenge X von X_0 [16] so, dass $f(x) \in F(x)$ für jedes $x \in X$.

Wir sagen, dass eine Funktion von einer Teilmenge $X \subseteq \mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ *Liouville-Typ besitzt* g. d. w. sie ein Zweig einer mehrwertigen Funktion vom komplexen Liouville-Typ ist. Dabei sagen wir, dass eine mehrwertige Funktion *komplexen Liouville-Typ besitzt* g. d. w. wir sie aus

- rationalen Funktionen,
- der komplexen Exponentialfunktion $\mathrm{Exp} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,
- der mehrwertigen komplexen Logarithmusfunktion Log[17]

in endlich vielen Schritten mittels folgender Operationen bilden können[18]:

- arithmetische Operationen $+, -, \times, \div$
- Verkettung[19]
- Lösen von algebraischen Gleichungen mit Koeffizienten gegeben durch mehrwertige Funktionen vom komplexen Liouville-Typ[20]

[16] In Büchern wird hier oft vorausgesetzt, dass X_0 und X offen sind.

[17] Siehe Bemerkung 6.47(iv).

[18] Dabei setzen wir entstandene Funktionen soweit möglich stetig fort. Seien zum Beispiel $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) := \frac{1}{z}$, $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g(z) := z$. Wir setzen das Produkt fg zur stetigen Funktion auf $\mathbb{C}$ fort, die konstant gleich 1 ist. Ähnlich verfahren wir mit mehrwertigen Funktionen.

[19] Wir definieren die Verkettung zweier mehrwertiger Funktionen F und G, indem wir $G \circ F(x)$ gleich der Menge der Elemente aller $G(y)$ setzen, wobei y alle Elemente von $F(x)$ durchläuft.

[20] Damit meinen wir eine Gleichungen der Form $\sum_{i=0}^{n} A_i F^i = 0$ für eine mehrwertige Funktion F, wobei $A_0, \ldots, A_n$ mehrwertige Funktionen vom komplexen Liouville-Typ sind. Ein Beispiel einer solchen Gleichung ist $zF(z)^5 + \mathrm{Exp}(z^2)F(z) + \mathrm{Log} \circ \mathrm{Log}(z) = 0$.

- Stammfunktion[21] nehmen

Beispiele. [Liouville-Typ] Beispiele von Funktionen vom Liouville-Typ sind:

- Jede elementare Funktion. Siehe S. 292 und Beispiele 6.50, also insbesondere jede rationale Funktion, Potenz-, Exponential-, Logarithmusfunktion, trigonometrische Funktion, Arkusfunktion
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := \int_0^x e^{y^2} dy$

  Bemerkung: Diese Funktion ist nicht elementar. (Siehe Beispiel 6.51.)

Beispiel 7.19. [nicht Liouville-Typ, Lösung einer GDG ohne explizite Formel] Seien $u_0^0, u_0^1 \in \mathbb{R}$. Gemäss Korollar 7.17 besitzt das Anfangswertproblem

$$\ddot{u}(t) + tu(t) = 0, \qquad u(0) = u_0^0, \qquad \dot{u}(0) = u_0^1$$

eine eindeutige Lösung. Falls $u_0^0 \neq 0$ oder $u_0^1 \neq 0$, dann ist diese Lösung jedoch nicht vom Liouville-Typ. Das ist ein schwierig zu beweisender mathematischer Satz.[22] Die Lösung des Anfangswertproblems lässt sich also nicht durch eine explizite Formel im Sinne einer Funktion vom Liouville-Typ darstellen, obwohl wir es bei der Definition dieses Begriffes sogar zulassen, Stammfunktionen zu nehmen.[23]

Bemerkungen. [explizite Formel, numerische Methoden]

- Im Gegensatz zum obigen Beispiel gibt es für die allgemeine Lösung einer homogenen linearen GDG *mit konstanten Koeffizienten* eine explizite Formel. Gemäss Satz 7.8 ist diese Lösung nämlich eine Linearkombination der Basisfunktionen $u_{ik}(t) := t^k e^{\lambda_i t}$.
- In der Praxis können wir die Lösungen einer GDG mit Hilfe von numerischen Methoden beliebig genau berechnen, selbst dann, wenn es keine explizite Formel dafür gibt. Siehe das Fach *Numerische Methoden* (ITET, 4. Semester). Das Fach *Numerical Methods for Partial Differential Equations* (RW, Grundlagenfach, 4. Semester) behandelt numerische Verfahren für partielle Differentialgleichungen (siehe Analysis 3).

[21] Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Stammfunktion einer Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ ist eine Funktion von U nach $\mathbb{C}$, deren komplexe Ableitung existiert und gleich f ist. (Siehe die Vorlesung *Mathematische Methoden für ITET und RW.*) Für eine mehrwertige Funktion definieren wir den Begriff einer Stammfunktion ähnlich.

[22] Siehe [Kap57, Theorem 6.6., p. 43].

[23] Wir verwenden hier die Sprechweise *explizite Formel* also in einem allgemeineren Sinn als in Beispiel 6.51. Dort meinten wir damit eine *elementare Funktion.*

Bemerkung. Korollar 7.17 besagt, dass das Anfangswertproblem für eine lineare GDG eine globale, d. h. für alle Zeiten definierte, Lösung besitzt. Für nichtlineare GDG ist das im Allgemeinen falsch. Zum Beispiel besitzt das Anfangswertproblem (AWP)

$$\dot{u} = u^2, \qquad u(0) = 1$$

keine globale Lösung. Das folgt aus der Tatsache, dass die Funktion

$$u :]-\infty, 1[\to \mathbb{R}, \qquad u(t) := \frac{1}{1-t}$$

dieses Anfangswertproblem löst und dass je zwei Lösungen auf dem Durchschnitt ihrer Definitionsbereiche übereinstimmen. (Das ist die Eindeutigkeitsaussage des Satzes von Picard-Lindelöf. Siehe [Stra, Satz 6.5.1, S. 145].) Intuitiv besitzt das AWP keine globale Lösung, weil die Lösung $u(t) := \frac{1}{1-t}$ zur Zeit $t = 1$ explodiert, d. h., gegen ∞ geht.

Falls die matrixwertige Funktion A konstant ist und $F = 0$, dann können wir die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (7.54,7.55) mittels Matrixexponentiation ausdrücken. Um diese Exponentiation zu erklären, brauchen wir Folgendes. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Wir schreiben die Diagonalmatrix mit diagonalen Einträgen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ als

$$\operatorname{diag}\big(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\big) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Im Fall $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$ ist das die Einheitsmatrix

$$\mathbb{1} := I_n := \operatorname{diag}(1, \ldots, 1).$$

Bemerkung. In [Stra] wird diese Matrix mit "id" bezeichnet. Ich verwende dafür $\mathbb{1}$, um einen Konflikt mit der Notation "id" für die Identitätsabbildung zu vermeiden.

Seien $M, M_\ell \in \mathbb{C}^{m\times n}$, für $\ell \in \mathbb{N}_0$. Wir sagen, dass die Folge $(M_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}_0}$ *gegen M konvergiert* g. d. w. für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$ die Folge $\big((M_\ell)^i{}_j\big)_{\ell\in\mathbb{N}_0}$ gegen $M^i{}_j$ konvergiert. In diesem Fall schreiben wir

$$M = \lim_{\ell\to\infty} M_\ell.$$

Definition (Matrixexponential)**.** *Für jede Matrix $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ definieren wir ihr* (Matrix-)exponential *als die Matrix*

$$e^X := \operatorname{Exp}(X) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} := \lim_{\ell\to\infty} \sum_{k=0}^{\ell} \frac{X^k}{k!}. \tag{7.59}$$

Bemerkungen. • Wir verwenden hier die Konvention

$$X^0 := \mathbb{1}, \qquad \forall X \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

- Mit Hilfe von [Stra, Beispiel 3.7.2, S. 42] kann gezeigt werden, dass der Limes in (7.59) existiert.

Beispiel 7.20. [Matrixexponential] Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Für die Diagonalmatrix

$$X := \operatorname{diag}\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\right)$$

ist das Exponential gegeben durch

$$e^X = \operatorname{Exp}(X) = \operatorname{diag}\left(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}\right).$$

(Rechnen Sie das nach!)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Definition (Fundamentallösung)**.** *Wir definieren die* Fundamentallösung *des Systems von GDG $\dot{U} = AU$ als die matrixwertige Funktion*

$$\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times n}, \qquad \Phi(t) := \operatorname{Exp}(At).$$

Proposition 7.21 (Fundamentallösung)**.** *(i) Die Funktion Φ ist glatt, d. h. beliebig oft differenzierbar.*

(ii) Die Ableitung von Φ ist gegeben durch

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t) = \Phi(t)A, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung. Im Fall $n = 1$ können wir die 1×1-Matrix A mit ihrem einzigen Eintrag identifizieren. Die Fundamentallösung $\Phi(t) = e^{At}$ ist dann die gewöhnliche Exponentialfunktion mit Wachstumskonstante A.

Die folgende Bemerkung werden wir im Beweis der Proposition 7.21 verwenden.

Bemerkung 7.22. [Ableitung einer Potenzreihe] Gemäss Korollar 5.39 ist jede durch eine Potenzreihe definierte Funktion im Innern ihrer Konvergenzkreisscheibe differenzierbar mit Ableitung gegeben durch gliedweises Differenzieren. Der Konvergenzradius der abgeleiteten Potenzreihe stimmt mit dem der ursprünglichen Potenzreihe überein. Das folgt aus dem Beweis von [Stra, Satz 5.4.2, S. 93]. Daraus folgt, dass die Potenzreihe im Innern ihres Konvergenzgebiets glatt ist.

Beweis der Proposition 7.21: Beweis von (i): Seien $i, j = 1, \ldots, n$. Wir schreiben

$$a_k := \left(\frac{A^k}{k!}\right)^i{}_j .$$

Der Ausdruck

$$\begin{aligned}\Phi^i{}_j(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(At)^k}{k!}\right)^i{}_j \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \end{aligned} \tag{7.60}$$

ist eine Potenzreihe in $t \in \mathbb{R}$.[24] Da diese Potenzreihe für jedes $t \in \mathbb{R}$ konvergiert, ist ihr Konvergenzbereich gleich $\mathbb{R}$. Gemäss Bemerkung 7.22 ist die Potenzreihe daher auf ganz $\mathbb{R}$ glatt. Das beweist (i).

Beweis von (ii): Gemäss Bemerkung 7.22 ist die Ableitung der Potenzreihe (7.60) gegeben durch

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}^i{}_j(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} k a_k t^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k!} A^k\right)^i{}_j t^{k-1} \\ &= \left(A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} (At)^{k-1}\right)^i{}_j \\ &= (A\Phi)^i{}_j(t).\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t).$$

Eine analoge Rechnung zeigt, dass

$$\dot{\Phi}(t) = \Phi(t)A.$$

Das beweist (ii) und schliesst den Beweis der Proposition 7.21 ab. □

Sei $U_0 \in \mathbb{C}^n$. Wir definieren die Funktion

$$U := \Phi U_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n.$$

[24] Diese Potenzreihe nimmt komplexe Werte an.

Korollar 7.23 (Fundamentallösung)**.** *Diese Funktion ist glatt und löst das Anfangswertproblem*

$$\dot{U} = AU, \qquad U(0) = U_0.$$

Beweis des Korollars 7.23: Aus Proposition 7.21(i) folgt, dass U glatt ist. Es gilt

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \frac{d}{dt}\left(\Phi U_0\right) \\ &= \dot{\Phi} U_0 \\ &= A\Phi U_0 \qquad \text{(gemäss Proposition 7.21(ii))} \\ &= AU. \end{aligned}$$

Wir schreiben

$$\mathbb{0} := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

für die $n \times n$-Nullmatrix. Es gilt $\operatorname{Exp}(\mathbb{0}) = \dfrac{\mathbb{0}^0}{0!} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{0}^k}{k!} = \frac{\mathbb{1}}{1} + \mathbb{0}$ und darum

$$U(0) = \operatorname{Exp}(A \cdot 0) U_0 = \mathbb{1} U_0 = U_0.$$

Das beweist Korollar 7.23. □

Falls A diagonal ist, also die Form $A = \operatorname{diag}\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\right)$ hat, dann ist die Fundamentallösung des Systems von GDG $\dot{U} = AU$ gemäss Beispiel 7.20 gegeben durch

$$\Phi(t) = \operatorname{Exp}(At) = \operatorname{diag}\left(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\right).$$

In der allgemeinen Situation ist die Fundamentallösung mittels der Formel $\Phi(t) = \operatorname{Exp}(At) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$ mühsam zu berechnen. Falls A jedoch diagonalisierbar ist, dann können wir die Rechnung stark vereinfachen, indem wir sie auf den diagonalen Fall reduzieren. Siehe Korollar 7.25. Dieses Korollar folgt aus dem nächsten Resultat.

Proposition 7.24 (Exponential einer mit einer Matrix konjugierten Matrix)**.** *Seien $M, T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ Matrizen, wobei T invertierbar ist. Es gilt*

$$\operatorname{Exp}\left(TMT^{-1}\right) = T \operatorname{Exp}(M) T^{-1}.$$

Bemerkung. TMT^{-1} heisst *die mit T konjugierte Matrix M*. Proposition 7.24 sagt, dass das Exponential der mit T konjugierten Matrix M das mit T konjugierte Exponential der Matrix M ist.

Beweis der Proposition 7.24: Es gilt

$$(TMT^{-1})^k = TMT^{-1}TMT^{-1}\cdots TMT^{-1} = TM^kT^{-1}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0, \tag{7.61}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Exp}(TMT^{-1}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(TMT^{-1})^k}{k!} \\
&= \lim_{\ell\to\infty} \sum_{k=0}^{\ell} \frac{(TMT^{-1})^k}{k!} \\
&= \lim_{\ell\to\infty} T\left(\sum_{k=0}^{\ell} \frac{M^k}{k!}\right) T^{-1} \qquad \text{(wegen (7.61))} \\
&= T\left(\lim_{\ell\to\infty} \sum_{k=0}^{\ell} \frac{M^k}{k!}\right) T^{-1} \qquad \text{(da Konjugieren mit } T \text{ stetig ist)} \\
&= T\operatorname{Exp}(M)T^{-1} \qquad \text{(gemäss der Definition (7.59)).}
\end{aligned}$$

Das beweist Proposition 7.24. □

Korollar 7.25 (Fundamentallösung für eine diagonalisierbare Matrix)**.** *Sei A eine diagonalisierbare Matrix, d. h., es gibt eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ so, dass*

$$A = T \operatorname{diag}\big(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\big) T^{-1}.$$

Dann ist die Fundamentallösung des Systems von GDG $\dot{U} = AU$ gegeben durch

$$\Phi(t) = \operatorname{Exp}(At) = T \operatorname{diag}\left(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\right) T^{-1}.$$

Bemerkung. Dieses Korollar liefert eine einfache Formel für die Fundamentallösung im Falle einer diagonalisierbaren Matrix A.

Beweis des Korollars 7.25: Es gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{Exp}(At) &= \operatorname{Exp}\left(T \operatorname{diag}\left(\lambda_1 t, \ldots, \lambda_n t\right) T^{-1}\right) \\
&= T \operatorname{Exp}\left(\lambda_1 t, \ldots, \lambda_n t\right) T^{-1} \qquad \text{(gemäss Proposition 7.24)} \\
&= T \operatorname{diag}\left(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\right) T^{-1} \qquad \text{(gemäss Beispiel 7.20).}
\end{aligned}$$

Das beweist das Korollar 7.25. □
Um die Fundamentallösung für eine diagonalisierbare Matrix A zu berechnen, brauchen wir auch noch die folgende Proposition aus der linearen Algebra.

Proposition 7.26 (Eigenwerte und -vektoren)**.** *Seien $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Wir schreiben T_j für die j-te Spalte der Matrix T. Die Gleichheit*

$$A = T \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\, T^{-1} \tag{7.62}$$

gilt genau dann, wenn für jedes $j = 1, \dots, n$ die Spalte T_j ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_j ist.

Beweis von Proposition 7.26: Wir zeigen die Implikation "$\Longleftarrow$". Wir nehmen an, dass für jedes $j = 1, \dots, n$ die Spalte T_j ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_j ist. Dann gilt für jedes j, dass $AT_j = T_j\lambda_j$ und darum dass

$$AT = T \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\,.$$

Daraus folgt die Gleichheit (7.62).

Die umgekehrte Implikation "$\Rightarrow$" folgt aus einem ähnlichen Argument. Das beweist Proposition 7.26. □

Im nächsten Beispiel berechnen wir die Eigenwerte und -vektoren einer Matrix. Diese Berechnungen werden wir im Beispiel 7.28 verwenden.

Beispiel 7.27. [Erinnerung an *Lineare Algebra*: charakteristisches Polynom einer Matrix, Eigenwert und -vektor] Das charakteristische Polynom der Matrix $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &:= \det(\lambda \mathbb{1} - A) \\ &= \det \begin{pmatrix} (\lambda - 2) & -1 \\ -1 & (\lambda - 2) \end{pmatrix} \\ &= (\lambda - 2)(\lambda - 2) - (-1)\cdot(-1) \\ &= \lambda^2 - 4\lambda + 3. \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von A, d. h. die Nullstellen von p_A, sind

$$\frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 3}}{2}, \qquad \lambda_1 = 3, \qquad \lambda_2 = 1. \tag{7.63}$$

Die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{7.64}$$

sind Eigenvektoren zu λ_1 und λ_2.

Bemerkung. [charakteristisches Polynom] In gewissen Büchern wird das charakteristische Polynom von A durch $p_A(\lambda) := \det(A - \lambda\mathbb{1})$ statt $\det(\lambda\mathbb{1} - A)$ definiert. Dieses Polynom unterscheidet sich von der hier verwendeten Definition durch den Faktor $(-1)^n$. Die beiden Polynome haben die gleichen Nullstellen. Darum können wir sie beide verwenden, um die Eigenwerte von A zu bestimmen. Der Vorteil der hier verwendeten Definition ist, dass der Leitkoeffizient[25] gleich 1 ist.

Beispiel 7.28. [Fundamentallösung für eine diagonalisierbare Matrix, Anfangswertproblem] Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Mit Hilfe von Korollar 7.25 und Proposition 7.26 berechnen wir die Fundamentallösung für das lineare System von GDG $\dot{U} = AU$. Wir definieren λ_1, λ_2 wie in (7.63) und v_1, v_2 wie in (7.64). Die Matrix $T := \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ist invertierbar. Aus Proposition 7.26 und Beispiel 7.27 folgt, dass die Gleichheit (7.62) gilt. Gemäss Korollar 7.25 gilt daher

$$\Phi(t) = \mathrm{Exp}(At) = T \,\mathrm{diag}\left(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}\right) T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathrm{diag}\left(e^{3t}, e^{t}\right) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}. \tag{7.65}$$

(ii) Wir betrachten jetzt das Anfangswertproblem

$$\dot{U} = AU, \qquad U(0) = U_0 := v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Gemäss Korollar 7.23 und der Formel (7.65) aus Teil (i) ist die Lösung dieses Problems gegeben durch

$$U = \Phi U_0 = T \,\mathrm{diag}\left(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}\right) \left(T^{-1} v_1 = (1, 0)\right) = T \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ 0 \end{pmatrix} = e^{\lambda_1 t} v_1 = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[25] Das ist der Koeffizient zur höchsten Potenz der Variablen, die im Polynom auftritt. Für das charakteristische Polynom ist diese Potenz gegeben durch λ^n.

Kapitel 8

Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$, Vektorfeld, Konservativität

Dieses Kapitel entspricht [Bla96b, 5.1, 5.2, 5.4, 6.1, 6.2, 6.4] und [Stra, Kapitel 7]. Wir betrachten in diesem Kapitel eine vektorwertige Funktion f mehrerer Veränderlicher. Für eine solche Funktion definieren wir Begriff einer partiellen Ableitung, welche die gewöhnliche Ableitung einer Funktion einer Variable (wie in Analysis 1) verallgemeinert. Die partielle Ableitung von f nach der i-ten Variable ist die gewöhnliche Ableitung der Funktion einer Variable, die wir aus f erhalten, indem wir alle Variablen ausser der i-ten festhalten.

Partielle Ableitungen treten zum Beispiel in der Divergenz eines Vektorfeldes auf. Die Divergenz kommt im Satz von Gauß vor, den wir in dieser Vorlesung behandeln werden.

8.1 Partielle und totale Differenzierbarkeit und Ableitung, Jacobi-Matrix

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96b, 5.1, 5.4] und [Stra, 7.1]. Um den Begriff einer partiellen Ableitung einer vektorwertigen Funktion zu definieren, brauchen wir die folgende Definition. Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$,

$$g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_p \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}^p$$

eine Funktion und $y_0 \in U$.

Definition 8.1 (Differenzierbarkeit und Ableitung einer vektorwertigen Funktion einer Variable)**.** *Wir nennen* g an der Stelle y_0 [1] differenzierbar *g. d. w. jede Komponente* g_i *im Punkt* y_0 *differenzierbar ist (im Sinn der Analysis 1). In diesem Fall definieren wir die* Ableitung von g im Punkt y_0 *als den Vektor*

$$g'(y_0) := \begin{pmatrix} g_1'(y_0) \\ \vdots \\ g_p'(y_0) \end{pmatrix}.$$

Bemerkungen. [oberer und unterer Index für Komponente eines Punktes]

- In der mehrdimensionalen Analysis verwenden wir bei theoretischen Betrachtungen, also z.B. in Definitionen und Sätzen, meistens einen oberen Index für die Komponenten eines Punktes. Wir schreiben also die i-te Komponente von $x \in \mathbb{R}^n$ als
$$x^i.$$
Das hat den Vorteil, dass die untere Position frei bleibt und daher durch einen weiteren Index besetzt werden kann. Auf diese Weise können wir z.B. die i-te Koordinate eines Punktes $x_0 \in \mathbb{R}^n$ elegant als x_0^i schreiben, ohne Klammern verwenden zu müssen.
- Der Ausdruck x_0^i kann nur als die i-te Komponente von x_0 verstanden werden, nicht als eine Potenz, da x_0 (im Fall $n \neq 1$) keine Zahl ist. Es besteht hier also keine Gefahr, den Index mit einem Exponenten zu verwechseln.
- Der obere Index für die Komponenten eines Punktes stimmt mit der Konvention der Physik überein, einen oberen Index für die Komponenten eines Vektors zu verwenden.
- Zur besseren Lesbarkeit werden wir manchmal abweichend einen unteren Index für die Komponenten verwenden. Insbesondere tun wir das in konkreten Beispielen, in denen ein oberer Index die Bedeutung einer Potenz hat.

Seien nun $n, p \in \mathbb{N}$, U eine offene[2] Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}^p$ eine Funktion. Das bedeutet, dass f eine vektorwertige Funktion mehrerer Veränderlicher ist. (Siehe die Beispiele 1.6.) Wir schreiben x^j für die j-te Koordinate eines Punktes $x \in \mathbb{R}^n$ und f^i für die i-te Komponente von f. Das bedeutet, dass

$$f(x) = \begin{pmatrix} f^1(x^1, \ldots, x^n) \\ \vdots \\ f^p(x^1, \ldots, x^n) \end{pmatrix}, \qquad \forall x \in U.$$

[1] oder *im Punkt* y_0 oder schlichtweg *in* y_0

[2] siehe Definition 4.12

Sei $x_0 \in U$ und $j \in \{1, \dots, n\}$.

Definition 8.2 (partielle Differenzierbarkeit, partielle Ableitung, Jacobi-Matrix)**.** *Wir nennen f* an der Stelle x_0 partiell nach der j-ten Variable x^j differenzierbar *g. d. w. die Funktion*

$$g(y) := f\big(x_0^1, \dots, x_0^{j-1}, y, x_0^{j+1}, \dots, x_0^n\big) \tag{8.1}$$

im Punkt $y = x_0^j$ im Sinn der Definition 8.1 differenzierbar ist. In diesem Fall definieren wir die partielle Ableitung von f nach der j-ten Variable im Punkt x_0 *als die Ableitung von g im Punkt x_0^j. Wir schreiben diese partielle Ableitung als*

$$f_{x^j}(x_0) := D_j f(x_0) := \partial_j f(x_0) := \frac{\partial f}{\partial x^j}(x_0) := g'(x_0^j) \in \mathbb{R}^p. \tag{8.2}$$

Wir sagen, dass f im Punkt x_0 partiell differenzierbar ist *g. d. w. f im Punkt x_0 nach jeder Variablen partiell differenzierbar ist. In diesem Fall definieren wir die* Jacobi-Matrix von f im Punkt x_0 *als die Matrix*

$$J_f(x_0) := \begin{pmatrix} f_{x^1}(x_0) & \cdots & f_{x^n}(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^1_{x^1}(x_0) & \cdots & f^1_{x^n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ f^p_{x^1}(x_0) & \cdots & f^p_{x^n}(x_0) \end{pmatrix}.$$

Wir nennen f partiell differenzierbar *g. d. w. f in jedem Punkt von U partiell differenzierbar ist. In diesem Fall definieren wir für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ die* partielle Ableitung von f nach der j-ten Variable *als die Abbildung*

$$f_{x^j} : U \to \mathbb{R}^p$$

gegeben durch (8.2).

Die Jacobi-Matrix ist nach Carl Gustav Jacobi benannt, siehe Abbildung 8.1.

Beispiele 8.3. [partielle Differenzierbarkeit, partielle Ableitung, Jacobi-Matrix]

(i) Für die bessere Lesbarkeit verwenden wir jetzt einen unteren Index für die Komponenten eines Punktes. Wir definieren

$$U := \mathbb{R}^2, \qquad f : U \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := f(x_1, x_2) := x_1 e^{x_2}.$$

Sei $p \in U$. Wir definieren

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(y) := f(y, p_2) = y e^{p_2}.$$

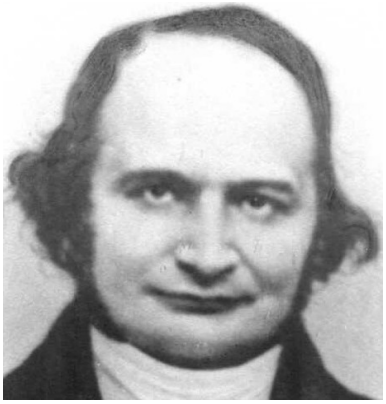


Abbildung 8.1: Carl Gustav Jacobi, 1804–1851, preussischer Mathematiker.

Diese Funktion ist im Punkt p_1 differenzierbar (im Sinn von Analysis 1). Daher ist f im Punkt p partiell nach der ersten Variable differenzierbar mit partieller Ableitung

$$f_{x_1}(p) = f_{x_1}(p_1, p_2) = g'(p_1) = e^{p_2}.$$

Ein ähnliches Argument zeigt, dass f im Punkt p partiell nach der zweiten Variable differenzierbar ist mit partieller Ableitung

$$f_{x_2}(p) = p_1 e^{p_2}.$$

(Überprüfen Sie das!) Die Jacobi-Matrix von f im Punkt $p := (2, 0)$ ist gegeben durch

$$J_f(2,0) = J_f(p) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(p) & f_{x_2}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(ii) Wir definieren

$$U := \mathbb{R}^2, \qquad f : U \to \mathbb{R}^2, \qquad f(x) := f(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} x_1 e^{x_2} \\ \sin(x_2) \end{pmatrix}.$$

Diese Funktion ist in jedem Punkt $p \in U$ partiell nach beiden Variablen differenzierbar mit partiellen Ableitungen

$$f_{x_1}(p) = \begin{pmatrix} e^{p_2} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad f_{x_2}(p) = \begin{pmatrix} p_1 e^{p_2} \\ \cos(p_2) \end{pmatrix}.$$

Die Jacobi-Matrix von f im Punkt $p := (2, 0)$ ist gegeben durch

$$J_f(2,0) = J_f(p) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(p) & f_{x_2}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Wir definieren

$$U := \mathbb{R}^2, \qquad f : U \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := |x_1 + x_2|.$$

Sei $p \in U$ so, dass $p_2 \neq -p_1$. Dann ist f im Punkt p partiell nach beiden Variablen differenzierbar mit partiellen Ableitungen

$$f_{x_1}(p) = f_{x_2}(p) = \begin{cases} 1, & \text{falls } p_2 > -p_1 \\ -1, & \text{falls } p_2 < -p_1. \end{cases}$$

Sei $p \in U$ jetzt so, dass $p_2 = -p_1$. Dann ist f im Punkt p nach keiner der beiden Variablen partiell differenzierbar. (Warum?)

Wir behandeln jetzt die *totale* Ableitung einer Funktion f mehrerer Variablen in einem Punkt x_0. Das ist eine lineare Abbildung, welche $f - f(x_0)$ in der Nähe von x_0 unter allen linearen Abbildungen am besten annähert. Die Ableitung ist daher die *Linearisierung* von f im Punkt x_0. Lineare Funktionen und "lineare Probleme" sind einfacher zu handhaben als nichtlineare. Linearisierung spielt deshalb eine grosse Rolle in Anwendungen. Zum Beispiel gibt es eine Formel für die allgemeine Lösung einer homogenen *linearen* gewöhnlichen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. (Siehe Satz 7.8 in Abschnitt 7.2.)

Wir definieren die euklidische Norm wie in (1.8). Seien $n, p \in \mathbb{N}$, U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^p$ eine Funktion und $x_0 \in U$.

Definition 8.4 ((totale) Differenzierbarkeit in einem Punkt)**.** *Wir nennen f* an der Stelle x_0 (total) differenzierbar *g. d. w. es eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ gibt so, dass*

$$g(x) := \frac{\big\|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)\big\|}{\|x - x_0\|} \to 0 \qquad \textit{für } x \to x_0. \tag{8.3}$$

Wir nennen f (total) differenzierbar *g. d. w. f an jeder Stelle in U differenzierbar ist.*

Bemerkung. Die Funktion g ist auf $U \setminus \{x_0\}$ definiert. (Im Punkt $x = x_0$ ist sie nicht definiert, da der Nenner $\|x - x_0\|$ gleich 0 ist.) Der Punkt x_0 liegt im Abschluss von $U \setminus \{x_0\}$. Die geforderte Konvergenz ist daher sinnvoll. (Siehe Definition 4.25.)

Proposition 8.5 (Jacobi-Matrix)**.** *(i) Falls f an der Stelle x_0 differenzierbar ist, dann ist f an der Stelle x_0* partiell *differenzierbar.*

(ii) Falls A eine lineare Abbildung ist, welche die Bedingung in Definition 8.4 erfüllt, dann ist A durch Matrixmultiplikation mit der Jacobi-Matrix von f im Punkt x_0 gegeben,

$$A = J_f(x_0)\cdot : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p.$$

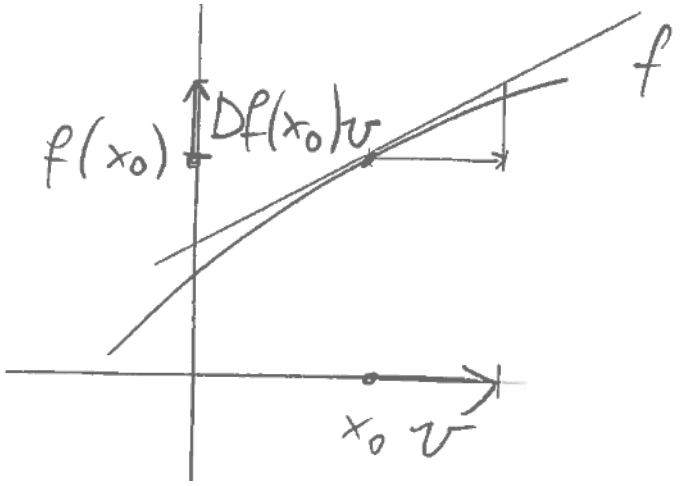


Abbildung 8.2: Das Differential einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Beweis: Das folgt aus einem Argument wie im Beweis von [DK04a, Lemma 2.2.3 p. 44].

Bemerkung. [Jacobi-Matrix] Aus dieser Proposition folgt, dass A eindeutig ist (falls es existiert).

Definition 8.6 (Ableitung in einem Punkt)**.** *Wir nennen die lineare Abbildung A (wie in Definition 8.4) die* (totale) Ableitung *(oder das* Differential*)* von f im Punkt x_0. *Wir schreiben dafür*

$$df(x_0) := Df(x_0) := A.$$

Abbildung 8.2 verdeutlicht diese Definition. $df(x_0)v$ ist eine Näherung für die Differenz $f(x_0 + v) - f(x_0)$. Wir können $df(x_0)$ daher als die Linearisierung von f im Punkt x_0 auffassen. Im Fall $\|v\| = 1$ stimmt $df(x_0)v$ mit der Richtungsableitung von f in Richtung v (im Punkt x_0) überein. Diese Richtungsableitung ist die Ableitung der Funktion $t \mapsto f(x_0 + tv)$ im Punkt $t = 0$. (Siehe Definition 8.17.) Das Differential beschreibt daher die Ableitung von f in jede Richtung.

Bemerkungen 8.7. [Ableitung einer Funktion in einem Punkt]

(i) Sei $n = 1$. Dann ist die Funktion f an der Stelle x_0 differenzierbar im Sinn von Definition 8.4 g. d. w. sie an dieser Stelle differenzierbar ist im Sinn von Analysis 1. In diesem Fall gilt

$$df(x_0) = f'(x_0)\cdot : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$$

(Multiplikation mit dem Vektor $f'(x_0)$). (Im Fall $p = 1$ ist $f'(x_0)$ eine reelle Zahl.)

(ii) In Analysis 1 wurde die Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt x_0 definiert als

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Naiv könnten wir daher versuchen, diese Definition auch für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ zu verwenden. Für $n \geq 2$ ergibt das allerdings keinen strikten Sinn, da wir einen Vektor in $\mathbb{R}^p$ nicht durch einen Vektor in $\mathbb{R}^n$ teilen können. Definition 8.4 ist der mathematisch sinnvolle Ersatz für die naive Definition.

Erklärung dafür: Gemäss Proposition 8.5 entspricht die Ableitung $df(x_0)$ der Jacobi-Matrix $J_f(x_0)$. Da *Matrix mal Vektor = Vektor*, ist die Idee, dass

"Vektor/ Vektor = Matrix".

Heuristisch ist der (nicht präzise definierte) "Quotient $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$" daher eine Matrix, die wegen der Bedingung (8.3) für $x \to x_0$ gegen die Jacobi-Matrix von f im Punkt x_0 konvergiert. Das erklärt, warum Definition 8.4 ein sinnvoller Ersatz für die naive Definition mittels eines Grenzwertes von Differenzenquotienten ist.

(iii) Das Wort *heuristisch* kommt vom altgriechischen Wort εὑρίσκω = *heurisko* = ich finde, entdecke. In der obigen heuristischen Erklärung ging es darum herauszu*finden*, warum eine bestimmte lineare Abbildung eine sinnvolle Verallgemeinerung der Ableitung einer Funktion einer Variablen darstellt. Es handelt sich dabei nicht um ein präzises mathematisches Argument.

(iv) Wir betrachten den Fall $n = p = 1$. Heuristisch meinen wir mit "infinitesimal" "unendlich klein, aber möglicherweise nicht gleich 0". Philosophisch ist eine "positive infinitesimale Grösse" also eine Grösse, die grösser als 0 ist, aber kleiner als jede positive reelle Zahl. Intuitiv betrachten wir eine "infinitesimale" Differenz $\Delta x \neq 0$, die wir ein "Differential dx" nennen. Wir schreiben "dy" für die zugehörige "infinitesimale" Differenz Δy. Heuristisch ist die Ableitung von f im Punkt x_0 durch den Quotienten dieser "Differentiale" gegeben, d. h.

$$f'(x_0) = \frac{\text{“}dy\text{”}}{\text{“}dx\text{”}}.$$

Die Ableitung $f'(x_0)$ wird daher manchmal *Differentialquotient* genannt. Das erklärt den Namen *Differential* für $df(x_0)$ wie in Definition 8.6 (für allgemeines n und p).[3]

(v) (Nichtstandardanalysis) In unserer Vorlesung ist der Begriff einer "infinitesimalen Grösse", wie zum Beispiel "dx" oder "dy", nur ein heuristisches Konzept. Wir können einer solchen Grösse keinen mathematischen Sinn als eine *reelle Zahl*

[3]Der Name "Differential*quotient*" wäre vielleicht noch intuitiver. Für $n > 1$ ist es allerdings unklar, was hier mit "Quotient" gemeint sein soll. Siehe Bemerkung (ii).

zuerkennen, da es keine (strikt) positive *reelle Zahl* gibt, die kleiner als jede strikt positive reelle Zahl ist. Es ist jedoch möglich, infinitesimale Grössen im Rahmen der sogenannten *Nichtstandardanalysis* [4] auf eine andere Art (mathematisch präzise) zu definieren.

Beispiel 8.8. [Ableitung einer affinen Funktion] Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ heisst *affin* g. d. w. es eine lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ und einen Vektor $w \in \mathbb{R}^p$ gibt so, dass

$$f(x) = T(x) + w =: Tx + w.^5$$

Jede affine Funktion ist differenzierbar (in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$), mit Ableitung

$$df(x_0) = T,$$

wobei T wie oben ist. (Überprüfen Sie das!)

Im nächsten Beispiel werden wir die folgende Bemerkung verwenden.

Bemerkung 8.9. [komponentenweise Differenzierbarkeit und Ableitung] Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^p$ eine Funktion und $x_0 \in U$. f ist in x_0 differenzierbar g. d. w. für jedes $i = 1, \ldots, p$ die i-te Komponente f^i in x_0 differenzierbar ist. In diesem Fall gilt

$$df(x_0) = \begin{pmatrix} d(f^1)(x_0) \\ \vdots \\ d(f^p)(x_0) \end{pmatrix}.$$

Das folgt aus den Definitionen von Differenzierbarkeit und Ableitung.

Beispiele 8.10. [Differenzierbarkeit und Ableitung]

(i) Wir definieren

$$U := \mathbb{R}^2, \qquad f : U \to \mathbb{R}^2, \qquad f(x) := f(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} x_1 e^{x_2} \\ \sin(x_2) \end{pmatrix}.$$

Diese Abbildung ist differenzierbar.

Beweis: Gemäss Übungsserie 2 (Kettenregel) ist die Abbildung $x \mapsto x_1 e^{x_2}$ differenzierbar. Die Abbildung $x \mapsto \sin(x_2)$ ist differenzierbar. Das folgt aus der Definition der totalen Differenzierbarkeit und der Tatsache, dass sin differenzierbar ist. Die Komponenten der Abbildung f sind also differenzierbar. Gemäss Bemerkung 8.9 ist f daher differenzierbar.

[4] Das ist ein Teilgebiet der Analysis.

[5] Wir lassen hier die Klammern um das Argument x weg, da T linear ist. (Das ist eine gängige Konvention.)

Nach Proposition 8.5 und Beispiel 8.3(ii) ist die Ableitung von f im Punkt $p := (2,0)$ gegeben durch

$$df(2,0)v = df(2,0)(v) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} v_1 + 2v_2 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

(ii) (bilineare Funktion ist differenzierbar) Seien $\ell, m \in \mathbb{N}$. Wir definieren $n := \ell + m$, $p := 1$ und schreiben $\mathbb{R}^n$ als das kartesische Produkt $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^m$ und einen Punkt in $x \in \mathbb{R}^n$ entsprechend als $x = (y, z)$. Sei $b : \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir nennen b *bilinear* g. d. w. b in beiden Argumenten linear ist, d. h., die Funktionen $y \mapsto b(y, z_0)$ und $z \mapsto b(y_0, z)$ sind linear für alle $y_0 \in \mathbb{R}^\ell$, $z_0 \in \mathbb{R}^m$. Wir nehmen jetzt an, dass b bilinear ist. Sei $x_0 = (y_0, z_0) \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^m$.

Behauptung: b ist im Punkt $x_0 = (y_0, z_0)$ (total) differenzierbar mit (totaler) Ableitung (= Differential) gegeben durch

$$db(x_0) = db(y_0, z_0) = A, \;\; Av := b(u, z_0) + b(y_0, w), \; \forall v = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^m. \tag{8.4}$$

Beweis: Wir definieren die *kanonischen Einheitsvektoren in* $\mathbb{R}^d$ als

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \ldots \qquad e_d := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir schreiben

$$b_{ij} := b(e_i, e_j).$$

Sei $x = (y, z) \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^m$. Wir definieren

$$v := \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} := x - x_0 = \begin{pmatrix} y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}.$$

Wir haben

$$\begin{aligned} & b(x) - b(x_0) - Av \\ & = b\big(y_0 + u, z_0 + w\big) - b(y_0, z_0) - A \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \\ & = b(u, w) \qquad \text{(da } b \text{ bilinear ist und wegen (8.4))} \\ & = \sum_{i=1,\ldots,\ell,\, j=1,\ldots,m} b_{ij} u_i w_j, \end{aligned} \tag{8.5}$$

wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, dass $u = \sum_{i=1}^{\ell} u_i e_i$, $w = \sum_{i=1}^{m} w_i e_i$ und dass b bilinear ist. Wir schreiben

$$C := \max_{ij} |b_{ij}| \ell m. \tag{8.6}$$

Behauptung:

$$\left| \sum_{i=1,\dots,\ell,\, j=1,\dots,m} b_{ij} u_i w_j \right| \leq C \|v\|^2 \tag{8.7}$$

Beweis der Behauptung: Da die Wurzel-Funktion monoton steigend ist, haben wir

$$|u_i| \leq \sqrt{\sum_{i'=1}^{\ell} u_{i'}^2} = \|u\|, \quad |w_j| \leq \|w\|, \quad \forall i, j. \tag{8.8}$$

Wir haben

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{i=1,\dots,\ell,\, j=1,\dots,m} b_{ij} u_i w_j \right| \\
&\leq \sum_{i=1,\dots,m,\, j=1,\dots,n} (|b_{ij} u_i w_j| = |b_{ij}||u_i||w_j|) \qquad \text{(Dreiecksungleichung)} \\
&\leq \max_{i'j'} |b_{i'j'}| \sum_{i=1}^{\ell} |u_i| \sum_{j=1}^{m} |w_j| \\
&\leq C\|u\|\|w\| \qquad \text{(wegen (8.6,8.8))} \\
&\leq C\big(\|u\|^2 + \|w\|^2\big) \qquad \text{(das gilt, falls } \|u\| \leq \|w\| \text{ und falls } \|u\| \geq \|w\|\text{)} \\
&= C\|v\|^2,
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Gleichheit $v = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$ und die Definition (1.8) der euklidischen Norm verwendeten. Das beweist die Behauptung (8.7).

Indem wir (8.5) und (8.7) kombinieren, erhalten wir die Ungleichung

$$\frac{\big|b(x) - b(x_0) - Av\big|}{\|v\|} \leq C\|v\|.$$

Die rechte Seite konvergiert gegen 0 für $v \to 0$. Daher gilt dasselbe auch für die linke Seite. Daraus folgt, dass b im Punkt x_0 differenzierbar ist mit Ableitung $db(x_0) = A$ gegeben durch (8.4).

Gemäss Proposition 8.5(i) ist jede differenzierbare Funktion *partiell* differenzierbar.

Frage. *Gilt auch die Umkehrung, d. h., ist jede partiell differenzierbare Funktion differenzierbar?*

Die Antwort auf diese Frage ist *nein*. Wie im Fall einer reellen Variable gilt auch für mehrere Variablen, dass jede differenzierbare Funktion stetig ist. Es gibt jedoch *partiell* differenzierbare Funktionen mehrerer Variablen, die unstetig und daher nicht differenzierbar sind.

Genauer gesagt, gilt Folgendes. Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^p$ eine Funktion und $x_0 \in U$ ein Punkt.

Proposition 8.11 (Differenzierbarkeit und Stetigkeit)**.** *Falls f im Punkt x_0 differenzierbar ist, dann ist f in x_0 stetig.*

Beweis: [DK04a, Corollary 2.2.8, p. 46]

Wir können diese Proposition verwenden, um zu zeigen, dass eine Funktion in einem Punkt nicht differenzierbar ist.

Beispiel. [unstetige partiell differenzierbare Funktion] Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Es gilt $f(\bullet, 0) \equiv 0$. Daher ist f in $x_0 = (0,0)$ partiell differenzierbar nach der ersten Variable x, mit partieller Ableitung $f_x \equiv 0$. Aus einem ähnlichen Grund ist f in $x_0 = (0,0)$ partiell differenzierbar nach der zweiten Variable y, mit partieller Ableitung $f_y \equiv 0$.

f ist jedoch im Punkt $x_0 = (0,0)$ unstetig, da

$$f(t,t) = \frac{1}{2}, \qquad \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \qquad f(0,0) = 0.$$

Bemerkung. Die Funktion f in diesem Beispiel ist sogar überall partiell differenzierbar. (Überprüfen Sie die Bedingung für $(x,y) \neq (0,0)$!) Trotzdem ist sie nicht einmal stetig.

Die Ableitung von f führt zur *besten affinen Näherung* von f: Wir nehmen an, dass f im Punkt x_0 differenzierbar ist. Dann ist die Abbildung

$$\varphi_{x_0} := \varphi^f_{x_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p, \quad \varphi_{x_0}(x) := f(x_0) + df(x_0)(x - x_0), \tag{8.9}$$

affin, d. h., eine lineare Abbildung plus eine Konstante. Diese Abbildung ist die *beste affine Näherung von f im Punkt x_0*, siehe Abbildung 8.3. Diese Eigenschaft motiviert die Definition der totalen Ableitung.

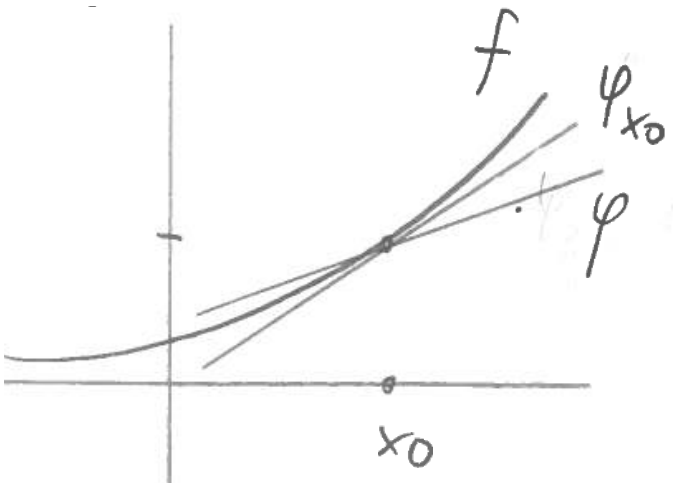


Abbildung 8.3: Die beste affine Näherung φ_{x_0} von f im Punkt x_0 und eine andere affine Abbildung φ.

8.2 Summen-, Produkt-, Quotienten- und Kettenregel für Ableitung, Richtungsableitung, Gradient, stetige Differenzierbarkeit

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96b, 5.1, 5.4] und [Stra, 7.2, 7.3, 7.6]. Ein zentrales Werkzeug in der Analysis ist die Kettenregel. Im Fall von reellwertigen Funktionen einer reellen Variable haben Sie diese Regel in Analysis 1 kennengelernt. Für vektorwertige Funktionen mehrerer Variablen gilt dieselbe Formel. Dabei ist die Ableitung einer solchen Funktion in einem Punkt eine lineare Abbildung. (Siehe Definition 8.6.) Das Produkt der Ableitungen der Funktionen wird jetzt zur Verknüpfung dieser linearen Abbildungen.

Seien $n, p, q \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $U' \subseteq \mathbb{R}^p$ offene Teilmengen und $f : U \to U'$ und $g : U' \to \mathbb{R}^q$ Abbildungen. Die Verknüpfung (oder Komposition) $g \circ f$ ist die Abbildung

$$g \circ f : U \to \mathbb{R}^q, \qquad g \circ f(x) := g(f(x)).$$

Sei $x_0 \in U$ ein Punkt.

Satz 8.12 (Kettenregel, [Stra], Satz 7.6.2, S. 178)**.** *Falls f in x_0 differenzierbar ist und g in $f(x_0)$ differenzierbar ist, dann ist $g \circ f$ in x_0 differenzierbar mit Ableitung*

$$d(g \circ f)(x_0) = dg(f(x_0)) \circ (df(x_0)) = dg(f(x_0))df(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q. \tag{8.10}$$

Beweis: S. 386

Bemerkungen. [Kettenregel]

- Auf der rechten Seite von (8.10) steht die Verknüpfung der linearen Abbildungen $dg(f(x_0))$ und $df(x_0)$. Da diese Abbildungen linear sind, lassen wir das Verknüpfungszeichen weg. (Das ist eine gängige Konvention.)

  Diese Verknüpfung ist sinnvoll, da der Zielbereich[6] von $df(x_0)$ $\mathbb{R}^p$ ist, was mit dem Definitionsbereich von $dg(f(x_0))$ übereinstimmt. Die verknüpfte Funktion ist eine Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^q$. Dasselbe gilt für die linke Seite von (8.10). Diese Gleichheit ist daher sinnvoll.

- Dieser Satz verallgemeinert die Kettenregel für Funktionen einer reellen Veränderlichen, welche besagt, dass im Fall $n = p = q = 1$ gilt:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0). \tag{8.11}$$

  (Siehe [Stra, Satz 5.1.3, S. 82].) Die Formeln (8.11,8.10) stimmen miteinander überein, da im Fall $n = p = 1$ gemäss Bemerkung 8.7(i) gilt:

$$df(x_0) = f'(x_0)\cdot : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

- Aus der Kettenregel und Proposition 8.5(ii) folgt, dass die Jacobi-Matrix der verknüpften Funktion gleich der Verknüpfung der Jacobi-Matrizen ist, genauer gilt

$$J_{g\circ f}(x_0) = J_g(f(x_0))J_f(x_0).$$

Beispiel 8.13. [quadratische Funktion ist differenzierbar] Sei $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine bilineare Funktion.

Behauptung: Die Funktion

$$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad h(x) := g(x, x),$$

ist in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar mit Ableitung

$$dh(x_0)v = g(v, x_0) + g(x_0, v). \tag{8.12}$$

Beweis: h ist gleich der Verknüpfung $g \circ f$, wobei

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad f(x) := (x, x).$$

Da g bilinear ist, ist diese Funktion gemäss Beispiel 8.10(ii) in jedem Punkt $(y_0, z_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ differenzierbar mit Ableitung

$$dg(y_0, z_0)(u, w) = g(u, z_0) + g(y_0, w).$$

[6] In [Stra, Definition 1.3.1, p. 8] wird der Zielbereich der *Bild-* oder *Wertebereich* genannt.

Die Abbildung f ist auch in jedem Punkt x_0 differenzierbar mit Ableitung

$$df(x_0)v = (v, v).$$

Das folgt aus Beispiel 8.8 (affine Funktion ist differenzierbar). Nach Satz 8.12 (Kettenregel) ist h daher in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar mit Ableitung

$$dh(x_0)v = dg(f(x_0))df(x_0)v = g(v, x_0) + g(x_0, v). \tag{8.13}$$

Das beweist 8.12.

Bemerkung 8.14. Wir nehmen an, dass g symmetrisch ist. (Das ist zum Beispiel der Fall, falls g ein Skalarprodukt ist.) Dann wird die (8.13) zur Gleichheit

$$dh(x_0)v = 2g(x_0, v).$$

Aus der Kettenregel folgt, dass Summe, Produkt und Quotient differenzierbarer Funktionen differenzierbar sind. Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ und $x_0 \in U$.

Korollar 8.15 (Ableitung von Summe, Produkt, Quotient, [Stra], Satz 7.6.1, S. 178)**.** *Wir nehmen an, dass f und g in x_0 differenzierbar sind. Es gilt:*

(i) Die Summe $f + g$ ist in x_0 differenzierbar und

$$d(f + g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0).$$

(ii) (Leibnizregel)Das Skalarprodukt $f \cdot g = \sum_{i=1}^{p} f^i g^i$ ist in x_0 differenzierbar und

$$d(f \cdot g)(x_0) = g(x_0) \cdot df(x_0) + f(x_0) \cdot dg(x_0),$$

wobei $g(x_0) \cdot df(x_0) := \sum_{i=1}^{p} g^i(x_0) df^i(x_0)$ usw.

(iii) Wenn $p = 1$ und $g(x_0) \neq 0$, dann ist der Quotient $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar und

$$d\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{g(x_0)df(x_0) - f(x_0)dg(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Bemerkung. Im Fall $n = p = 1$ haben Sie dieses Korollar in Analysis 1 kennengelernt. Siehe [Stra, Satz 5.1.2, S. 81].

Beispiel 8.16. [Ableitung von Produkt] Wir betrachten die Identitätsfunktion

$$f := g := \mathrm{id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad \mathrm{id}(x) := x.$$

Das Skalarprodukt $h := f \cdot g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist die quadratische Funktion

$$h(x) := (f \cdot g)(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|x\|^2.$$

Die Funktion id ist linear und daher gemäss Beispiel 8.8 differenzierbar mit Ableitung in x_0 gegeben durch

$$d\,\mathrm{id}(x_0) = \mathrm{id}\,.$$

Gemäss Korollar 8.15(ii) ist die Funktion h daher differenzierbar, mit Ableitung in x_0 gegeben durch

$$\begin{aligned} dh(x_0)(v) &= \big(g(x_0) \cdot df(x_0) + f(x_0) \cdot dg(x_0)\big)(v) \\ &= x_0 \cdot v + x_0 \cdot v \\ &= 2x_0 \cdot v. \end{aligned}$$

Das stimmt mit Beispiel 8.13 überein.

Beweis von Korollar 8.15: (ii): Wegen Bemerkung 8.9 ist die Funktion

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$$

im Punkt x_0 differenzierbar mit Ableitung

$$d\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}(x_0) = \begin{pmatrix} df(x_0) \\ dg(x_0) \end{pmatrix}. \tag{8.14}$$

Das Standard-Skalarprodukt, also die Funktion

$$h : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}, \qquad h(Y, Z) := Y \cdot Z,$$

ist bilinear. Gemäss Beispiel 8.10(ii) ist diese Funktion daher in jedem Punkt $(Y_0, Z_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitung

$$dh(Y_0, Z_0)(U, W) = h(U, Z_0) + h(Y_0, W) = U \cdot Z_0 + Y_0 \cdot W. \tag{8.15}$$

Die Funktion $f \cdot g : U \to \mathbb{R}$ ist gleich der Verknüpfung $h \circ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$. Gemäss der Kettenregel (Satz 8.12) ist diese Funktion daher im Punkt x_0 differenzierbar mit Ableitung

$$\begin{aligned} d(f \cdot g)(x_0)v &= d\left(h \circ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\right)(x_0)v \\ &= dh\big(f(x_0), g(x_0)\big)\, d\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}(x_0)v \\ &= dh\big(f(x_0), g(x_0)\big) \begin{pmatrix} df(x_0)v \\ dg(x_0)v \end{pmatrix} \qquad \text{(wegen (8.14))} \\ &= \big(df(x_0)v\big) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot dg(x_0)v \qquad \text{(wegen (8.15)).} \end{aligned}$$

Das beweist (ii).

Aussage (i) folgt mittels eines analogen Arguments aus der Gleichheit $f+g = h\circ\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$, wobei $h(Y,Z) := Y+Z$. Wir verwenden hierbei, dass h linear ist und Beispiel 8.8 (affine Funktion ist differenzierbar).

(iii): Im Fall $f \equiv 1$ folgt diese Aussage mittels eines analogen Arguments aus der Gleichheit $\frac{1}{g} = h \circ g$, wobei $h(y) := \frac{1}{y}$. Wir können die allgemeine Situation auf diesen Fall reduzieren, indem wir die Gleichheit $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ und (ii) verwenden. □

Wir beweisen jetzt Satz 8.12 (Kettenregel).

Beweisidee:

- Wir schreiben

$$y := f(x), \quad z := g(y), \quad \Delta x := x - x_0 \quad \text{etc.},$$

$$\Delta z - dg(y_0)df(x_0)\Delta x = \Delta z - dg(y_0)\Delta y + dg(y_0)\big(\Delta y - df(x_0)\Delta x\big). \qquad (8.16)$$

- Wir nehmen die euklidische Norm auf beiden Seiten dieser Gleichheit. Wir verwenden die Dreiecksungleichung. Wir teilen durch $\|\Delta x\|$.
- Die entstandenen Terme schätzen wir ab, indem wir verwenden, dass f und g an geeigneten Stellen differenzierbar sind.
- Daraus folgt, dass $g \circ f$ in x_0 differenzierbar ist mit Ableitung $dg(y_0)df(x_0)$.

Bemerkung. Die rechte Seite von 8.16 wird manchmal eine Teleskopsumme genannt, da sie aus der linken Seite dadurch entsteht, dass wir zwei Terme einfügen, die einander aufheben. Das so, als ob wir ein Teleskop auseinanderzögen, wodurch es länger wird.

Für jede lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ definieren wir die *Operatornorm (bzgl. den euklidischen Normen)* als

$$\|T\| := \sup_{v\in\mathbb{R}^n:\, \|v\|\le 1} \|Tv\|.$$

Das ist eine (endliche) Zahl. (Das folgt aus Korollar 4.33.)

Beweis des Satzes 8.12 (Kettenregel): Seien U, U', f, g, x_0 wie in diesem Satz vorausgesetzt. Wir definieren

$$y_0 := f(x_0), \quad z_0 := g(y_0).$$

Sei $x \in U \setminus \{x_0\}$. Wir schreiben

$$y := f(x), \quad z := g(y), \quad \Delta x := x - x_0, \quad \Delta y := y - y_0, \quad \Delta z := z - z_0,$$
$$S := df(x_0), \quad T := dg(y_0).$$

Es gilt, dass

$$\Delta z - TS\Delta x = \Delta z - T\Delta y + T\big(\Delta y - S\Delta x\big)$$

und daher, dass

$$\begin{aligned}\frac{\big\|\Delta z - TS\Delta x\big\|}{\|\Delta x\|} &\leq \frac{\big\|\Delta z - T\Delta y\big\|}{\|\Delta x\|} + \frac{\big\|T\big(\Delta y - S\Delta x\big)\big\|}{\|\Delta x\|} \\ &\leq \frac{\|\Delta z - T\Delta y\|}{\|\Delta y\|}\frac{\|\Delta y\|}{\|\Delta x\|} + \|T\|\frac{\big\|\Delta y - S\Delta x\big\|}{\|\Delta x\|}. \end{aligned} \tag{8.17}$$

Da f im Punkt x_0 differenzierbar ist, gilt, dass

$$\frac{\big\|\Delta y - S\Delta x\big\|}{\|\Delta x\|} \to 0 \quad \text{für } x \to x_0. \tag{8.18}$$

Es gibt daher ein $\delta > 0$ so, dass $B^n_\delta(x_0) \subseteq U$ und die linke Seite von 8.18 für jedes $x \in B^n_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ kleiner oder gleich 1 ist. Für dieses δ gilt

$$\begin{aligned}\sup_{x \in B^n_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}} \frac{\|\Delta y\|}{\|\Delta x\|} &\leq \sup_{x \in B^n_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}} \left(\frac{\big\|\Delta y - S\Delta x\big\|}{\|\Delta x\|} + \frac{\|S\Delta x\|}{\|\Delta x\|}\right) \\ &\leq 1 + \|S\| < \infty. \end{aligned} \tag{8.19}$$

Da g im Punkt y_0 differenzierbar ist, gilt, dass

$$\frac{\|\Delta z - T\Delta y\|}{\|\Delta y\|} \to 0 \quad \text{für } y \to y_0.$$

Da f in x_0 differenzierbar ist, ist diese Funktion gemäss Proposition 8.11 in x_0 stetig. Daher gilt $y \to y_0$ für $x \to x_0$. Darum folgt aus Hilfssatz 5.23, dass

$$\frac{\|\Delta z - T\Delta y\|}{\|\Delta y\|} \to 0 \quad \text{für } x \to x_0. \tag{8.20}$$

Wegen 8.19 folgt daraus, dass

$$\frac{\|\Delta z - T\Delta y\|}{\|\Delta y\|}\frac{\|\Delta y\|}{\|\Delta x\|} \to 0 \quad \text{für } x \to x_0.$$

(Überlegen Sie sich das!) Indem wir das mit (8.17,8.18) kombinieren, folgt daraus, dass

$$\frac{\big\|\Delta z - TS\Delta x\big\|}{\|\Delta x\|} \to 0 \quad \text{für } x \to x_0. \tag{8.21}$$

Also ist $g \circ f$ in x_0 differenzierbar mit Ableitung

$$d(g \circ f)(x_0) = TS = dg(f(x_0))df(x_0).$$

Das beweist Satz 8.12. □

Bemerkung. • Der Ausdruck

$$\frac{\|\Delta z - T\Delta y\|}{\|\Delta y\|}, \tag{8.22}$$

der in 8.17 und 8.20 auftritt, ist im Fall $\Delta y = 0$ a priori nicht sinnvoll, da wir dann durch 0 teilen. In diesem Fall *definieren wir* den Ausdruck (8.22) als 0. Mit dieser Definition gelten die Aussagen (8.17,8.20) auch im Fall $\Delta y = 0$.

Manchmal wollen wir wissen, wie sich eine Funktion bis zur ersten Ordnung ändert, wenn sich ihr Argument in eine bestimmte Richtung bewegt. Diese Idee wird durch die Richtungsableitung präzise gemacht. Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^p$ eine Funktion, $x_0 \in U$ und $v \in \mathbb{R}^n$. Wir definieren

$$W := \big\{ t \in \mathbb{R} \,\big|\, x_0 + tv \in U \big\}.$$

Definition 8.17 (Ableitung längs eines Vektors, Richtungsableitung)**.** *Wir sagen, dass* f an der Stelle x_0 längs des Vektors v differenzierbar ist *g. d. w. die Funktion*

$$g : W \to \mathbb{R}^p, \quad g(t) := f(x_0 + tv),$$

im Punkt $t = 0$ *differenzierbar ist*[7]*. In diesem Fall definieren wir die* Ableitung von f an der Stelle x_0 längs v *als den Vektor*

$$d_v f(x_0) := D_v f(x_0) := g'(0) := \begin{pmatrix} g_1'(0) \\ \vdots \\ g_p'(0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p. \tag{8.23}$$

Falls v *normiert ist, d. h.* $\|v\| = 1$*, dann nennen wir* $d_v f(x_0)$ *auch die (*Richtungs-*)*Ableitung von f an der Stelle x_0 in Richtung v.

Bemerkungen. [Richtungsableitung, partielle Ableitungen]

- In der Literatur wird $d_v f(x_0)$ oft für einen *allgemeinen* Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ *Richtungsableitung von* f *an der Stelle* x_0 *in Richtung* v genannt. Das ist etwas unglücklich, da eine *Richtung* ein *normierter* Vektor ist. Aus diesem Grund nennen wir $d_v f(x_0)$ im Allgemeinen stattdessen *Ableitung von* f *an der Stelle* x_0 *längs* v.

[7] im Sinn von Definition 8.1

- Falls f an der Stelle x_0 differenzierbar ist, dann ist f dort längs v differenzierbar und
$$d_v f(x_0) = df(x_0)v. \tag{8.24}$$
Beweis: Wir definieren den Weg[8]
$$x : W \to \mathbb{R}^n, \quad x(t) := x_0 + tv.$$
Dieser Weg ist im Punkt $t = 0$ differenzierbar mit Ableitung
$$x'(0) = v.$$
Nach der Kettenregel (Satz 8.12) ist $g := f \circ x$ daher im Punkt $t = 0$ differenzierbar, d. h. f ist in x_0 längs v differenzierbar und
$$d_v f(x_0) = g'(0) = (f \circ x)'(0) = df(x(0))x'(0) = df(x_0)v.$$
Das beweist (8.24).

- f ist im Punkt x_0 partiell nach der j-ten Variable differenzierbar g. d. w. f im Punkt x_0 längs e_j [9] differenzierbar ist. In diesem Fall gilt die Gleichheit
$$\frac{\partial f}{\partial x^j}(x_0) = D_j f(x_0) = d_{e_j} f(x_0). \tag{8.25}$$

Der *Gradient* einer reellwertigen Funktion in einem Punkt ist ein Vektor, der aus allen partiellen Ableitungen (erster Ordnung) der Funktion besteht. Er gibt die Richtung und Wert der stärksten Steigung der Funktion an. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ und $x \in U$. Wir nehmen an, dass f in x differenzierbar ist.

Definition 8.18 (Gradient)**.** *Der* Gradient von f an der Stelle x *ist der Vektor*
$$\nabla f(x) := \begin{pmatrix} D_1 f(x) \\ \vdots \\ D_n f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{x^1}(x) \\ \vdots \\ f_{x^n}(x) \end{pmatrix}.$$

Bemerkungen. [Gradient, nabla, stärkste Steigung]

- Das Symbol ∇ wird "nabla" ausgesprochen. Dieser Name kommt von einem antiken Saiteninstrument, das die Form einer Harfe hatte. Formal ist ∇ der Vektor
$$\nabla = (D_1, \ldots, D_n).$$

[8] Mit einem *Weg* meinen wir eine Funktion einer Variablen, die Werte in $\mathbb{R}^n$ annimmt.
[9] e_j ist der j-te kanonische Einheitsvektor. Siehe Beispiel 8.10(ii).

- Der Gradient von f an der Stelle x ist die Transponierte der Jacobi-Matrix von f,
$$\nabla f(x) = J_f(x)^T = \begin{pmatrix} f_{x^1}(x_0) & \cdots & f_{x^n}(x_0) \end{pmatrix}^T.$$
(Für jede Matrix A bezeichnet A^T die Transponierte von A. Diese Matrix ist gegeben durch $(A^T)^j{}_i = A^i{}_j :=$ (i,j)-ter Eintrag von A.)

- Wir nehmen an, dass $\nabla f(x) \neq 0$. Sei $v \in \mathbb{R}^n$ ein normierter Vektor. (Das bedeutet, dass $\|v\| = 1$.)

  Behauptung: Die Ableitung $d_v f(x)$ ist genau dann maximal, falls v in die Richtung von $\nabla f(x)$ zeigt, d. h. durch die Richtung von $\nabla f(x)$ gegeben ist, d. h.
$$v = \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}.$$

  Beweis: Es gilt
$$\begin{aligned} d_v f(x) &= df(x)v \\ &= \nabla f(x) \cdot v \\ &\leq \|\nabla f(x)\|\|v\| \qquad \text{(Cauchy-Schwarz-Ungleichung aus der linearen Algebra)} \\ &= \|\nabla f(x)\|, \end{aligned}$$
  mit Gleichheit g. d. w. $\nabla f(x)$ und v in die gleiche Richtung zeigen. Daraus folgt die Behauptung.

  Wegen dieser Behauptung ist der normierte Gradient $\frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$ die Richtung der stärksten Steigung (also des steilsten Anstiegs) von f im Punkt x. Die Norm des Gradienten ist die stärkste Steigung, da
$$\|\nabla f(x)\| = \frac{\nabla f(x) \cdot \nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|} = d_{\frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}} f(x).$$

- Der Name "Gradient" kommt vom lateinischen Wort *gradus*, was *Schritt* bedeutet.

Beispiel 8.19. [Gradient] Wir bezeichnen mit $\|\cdot\|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ und definieren
$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$
Der Gradient von f im Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch
$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ \vdots \\ 2x_n \end{pmatrix} = 2x.$$

Das stimmt mit dem Beispiel 8.13 überein. Gemäss jenem Beispiel gilt nämlich

$$df(x)v = 2g(x, v),$$

wobei $g(x, y) := x \cdot y$ (Standard-Skalarprodukt).

Eine Funktion f mehrerer Veränderlicher heisst *stetig differenzierbar* g. d. w. sie partiell differenzierbar ist und ihre partiellen Ableitungen stetig sind. In diesem Fall ist die Funktion differenzierbar. In gewissen Situationen ist stetige Differenzierbarkeit die "richtige" Bedingung. Damit meine ich, dass unter dieser Bedingung eine gegebene Aussage wahr ist, aber falsch unter der schwächeren Bedingung, dass f nur differenzierbar ist. Ein Beispiel dafür ist der Umkehrsatz. (Siehe Satz 9.6.)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

Definition 8.20 (stetige partielle Differenzierbarkeit)**.** *Wir nennen eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}^p$* stetig partiell differenzierbar *(oder schlichtweg* stetig differenzierbar *oder* von der Klasse C^1*) g. d. w. wenn f partiell differenzierbar ist und ihre partiellen Ableitungen stetig sind.*

Wir definieren die Menge

$$C^1(U, \mathbb{R}^p) := C^1(U; \mathbb{R}^p) := \big\{ f : U \to \mathbb{R}^p \,\big|\, f \text{ ist stetig differenzierbar} \big\}.$$

Im Fall $p = 1$ schreiben wir einfacher

$$C^1(U) := C^1(U, \mathbb{R}).$$

Proposition 8.21 (stetige partielle Differenzierbarkeit und Differenzierbarkeit)**.** *Jede stetig partiell differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}^p$ ist (überall) differenzierbar.*

Beweis: Das folgt aus [Stra, Satz 7.1.1, S. 157] und Bemerkung 8.9.

Bemerkung. Nach Proposition 8.21 und Proposition 8.11 ist jede stetig partiell differenzierbare Funktion stetig.

Beispiel 8.22. [Polynom ist C^1] Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heisst *Polynom (auf $\mathbb{R}^n$)* g. d. w. sie eine (endliche) lineare Kombination von Funktionen der Form

$$x \mapsto x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

ist, wobei $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}_0$. ($x_i$ bezeichnet die i-te Koordinate von $x \in \mathbb{R}^n$ und $x_i^{\alpha_i}$ die α_i-te Potenz von x_i.) Der Grad des Polynoms f ist die grösste Zahl $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ so, dass der Term $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ in f (mit einem nichtverschwindenden Koeffizienten) auftritt.

Ein Beispiel für ein Polynom auf $\mathbb{R}^3$ ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := -x_1^2 + 3x_1x_2^2 - \frac{1}{2}x_2^3x_3.$$

Der Grad dieses Polynoms ist 4, da für $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 1$ der Term $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}$ in f auftritt.

Behauptung: Jedes Polynom f auf $\mathbb{R}^n$ ist stetig (partiell) differenzierbar.

Beweis: Jede partielle Ableitung von f ist ein Polynom auf $\mathbb{R}^n$. Jedes Polynom ist stetig. Das folgt aus dem Argument in Beispiel 4.3(ii). Also ist f stetig partiell differenzierbar, wie behauptet.

Aus der Behauptung und Proposition 8.21 folgt, dass jedes Polynom auf $\mathbb{R}^n$ (total) differenzierbar ist.

Beispiel 8.23. [Polynom ist differenzierbar]

Problem: Zeige, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) := x_1x_2 + 1$, differenzierbar ist und berechne ihre Ableitung an der Stelle $p := (1, 2)$.

Lösung: Diese Funktion ist ein Polynom. Gemäss Beispiel 8.22 ist f stetig differenzierbar und daher differenzierbar. Um die Ableitung zu berechnen, berechnen wir die Jacobi-Matrix von f im Punkt $p := (1, 2)$. Für jedes $p \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$J_f(p) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(p) & f_{x_2}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_2 & p_1 \end{pmatrix}, \qquad \text{also} \qquad J_f(1,2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gemäss Proposition 8.5(ii) ist die Ableitung von f an der Stelle $p := (1, 2)$ gegeben durch die Multiplikation mit der Jacobi-Matrix von f im Punkt p, also

$$df(1,2) = J_f(1,2)\cdot = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad df(1,2)(v) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 2v_1 + v_2.$$

8.3 Vektorfeld, Potential, Wegintegral, Charakterisierung der Konservativität mittels Wegintegrale, Wegzusammenhang, physikalisches Beispiel: konservatives Kraftfeld

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96b, 6.1] und [Stra, 7.3, 7.4]. Ein *Vektorfeld* ist eine Abbildung X von einer Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$. In der Physik spielt X die Rolle einer vektorwertigen Grösse, zum Beispiel des Geschwindigkeitsvektorfeldes einer Flüssigkeit oder des elektrischen Feldes.

Ein *Potential* eines Vektorfeldes $X : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ deren Gradient ∇f gleich X ist.[10] Ein Vektorfeld besitzt genau dann ein Potential, wenn sein *Wegintegral* nur von den Endpunkten eines gegebenen Weges abhängt. Im Fall $U = \mathbb{R}^3$ ist das genau dann der Fall, falls $\nabla \times X$, die *Rotation* von X, gleich 0 ist.

Zum Beispiel erfüllt in der Elektrostatik das *elektrische Feld* $X = E$ diese Bedingung.[11] Es besitzt daher ein Potential. Der Unterschied dieses Potentials an zwei verschiedenen Punkten ist die *elektrische Spannung* zwischen den Punkten.

Als ein anderes Beispiel besitzt in der Strömungslehre das *Geschwindigkeitsvektorfeld* unter gewissen Bedingungen ein Potential.

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

Definition 8.24 (Vektorfeld, Gradientenfeld)**.** *Ein* Vektorfeld *auf U ist eine Abbildung*

$$X : U \to \mathbb{R}^n.$$

Sei $f \in C^1(U)$ (wie in Definition 8.20). Wir definieren das Gradientenfeld *von f als*

$$\nabla f : U \to \mathbb{R}^n, \qquad \nabla f(x) := \begin{pmatrix} D_1 f(x) \\ \vdots \\ D_n f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{x^1}(x) \\ \vdots \\ f_{x^n}(x) \end{pmatrix}.$$

Bemerkung. Im Punkt $x \in U$ ist das Gradientenfeld von f also durch den Gradienten von f an der Stelle x gegeben.

Beispiel 8.25. [Gradientenfeld] Das Gradientenfeld der Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \|x\|^2$$

ist gegeben durch

$$\nabla f(x) = 2x.$$

Siehe Beispiel 8.19.

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $X : U \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld.

[10] In der Physik verlangt man stattdessen, dass $-\nabla f = X$.

[11] In der Elektro*statik* wird angenommen, dass sich das elektrische und magnetische Feld (in der Zeit) nicht ändern. Die Elektro*dynamik* behandelt die allgemeine Situation, in der sich diese Felder ändern können. In dieser Situation ist die Rotation des elektrischen Feldes nicht mehr immer gleich 0.

Definition 8.26 (Potential und Konservativität eines Vektorfeldes)**.** *Ein* Potential für X *ist eine differenzierbare Funktion* $f : U \to \mathbb{R}$ *so, dass*

$$\nabla f = X.$$

Das Vektorfeld X *heisst* konservativ *g. d. w. es ein Potential besitzt.*

Bemerkungen. [Potential eines Vektorfeldes im 1-dimensionalen Fall, Stammfunktion]

- Wir betrachten den Fall $n = 1$. Dann ist X eine Funktion von einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Ein Potential für X ist eine *Stammfunktion* für X, d. h., eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ so, dass

  $$f' = X.$$

  Im Fall $n = 1$ ist jedes stetige Vektorfeld konservativ, da jede stetige Funktion eine Stammfunktion besitzt. Im Fall $U = \mathbb{R}$ können wir diese Stammfunktion zum Beispiel als das Integral

  $$f(x) := \int_0^x X(y)dy$$

  definieren. (Aus dem ersten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Satz 6.15(i)) folgt dann, dass $f' = X$.)

- Der Term *Konservativität* für die Eigenschaft in Definition 8.26 ist dadurch motiviert, dass in einem konservativen Kraftfeld die Energie erhalten bleibt, d. h. "konserviert" wird. Siehe Beispiel 8.39 unten.

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit den folgenden Problemen:

Probleme 8.27. *(i) Entscheide, ob ein gegebenes Vektorfeld* X *konservativ ist.*

(ii) Berechne in diesem Fall ein Potential für X*.*

Wir werden Kriterien für die Konservativität eines Vektorfeldes kennenlernen. (Siehe die Sätze 8.32 und 8.43.) Die Kriterien basieren auf Wegintegralen und partiellen Ableitungen des Vektorfeldes. Falls ein Potential existiert, dann werden wir ein solches mittels eines Wegintegrales konstruieren. (Siehe Satz 8.36.)

Seien $X : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld, $a \leq b$ reelle Zahlen und $\gamma : [a, b] \to U$ ein C^1-Weg, d. h.stetig differenzierbar.

Definition 8.28 (Wegintegral)**.** *Wir definieren das* Wegintegral von X längs γ *als*

$$\int X \cdot d\gamma := \int_a^b X(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt. \tag{8.26}$$

Bemerkungen.

- In der Physik spielt $\gamma(t)$ die Rolle des Ortes eines Teilchens zum Zeitpunkt t. Die Ableitung $\dot{\gamma}(t)$ ist dann die Geschwindigkeit des Teilchens zum Zeitpunkt t.

- **Infinitesimale Interpretation und Erklärung für die Notation:** Heuristisch fassen wir "dt" als den "infinitesimalen", d. h., "unendlich kleinen" Unterschied zwischen zwei Zeitpunkten auf, die "unendlich nahe beieinander liegen". Wir interpretieren "$d\gamma(t)$" als "$\gamma(t+dt)-\gamma(t)$", also als den "infinitesimalen Verbindungsvektor zwischen $\gamma(t)$ und $\gamma(t+dt)$". Dieser Vektor ist gegeben durch

$$\text{“ } d\gamma(t) = \frac{d\gamma}{dt}(t)dt = \dot{\gamma}(t)dt \text{ ”}.$$

  Daher ist das Integral auf der rechten Seite von (8.26) heuristisch gegeben durch die unendliche Summe

$$\begin{aligned} \text{“ } \int_a^b X(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt &= \sum_{t\in[a,b]} X(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt \\ &= \sum_{t\in[a,b]} X(\gamma(t)) \cdot d\gamma(t) \\ &= \int X \cdot d\gamma \text{ ”}. \end{aligned}$$

  Das erklärt die Notation $\int X \cdot d\gamma$ für das Wegintegral.

- Das Wort *heuristisch* kommt vom altgriechischen Wort εὑρίσκω = *heurisko* = ich finde, entdecke. In der obigen heuristischen Bemerkung ging es darum herauszu*finden*, warum die Notation $\int X \cdot d\gamma$ sinnvoll ist. Es handelt sich dabei nicht um eine präzise mathematische Erklärung.

- Im Skript [Stra] wird für das Wegintegral von X längs γ die Notation $\int_\gamma X \cdot d\vec{s}$ verwendet, siehe [Stra, Definitionen 7.4.2 und 7.4.3, S. 171].

- Wegintegrale spielen ein wichtige Rolle in der *Funktionentheorie = komplexen Analysis*. (Funktionentheorie wird im Fach *Mathematische Methoden für ITET und RW* behandelt.)

Beispiel 8.29. [Wegintegral] Wir betrachten den Weg in $U := \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) := \big(\cos t, \sin t\big).$$

Die Ableitung dieses Weges ist gegeben durch

$$\dot\gamma(t) = \big(-\sin t, \cos t\big) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Das Wegintegral eines stetigen Vektorfeldes X längs γ ist daher gegeben durch

$$\int X \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} X\big(\cos t, \sin t\big) \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt. \tag{8.27}$$

Wir betrachten jetzt das Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad X(x) := \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

(Zeichnen Sie dieses Vektorfeld!) Das Wegintegral von X längs γ ist gemäss (8.27) gegeben durch

$$\begin{aligned} \int X \cdot d\gamma &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \big((-\sin t)^2 + (\cos t)^2\big)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1\, dt \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

Beispiel 8.30. [Wegintegral des Kraftfeldes] Wir betrachten ein Teilchen in $U := \mathbb{R}^3$, auf welches eine Kraft $\mathbf{F}(x)$ wirkt, die vom Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ abhängt. Die Kraft $\mathbf{F}$ ist also ein Vektorfeld auf $\mathbb{R}^3$, das *Kraftfeld*. Wir schreiben $\gamma(t)$ für den Ort des Teilchens zum Zeitpunkt t. Das Wegintegral von $\mathbf{F}$ längs γ,

$$\int \mathbf{F} \cdot d\gamma$$

ist die Arbeit, welche das Kraftfeld am Teilchen verrichtet. Heuristisch ist die rechte Seite dieses Integrals nämlich die Summe "$\sum_{t\in[a,b]} \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot d\gamma(t)$", wobei "$d\gamma(t) = \gamma(t+dt) - \gamma(t)$". Die "infinitesimale Grösse $\mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot d\gamma(t)$" ist die Arbeit, die das Kraftfeld im "infinitesimalen Zeitinterval $[t, t+dt]$" am Teilchen verrichtet. (Arbeit = Kraft mal Weg.)

Folgender Satz charakterisiert Konservativität eines Vektorfeldes. Er liefert somit eine Methode, um Problem 8.27(i) zu lösen. Wir brauchen die folgende Definition. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge.

Definition 8.31 (Geschlossenheit eines Weges)**.** *Ein Weg* $\gamma : [a, b] \to U$ *heisst* geschlossen *g. d. w.* $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Wir nehmen jetzt an, dass U offen ist. Sei $X : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld.

Satz 8.32 (Charakterisierung der Konservativität eines stetigen Vektorfeldes mittels Wegintegrale)**.** *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(a) X *ist konservativ.*

(b) Das Wegintegral von X *längs eines stetig differenzierbaren Weges hängt nur von den Endpunkten des Weges ab, d. h.: Falls* $\gamma_i : [a_i, b_i] \to U$*,* $i = 0, 1$*, stetig differenzierbare Wege sind so, dass* $\gamma_0(a_0) = \gamma_1(a_1)$ *und* $\gamma_0(b_0) = \gamma_1(b_1)$*, dann gilt*

$$\int X \cdot d\gamma_0 = \int X \cdot d\gamma_1.$$

(c) Das Wegintegral von X *längs jedes stetig differenzierbaren geschlossenen Weges ist gleich null.*

Beweis: (a)⇒(b): siehe Seite 403.

(a)⇐=(b) folgt aus Satz 8.36. (Siehe unten.)

(b)⇔(c) folgt aus dem Beweis von [Stra, Satz 7.4.2, S. 168]. (Siehe auch [Stra, Satz 7.4.3, S. 171].)

Beispiel. [Wegintegral, nicht-konservatives Vektorfeld] Wir betrachten das Vektorfeld

$$X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad X(x) := \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Behauptung: X ist nicht konservativ.

Beweis: Wir betrachten den Weg

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) := \big(\cos t, \sin t\big).$$

Dieser Weg ist geschlossen. Gemäss Beispiel 11.7 ist das Wegintegral von X längs γ gegeben durch

$$\int X \cdot d\gamma = 2\pi \neq 0.$$

Gemäss dem Kontraponierten von Satz 8.32(a)⇒(c) ist X daher nicht konservativ.

Falls das Vektorfeld X konservativ ist, dann können wir dafür mittels des Wegintegrales und des Satzes 8.32 ein Potential konstruieren. Das ist Teil des folgenden Satzes. Um diesen Satz zu formulieren, brauchen wir die folgende Definition. Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definition 8.33 (weg-zusammenhängend, konvex)**.** *(i) S heisst* weg-zusammenhängend *g. d. w. $S \neq \emptyset$ und es für jedes Paar von Punkten $x_0, x_1 \in S$ einen stetigen Weg $\gamma : [0,1] \to S$ von x_0 nach x_1 gibt, d. h.*

$$\gamma(i) = x_i, \qquad \text{für } i = 0, 1.$$

(ii) S heisst konvex *g. d. w. für jedes Paar von Punkten $x_0, x_1 \in S$ und jedes $t \in [0,1]$ gilt:*

$$\gamma(t) := (1-t)x_0 + tx_1 \in S. \tag{8.28}$$

Beispiele 8.34. [weg-zusammenhängend, konvex]

(i) Falls S nicht leer und konvex ist, dann ist S weg-zusammenhängend, da dann für jedes Paar von Punkten $x_0, x_1 \in S$ die Funktion γ wie in (8.28) ein stetiger Weg von x_0 nach x_1 ist.

(ii) Jeder (offene oder abgeschlossene) Ball ist konvex. Insbesondere ist $\mathbb{R}^n$ konvex.

(iii) Wir betrachten den Fall $n = 1$. Eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist genau dann weg-zusammenhängend, wenn sie ein (möglicherweise leeres oder unbeschränktes) Intervall ist.

Bemerkung 8.35. [Wegzusammenhang] Falls $U \subseteq \mathbb{R}^n$ weg-zusammenhängend und *offen* ist, dann gibt es für jedes Paar von Punkten $x_0, x_1 \in U$ sogar einen stetig *differenzierbaren* Weg in U von x_0 nach x_1. Wir können nämlich jeden stetigen Weg von x_0 nach x_1 durch einen stetig differenzierbaren Weg annähern, wobei die Endpunkte festbleiben.

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $X : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld.

Satz 8.36 (Potentiale eines konservativen stetigen Vektorfeldes)**.** *Wir nehmen an, dass das Wegintegral von X längs eines stetig differenzierbaren Weges nur von den Endpunkten des Weges abhängt, d. h., dass Bedingung (b) (S. 397) erfüllt ist. Wir setzen auch voraus, dass U weg-zusammenhängend ist. Sei $x_0 \in U$. Wir definieren die Funktion*

$$f : U \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \int X \cdot d\gamma_x, \tag{8.29}$$

wobei für jedes $x \in U$ $a_x \leq b_x$ reelle Zahlen sind und $\gamma_x : [a_x, b_x] \to U$ ein stetig differenzierbarer Weg von x_0 nach x ist. Es gilt:

(i) f ist ein Potential für X, d. h., f ist differenzierbar und $\nabla f = X$.

(ii) Falls g ein Potential für X ist, dann gibt es eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ so, dass

$$g = f + C.$$

Beweis: (i) folgt aus der Behauptung im Beweis von [Stra, Satz 7.4.2, S. 168].

(ii) folgt aus [Stra, Satz 7.4.1, S. 168].

Bemerkungen. [Potentiale eines konservativen stetigen Vektorfeldes]

- Die Funktion (8.29) ist wohldefiniert, d. h.:

  (a) Ein Weg γ_x wie in dieser Definition existiert.

  (b) Das Wegintegral auf der rechten Seite hängt nicht von der Wahl von γ_x ab.

  (a) gilt gemäss Bemerkung 8.35. (b) folgt aus der Voraussetzung, dass das Wegintegral von X längs eines stetig differenzierbaren Weges nur von den Endpunkten des Weges abhängt.

- Satz 8.36 beschreibt alle Potentiale eines konservativen stetigen Vektorfeldes mittels Wegintegrale. (Dass der Satz alle Potentiale beschreibt, folgt aus Aussage (ii).) Je zwei Potentiale unterscheiden sich durch eine additive Konstante, falls das Gebiet U weg-zusammenhängend ist.

- Wir betrachten den Fall $n = 1$. In diesem Fall folgt Satz 8.36 aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für die Funktion $X : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Um das zu sehen, wählen wir $a_x := x_0$, $b_x := x$, $\gamma_x : [a_x, b_x] = [x_0, x] \to U$, $\gamma_x(t) := t$. Es gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \int X \cdot d\gamma_x \\ &= \int_{x_0}^{x} X(\gamma_x(t))\dot{\gamma}_x(t)\, dt \\ &= \int_{x_0}^{x} X(t) \cdot 1\, dt, \end{aligned}$$

$$\text{also} \qquad \nabla f(x) = f'(x) = \frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} X(t)dt = X(x),$$

gemäss dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für die Funktion X.

Wir nehmen an, dass U weg-zusammenhängend ist. Eine Methode, um die Probleme 8.27((i),(ii)) für ein gegebenes Vektorfeld X zu lösen, ist die folgende:

Methode 8.37 (Konservativität, Potential).

- *Wähle $x_0 \in U$ und für jedes $x \in U$ einen Weg γ_x.*
- *Definiere f wie in* (8.29).
- *Berechne ∇f.*
- *Falls $\nabla f = X$, dann ist X konservativ und f ein Potential für X.*
- *Falls $\nabla f \neq X$, dann ist X* nicht *konservativ.*

Die letzte Aussage folgt aus Satz 8.36(i).

Beispiele 8.38. [Konservativität und Potentiale eines Vektorfeldes] Wir verwenden Methode 8.37, um die Probleme 8.27((i),(ii)) für folgende Vektorfelder zu lösen.

(i) Wir betrachten das *Euler-Vektorfeld*, d. h. die Identitätsabbildung

$$X := \mathrm{id} : U := \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad X(x) = x.$$

Wir wählen ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$, der Einfachheit halber $x_0 := 0$. Sei $x \in U$. Wir definieren der Einfachheit halber

$$\gamma_x : [0,1] \to U, \qquad \gamma_x(t) := (1-t)x_0 + tx = tx.$$

Das ist ein stetig differenzierbarer Weg von $x_0 = 0$ nach x. Wir definieren die Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ wie in (8.29), d. h.

$$\begin{aligned} f(x) &:= \int X \cdot d\gamma_x \\ &= \int_0^1 X(\gamma_x(t)) \cdot \dot{\gamma}_x(t)\, dt \\ &= \int_0^1 tx \cdot x\, dt \\ &= \frac{t^2}{2}\Big|_{t=0}^1 \|x\|^2 \\ &= \frac{\|x\|^2}{2}. \end{aligned}$$

Diese Funktion ist quadratisch und daher differenzierbar. (Siehe Beispiel 8.13.) Ihr Gradient ist gemäss Beispiel 8.19 gegeben durch

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x = X(x).$$

Die Funktion f ist daher tatsächlich ein Potential für X. Somit haben wir das obige Problem gelöst.

(ii) Wir betrachten das Vektorfeld

$$X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad X(x) := \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Wir wählen ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$, der Einfachheit halber $x_0 := 0$. Sei $x \in U$. Wir definieren der Einfachheit halber

$$\gamma_x : [0,1] \to U, \qquad \gamma_x(t) := (1-t)x_0 + tx = tx.$$

Wir definieren die Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ wie in (8.29), d. h.

$$\begin{aligned} f(x) &:= \int X \cdot d\gamma_x \\ &= \int_0^1 X(\gamma_x(t)) \cdot \dot{\gamma}_x(t)\, dt \\ &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ tx_1 \end{pmatrix} \cdot x\, dt \\ &= \int_0^1 tx_1x_2\, dt \\ &= \frac{t^2}{2}\Big|_{t=0}^1 x_1x_2 \\ &= \frac{x_1x_2}{2}. \end{aligned}$$

Diese Funktion ist quadratisch und daher differenzierbar. Ihr Gradient ist gegeben durch

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{x_2}{2} \\ \frac{x_1}{2} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix} = X(x).$$

X ist daher *nicht* konservativ. (Das folgt aus Satz 8.36(i).)

Beispiel 8.39. [physikalische Interpretation, konservatives Kraftfeld, Arbeit, Energieerhaltung] Wir betrachten ein Teilchen in $\mathbb{R}^3$, auf welches eine Kraft $\mathbf{F}(x)$ wirkt, die stetig vom Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ abhängt. Wir nehmen an, dass $\mathbf{F}$ konservativ ist. Wir fixieren einen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^3$ und definieren die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ wie in (8.29) mit $X := \mathbf{F}$. Eine differenzierbare Funktion $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ so, dass

$$\mathbf{F} = -\nabla U$$

heisst *potentielle Energie* des Teilchens. Wir fixieren eine potentielle Energie U. (Da $\mathbf{F}$ konservativ ist, gibt es ein solches U.) Gemäss Satz 8.36(ii) gibt es eine Konstante C so, dass

$$-U = f + C. \tag{8.30}$$

Die potentielle Energie ist also bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt. Sei $x \in \mathbb{R}^3$. Aus (8.30) folgt, dass

$$f(x) - f(x_0) = -U(x) + U(x_0).$$

Gemäss Beispiel 8.30 und der Definition (8.29) ist $f(x) - f(x_0) = f(x)$ die *Arbeit*, die das Kraftfeld am Teilchen verrichtet, wenn es sich via des Weges γ_x von x_0 nach x bewegt. Diese Arbeit ist also gleich der Differenz der potentiellen Energie an den Punkten x_0 und x.

Falls γ_x der durch das Kraftfeld verursachte Weg des Teilchens ist, wird die am Teilchen verrichtete Arbeit in kinetische Energie des Teilchens umgewandelt. In diesem Fall ist daher die totale (=kinetische + potentielle) Energie des Teilchens am Anfang und am Ende des Weges gleich. In einem konservativen Kraftfeld bleibt also die totale Energie eines Teilchens erhalten. In einem System mit nur konservativen Kräften gibt es daher kein *Perpetuum mobile* erster Art. Damit meinen wir eine Maschine, die netto Energie erzeugt. Siehe Abbildung 8.4 für ein Bild einer solchen Maschine.

Um die Implikation (a)⇒(b) in Satz 8.32 (S. 397) zu beweisen, brauchen wir folgendes Lemma. Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U) = C^1(U, \mathbb{R})$, $a \leq b$ reelle Zahlen und $\gamma \in C^1\big([a,b], U\big)$.

Lemma 8.40 (Wegintegral eines Gradientenfeldes)**.** *Das Wegintegral des Gradientenfeldes ∇f längs des Weges γ ist die Differenz der Werte von f in den Endpunkten von γ,*

$$\int \nabla f \cdot d\gamma = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Beweis des Lemmas 8.40: Gemäss Satz 8.12 (Kettenregel) gilt

$$df(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t), \qquad \forall t \in [a,b]. \tag{8.31}$$

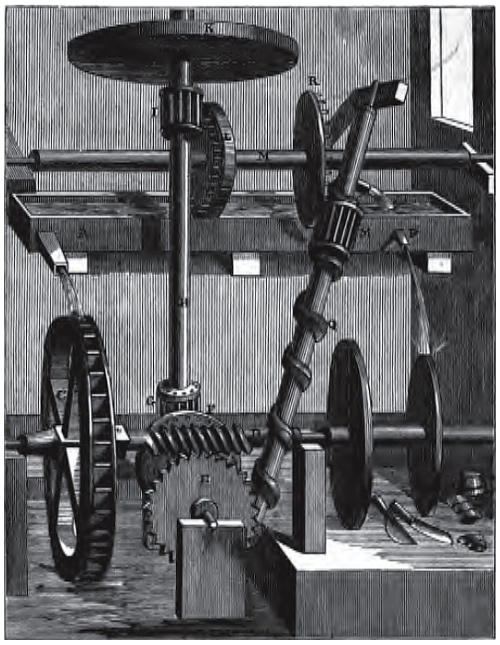


Abbildung 8.4: Ein Perpetuum mobile.

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned}\int \nabla f \cdot d\gamma &= \int_a^b \nabla f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt \\ &= \int_a^b df(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\, dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)\, dt \qquad \text{(gemäss (8.31))} \\ &= f \circ \gamma(b) - f \circ \gamma(a) \qquad \text{(gemäss dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung).}\end{aligned}$$

Das beweist Lemma 8.40. □

Beweis der Implikation (a)⇒(b) in Satz 8.32: Wir nehmen an, dass (a) gilt, also, dass X konservativ ist. D. h., es gibt eine differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ so, dass

$$\nabla f = X.$$

Seien $\gamma_i : [a_i, b_i] \to U$, $i = 0, 1$, stetig differenzierbare Wege so, dass

$$\gamma_0(a_0) = \gamma_1(a_1), \qquad \gamma_0(b_0) = \gamma_1(b_1). \tag{8.32}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\int X \cdot d\gamma_0 &= \int \nabla f \cdot d\gamma_0 \\ &= f(\gamma_0(b_0)) - f(\gamma_0(a_0)) \qquad \text{(gemäss Lemma 8.40)} \\ &= f(\gamma_1(b_1)) - f(\gamma_1(a_1)) \qquad \text{(gemäss (8.32))} \\ &= \int \nabla f \cdot d\gamma_1 \qquad \text{(gemäss Lemma 8.40)} \\ &= \int X \cdot d\gamma_1.\end{aligned}$$

Also gilt (b). Das beweist die Implikation (a)⇒(b) in Satz 8.32. □

8.4 Charakterisierung der Konservativität mittels Ableitungen, Integrabilitätsbedingung, Rotation eines Vektorfeldes, einfacher Zusammenhang, Holomorphie, Cauchy-Riemann-Gleichungen

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96b, 6.2, 6.4] und [Stra, 7.5]. Zusätzlich zu Satz 8.32 können wir die Konservativität eines Vektorfeldes mittels Ableitungen statt Integrale charakterisieren. Das ist der Inhalt des folgenden Satzes. Wir brauchen die folgende Definition. Wie in (1.11) schreiben wir $S_r^{d-1}(x_0) \subseteq \mathbb{R}^d$ für die Sphäre mit Mittelpunkt x_0 und Radius r. Im Fall $d = 2$, $x_0 = 0$ und $r = 1$ ist das der Einheitskreis[12]

$$S^1 := S_1^1(0).$$

Definition 8.41 (einfach zusammenhängend)**.** *Eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst* einfach zusammenhängend *g. d. w. S weg-zusammenhängend ist und für jede stetige Abbildung $\gamma : S^1 \to S$ es eine stetige Abbildung $h : [0,1] \times S^1 \to S$ gibt so, dass*

$$h(0, y) = \gamma(y),\ \forall y \in S^1, \qquad \gamma' := h(1, \cdot) : S^1 \to S \text{ ist konstant.}^{13}$$

Bemerkungen. [Schleife, Homotopie]

- Eine stetige Abbildung $\gamma : S^1 \to S$ heisst *Schleife in S*.

[12] In der Mathematik bezeichnet *Kreis* den Rand der Kreisscheibe (ohne das Innere).
[13] $\gamma'(y) = h(1, y)$

- Eine Abbildung h wie oben heisst *Homotopie* zwischen γ und γ'. Das erklärt die Wahl des Buchstabens h.

Beispiele 8.42. [(nicht-)einfach zusammenhängend]

(i) Jede nichtleere konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist einfach zusammenhängend. (Können Sie eine Homotopie h von einer gegebenen Schleife zu einer konstanten Schleife finden?) Gemäss Beispiel 8.34(ii) ist also jeder Ball einfach zusammenhängend. Insbesondere gilt das für $\mathbb{R}^n$.

(ii) Der Kreis $S := S^1$ ist *nicht* einfach zusammenhängend. Für die Identitätsabbildung $\mathrm{id} : S^1 \to S^1$ gibt es nämlich keine Homotopie zu einer konstanten Abbildung. Das folgt aus dem Beweis von [Hat02, Theorem 1.7, p. 29].

(iii) Aus dem letzten Beispiel folgt, dass die offene Teilmenge $S := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ von $\mathbb{R}^2$ *nicht* einfach zusammenhängend ist. Alternativ folgt das auch aus Korollar 8.45 unten. Siehe Beispiel 8.46.

Sei $n \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $X : U \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Vektorfeld.

Satz 8.43 (Charakterisierung der Konservativität mittels partieller Ableitungen, Integrabilität)**.** *(i) Falls X konservativ ist, dann erfüllt es die* Integrabilitätsbedingung

$$D_i X^j = D_j X^i, \qquad \forall i, j = 1, \ldots, n. \tag{8.33}$$

(ii) Falls U einfach zusammenhängend ist und (8.33) *erfüllt ist, dann ist X konservativ.*

Beweis: (i): S. 415

(ii): [Strb, Satz 9.9.3. ii), S. 308] Dieser Satz charakterisiert die Konservativität eines Vektorfeldes. Er liefert somit eine weitere Methode, um Problem 8.27(i) zu lösen.

Beispiele 8.44. [Charakterisierung der Konservativität mittels partieller Ableitungen, Integrabilitätsbedingung]

(i) Wir betrachten das *Euler-Vektorfeld*, d. h. die Identitätsabbildung

$$X := \mathrm{id} : U := \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad X(x) = x.$$

Seien $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ und $x \in U$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} D_i X^j(x) = \delta_i^j &:= \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \\ &= \delta_j^i \\ &= D_j X^i(x). \end{aligned}$$

Also erfüllt X die *Integrabilitätsbedingung* (8.33). Gemäss Beispiel 8.42(i) ist $U = \mathbb{R}^n$ einfach zusammenhängend. Gemäss Satz 8.43 ist X daher konservativ. Das stimmt mit dem überein, was wir in Beispiel 8.38(i) herausgefunden haben.

(ii) Wir betrachten das Vektorfeld

$$X : U := \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad X(x) := \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 + e^{(e^{x_2})} \end{pmatrix}.$$

Für $i = 1, j = 2$ und $x \in U$ berechnen wir

$$\begin{aligned} D_1 X^2(x) &= 1 + 0 \\ &\neq 0 \\ &= D_2 X^1(x). \end{aligned}$$

Daher ist X gemäss Satz 8.43 nicht konservativ.

Bemerkungen. [Charakterisierung der Konservativität mittels partieller Ableitungen, Integrabilitätsbedingung]

- Im Beispiel 8.44(ii) können wir alternativ versuchen, Methode 8.37 anzuwenden. Dazu müssen wir für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ das Wegintegral $\int X \cdot d\gamma_x$ für ein geeignetes γ_x berechnen. Es scheint schwierig, ein γ_x zu finden, wofür wir dieses Integral explizit berechnen können. (Versuchen Sie es!) In diesem Fall ist also die obige auf Satz 8.43 beruhende Methode einfacher.
- Falls U nicht einfach zusammenhängend ist, dann folgt aus der Integrabilitätsbedingung (8.33) im Allgemeinen *nicht*, dass X konservativ ist. Für ein Gegenbeispiel siehe Übungsserie 3 (Nicht-konservatives Vektorfeld mit verschwindender Rotation auf nicht-einfach zusammenhängendem Gebiet).

Als Anwendung von Satz 8.43(ii) erhalten wir die folgende hinreichende Bedingung dafür, dass eine offene Menge nicht einfach zusammenhängend ist.

Korollar 8.45 (Nicht-einfacher Zusammenhang)**.** *Eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist* nicht *einfach zusammenhängend, falls es ein C^1-Vektorfeld X gibt, das die Integrabilitätsbedingung* (8.33) *erfüllt, sowie einen geschlossenen stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [a, b] \to U$ so, dass das Wegintegral von X längs γ* un*gleich 0 ist.*

Beweis des Korollars 8.45: Aus Satz 8.43(ii) und Satz 8.32(a)⇒(c) folgt:

Wenn U einfach zusammenhängend ist, dann ist für jedes C^1-Vektorfeld X, das die Integrabilitätsbedingung (8.33) erfüllt und jeden geschlossenen stetig differenzierbaren Weg γ in U das Wegintegral von X längs γ gleich 0.

Das Kontraponierte dieser Aussage ist die Aussage des Korollars. Somit haben wir das Korollar bewiesen. □

Beispiel 8.46. [Nicht-einfacher Zusammenhang] **Behauptung:** Die Menge

$$U := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

ist nicht einfach zusammenhängend.

Beweis: Wir betrachten das C^1-Vektorfeld

$$X : U \to \mathbb{R}^2, \qquad X(x) := \frac{\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}}{\|x\|^2}.$$

Dieses Vektorfeld erfüllt die Integrabilitätsbedingung (8.33). (Siehe Übungsserie 3, nicht-konservatives Vektorfeld mit verschwindender Rotation auf nicht-einfach zusammenhängendem Gebiet.) Wir betrachten den geschlossenen stetig differenzierbaren Weg

$$\gamma : [0, 2\pi] \to U, \qquad \gamma(t) := (\cos t, \sin t).$$

Wir haben

$$\int X \cdot d\gamma = 2\pi \neq 0.$$

Das folgt aus einer Rechnung wie in Beispiel 11.7. Gemäss Korollar 8.45 folgt daher, dass U nicht einfach zusammenhängend ist.

In den Fällen $n = 2$ und $n = 3$ bedeutet die Bedingung (8.33) in Satz 8.43, dass die Rotation des Vektorfeldes X verschwindet. Diese Rotation ist wie folgt definiert.

Definition 8.47 (Rotation eines Vektorfeldes)**.** *(i) Fall $n = 2$: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $X : U \to \mathbb{R}^2$ ein differenzierbares Vektorfeld. Wir definieren die* (skalare) Rotation *(oder* Wirbelstärke*)* von X *als die reellwertige Funktion*

$$\operatorname{rot} X := D_1 X^2 - D_2 X^1 = \frac{\partial X^2}{\partial x^1} - \frac{\partial X^1}{\partial x^2} : U \to \mathbb{R}.$$

(ii) Fall $n = 3$: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $X : U \to \mathbb{R}^3$ ein differenzierbares Vektorfeld. Wir definieren die Rotation von X *als das Vektorfeld*

$$\vec{\operatorname{rot}} X := \nabla \times X := \begin{pmatrix} D_2 X^3 - D_3 X^2 \\ D_3 X^1 - D_1 X^3 \\ D_1 X^2 - D_2 X^1 \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}^3.$$

Bemerkung. Formal ist $\nabla \times X$ das Kreuzprodukt von $\nabla = \big(D_1, D_2, D_3\big)$ mit X. Das ist der Grund für diese Notation.

Beispiele. [Rotation eines Vektorfeldes]

- Das Vektorfeld
$$X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad X(x) := \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \tag{8.34}$$
hat Rotation
$$\operatorname{rot} X(x) = D_1 X^2(x) - D_2 X^1(x) = 1 - (-1) = 2.$$

- Das Euler-Vektorfeld
$$X := \mathrm{id} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad X(x) := x,$$
hat Rotation
$$\vec{\operatorname{rot}} X(x) = \begin{pmatrix} D_2X^3 - D_3X^2 \\ D_3X^1 - D_1X^3 \\ D_1X^2 - D_2X^1 \end{pmatrix}(x) = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = 0.$$

Bemerkung. [Integrabilitätsbedingung und Rotation] In den Fällen $n = 2$ und $n = 3$ ist die Integrabilitätsbedingung (8.33) äquivalent zur *Wirbelfreiheit* von X, d. h., zur Bedingung
$$\operatorname{rot} X = 0 \quad (n = 2), \qquad \text{respektive} \qquad \vec{\operatorname{rot}} X = 0 \quad (n = 3).$$

Der Name *Rotation* für $\operatorname{rot} X$ kommt davon, dass das Vektorfeld (8.34) eine nichtverschwindende Rotation hat und sein *Fluss* durch Rotationen (Drehungen) gegeben wird. Um das zu erklären und zu präzisieren, brauchen wir die folgende Bemerkung.

Bemerkung 8.48. [Fluss eines Vektorfeldes] Wir betrachten ein C^1-Vektorfeld X auf $\mathbb{R}^n$ und einen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Es gibt ein offenes Intervall I, das 0 enthält und eine stetig differenzierbare Lösung $x : I \to \mathbb{R}^n$ des Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen
$$\dot{x} = X \circ x \tag{8.35}$$
und der Anfangsbedingung
$$x(0) = x_0. \tag{8.36}$$
(Siehe [Stra, Satz 7.5.1, S. 185].) Die Lösung ist eindeutig, im Sinn, dass jedes Paar von Lösungen auf dem Durchschnitt der beiden Intervalle übereinstimmt. Der *Fluss*[14]

[14]Dieser Begriff des Flusses unterscheidet sich vom Fluss eines Vektorfeldes durch eine Fläche, der in den Sätzen von Stokes und Gauß auftritt. (Siehe später.)

des Vektorfeldes X ist eine Abbildung von einer offenen Teilmenge U von $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$, die durch die Gleichung

$$\varphi_X(t,x_0) := x(t)$$

definiert ist, wobei x die eindeutige Lösung von (8.35,8.36) ist. U ist dabei maximal.

Beispiel 8.49. [Fluss eines Vektorfeldes] Für jedes $c\in\mathbb{R}$ betrachten wir das Vektorfeld

$$X_c : \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, \qquad X_c(x) := c\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}. \tag{8.37}$$

Der Fluss von X_c ist gegeben durch

$$\varphi_{X_c} : U = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, \qquad \varphi_{X_c}(t,x_0) = R_{ct}(x_0),$$

wobei R_a die Drehung um den Ursprung in $\mathbb{R}^2$ um den Winkel a im Gegenuhrzeigersinn bezeichnet. (Überprüfen Sie, dass diese Abbildung φ_{X_c} die Bedingungen (8.35,8.36) löst!)

Bemerkungen 8.50. [Motivation für den Namen *Rotation*]

(i) Wir betrachten den Fall $n=2$ und das Vektorfeld X_c wie in (8.37). Gemäss Beispiel 8.49 ist der Fluss dieses Vektorfeldes durch Drehung um den Ursprung $x_0 := 0$ gegeben. Die Rotation von X_c im Punkt $x\in\mathbb{R}^2$ ist

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} X_c(x) &= c\big(\partial_{x_1}x_1 - \partial_{x_2}(-x_2)\big)\\ &= 2c\\ &= 2\cdot\text{Winkelgeschwindigkeit der durch } X_c \text{ hervorgerufenen Drehung.}\end{aligned}$$

Das motiviert den Namen *Rotation von* X für $\operatorname{rot} X$.

(ii) Wir betrachten jetzt den Fall $n=3$. Sei $A\in\mathbb{R}^{3\times3}$ eine antisymmetrische Matrix, d. h. $A^T=-A$. Wir betrachten das Vektorfeld X auf $\mathbb{R}^3$, das durch

$$X(x) := Ax$$

gegeben ist. In diesem Fall können wir die Rotation von X wie folgt geometrisch beschreiben. Wir schreiben $A^i{}_j$ für den (i,j)-ten Eintrag von A. Wir definieren

$$v := \begin{pmatrix} A^3{}_2 \\ A^1{}_3 \\ A^2{}_1 \end{pmatrix}. \tag{8.38}$$

Der Zeit-t-Fluss von X (definiert wie in Bemerkung 8.48) ist durch eine "Drehung um tv" gegeben, d. h. eine Drehung um die Achse $\frac{v}{\|v\|}$ um den Winkel $t\|v\|$, falls

$v \neq 0$, und durch die Identität, falls $v = 0$. Das folgt aus Bemerkung 8.48 und die Tatsache, dass es eine Orthonormalbasis v_1, v_2, v_3 von $\mathbb{R}^3$ gibt so, dass $X(v_1) = v_2$, $X(v_2) = -v_1$, $X(v_3) = 0$. (Warum gibt es eine solche Basis? Tipp: Definieren Sie $v_3 := v/\|v\|$, falls $v \neq 0$.)

Die Rotation des Vektorfeldes X im Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ ist durch zweimal die Winkelgeschwindigkeit dieser Drehung gegeben, d. h.

$$\vec{\text{rot}}X(x) = 2v = 2 \cdot \text{ Winkelgeschwindigkeit der durch } X \text{ erzeugten Drehung.} \tag{8.39}$$

Das motiviert den Namen "Rotation von X" für $\vec{\text{rot}}X$.

(iii) Aus der obigen Bemerkung ergibt sich die folgende strömungsmechanische Interpretation der Rotation eines Vektorfeldes. Sei $0 \neq A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine antisymmetrische Matrix. Wir betrachten eine strömende Flüssigkeit, deren Geschwindigkeit im Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ durch

$$v(x) := X(x) = Ax$$

gegeben ist. Wir platzieren einen kleinen harten Ball im Ursprung von $\mathbb{R}^3$. Nach einer gewissen Einlaufzeit dreht sich der Ball mit der Strömung mit, d. h., er dreht sich um die Achse $\frac{v}{\|v\|}$ mit Winkelgeschwindigkeit $\|v\|$, wobei v wie in (8.38) definiert ist. Das folgt aus Bemerkung (ii). Gemäss (8.39) ist die Rotation von X also gleich zweimal die Winkelgeschwindigkeit der Drehung des Balles.

In den folgenden Bemerkungen stellen wir eine Verbindung zur komplexen Analysis her. Wir zeigen mit Hilfe der Sätze 8.43 und 8.32 unter anderem, dass das komplexe Wegintegral einer holomorphen Funktion auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet nur von den Endpunkten des vorgegebenen Weges abhängt.

Bemerkungen. [Holomorphie, Cauchy-Riemann-Gleichungen, Integrabilitätsbedingung, (komplexes) Wegintegral]

- Wie Sie in *Mathematische Methoden für ITET und RW* gelernt haben, ist eine komplexwertige Funktion f auf $\mathbb{C}$ *holomorph*, d. h. komplex differenzierbar, g. d. w. f die Cauchy-Riemann-Gleichungen erfüllt.[15] Jede der beiden Cauchy-Riemann-Gleichungen entspricht der Integrabilitätsbedingung (8.33). Um das zu sehen, identifizieren wir $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$. Seien $U \subseteq \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ offen und

  $$f := u + iv : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

  eine Funktion. Wir definieren

  $$X := \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}, Y := \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}^2.$$

[15] Für die Implikation "$\Longleftarrow$" nehmen wir an, dass f partiell differenzierbar und stetig ist.

Wir schreiben die Standardkoordinaten in $\mathbb{R}^2$ als x, y. (Wir schreiben also einen Punkt in $\mathbb{R}^2$ als (x, y).) Die *Cauchy-Riemann-Gleichungen* für f lauten

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{8.40}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{8.41}$$

Gleichung (8.40) ist äquivalent zu

$$D_1 Y^2 = D_2 Y^1,$$

was äquivalent zur Integrabilitätsbedingung (8.33) ist.

Gleichung (8.41) ist äquivalent zu

$$D_2 X^1 = D_1 X^2,$$

was ebenfalls äquivalent zur Integrabilitätsbedingung (8.33) ist.

- Wir nehmen jetzt an, dass $f = u + iv : U \to \mathbb{C}$ holomorph ist und dass U einfach zusammenhängend ist. Sei $\gamma : [a, b] \to U$ ein stetig differenzierbarer Weg.

  Behauptung: Das *komplexe Wegintegral*[16]

  $$\int_\gamma f := \int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\, dt\,^{17}$$

  hängt nur von den Endpunkten von γ ab.

  Beweis: Es gilt (mit Re = Realteil)

  $$\mathrm{Re}\left(\int_\gamma f\right) = \int X \cdot d\gamma. \tag{8.42}$$

  (Überprüfen Sie das!) Das Vektorfeld $X = (u, -v)$ erfüllt wegen (8.41) die Integrabilitätsbedingung (8.33). Gemäss Satz 8.43(ii) ist X daher konservativ. Gemäss Satz 8.32(a)⇒(b) hängt $\int X \cdot d\gamma$ daher nur von den Endpunkten von γ ab. Wegen (8.42) gilt dasselbe für $\mathrm{Re}\left(\int_\gamma f\right)$.

  Analog gilt für $Y = (v, u)$, dass (mit Im = Imaginärteil)

  $$\mathrm{Im}\left(\int_\gamma f\right) = \int Y \cdot d\gamma.$$

  Aus der ersten Cauchy-Riemann-Gleichung (8.40) folgt, Y konservativ ist. Daher hängt $\mathrm{Im}\left(\int_\gamma f\right)$ nur von den Endpunkten von γ ab. Damit folgt die Behauptung.

[16] Siehe die Vorlesung *Mathematische Methoden für ITET und RW*.

[17] Hier tritt das Produkt der komplexen Zahlen $f(\gamma(t))$ und $\dot{\gamma}(t)$ auf.

8.5 Partielle Ableitungen höherer Ordnung, Satz von Schwarz über Vertauschen partieller Differentiationen, Taylorformel, lokale Extremalstelle, Hesse-Matrix

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96b, 5.2] und [Stra, 7.5]. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

Definition 8.51 (höhere (stetige) partielle Differenzierbarkeit, C^k)**.** *Wir nennen jede Funktion $f : U \to \mathbb{R}^p$* 0-mal partiell differenzierbar *(keine Bedingung). Ihre (eindeutige) partielle Ableitung* 0*-ter Ordnung ist f. Rekursiv definieren wir für $k \in \mathbb{N}$:*

Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}^p$ heisst k-mal partiell differenzierbar *g. d. w. sie $(k-1)$-mal partiell differenzierbar ist und ihre partiellen Ableitungen $(k-1)$-ter Ordnung partiell differenzierbar sind. Die partiellen Ableitungen von f k-ter Ordnung sind die Funktionen $D_j g$, wobei $j \in \{1, \dots, n\}$ und g alle partiellen Ableitungen von f $(k-1)$-ter Ordnung durchläuft.*

Wir nennen f k-mal stetig partiell differenzierbar *(oder* k-mal stetig differenzierbar *oder schlicht C^k) g. d. w. f k-mal partiell differenzierbar ist und ihre partiellen Ableitungen k-ter Ordnung stetig sind. Für $k \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die Menge*

$$C^k(U, \mathbb{R}^p) := C^k(U; \mathbb{R}^p) := \{f : U \to \mathbb{R}^p \mid f \text{ ist } k\text{-mal stetig partiell differenzierbar}\}.$$

Wir nennen f beliebig oft stetig partiell differenzierbar *(oder C^∞ oder* glatt*) g. d. w. f C^k ist für jedes $k \in \mathbb{N}_0$.*

Bemerkungen. [höhere (stetige) partielle Differenzierbarkeit, C^k]

- (Rekursion) Die Definition der k-fachen Differenzierbarkeit beruht auf *Rekursion* über k. In einer rekursiven Definition definieren wir zuerst ein Objekt oder einen Begriff A_0 und dann für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein Objekt oder einen Begriff A_k mittels A_{k-1}. Zum Beispiel ist das Produkt $A_k := kn$ zweier natürlicher Zahlen k, n rekursiv definiert durch

  $$A_0 := 0, \qquad A_k := A_{k-1} + n.$$

  (Überprüfen Sie, dass diese Definition mit Ihrer Intuition des Produktes übereinstimmt!)

  In der Definition 8.51 ist A_k der Begriff der k-fachen partiellen Differenzierbarkeit von f zusammen mit dem Begriff der partiellen Ableitungen von f k-ter Ordnung.

  Zum Beispiel heisst f gemäss dieser Definition 1-mal partiell differenzierbar g. d. w. f $1 - 1 = 0$-mal partiell differenzierbar ist und die partiellen Ableitungen von f 0-ter Ordnung partiell differenzierbar sind[18]. f ist 1-mal partiell

[18] im Sinn der Definition 8.2

differenzierbar g. d. w. f partiell differenzierbar ist. In diesem Fall sind die partiellen Ableitungen von f 1-ter Ordnung gerade die partiellen Ableitungen von f [19].

Als ein weiteres Beispiel heisst f gemäss Definition 8.51 2-mal partiell differenzierbar g. d. w. f 1-mal partiell differenzierbar ist und die partiellen Ableitungen von f 1-ter Ordnung partiell differenzierbar sind. Das bedeutet, dass f partiell differenzierbar ist und dass die partiellen Ableitungen von f ebenfalls partiell differenzierbar sind.

- Die partiellen Ableitungen von f k-ter Ordnung sind die Funktionen

$$D_{j_k} \cdots D_{j_1} f \qquad \text{mit} \qquad j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, n\}, \qquad D_j = \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

- Jede k-mal stetig partiell differenzierbare Funktion Funktion f besitzt stetige partielle Ableitungen i-ter Ordnung für $i \in \{0, \ldots, k\}$. Das folgt aus:
  - Proposition 8.21: (1-mal) stetig partiell differenzierbar $\Rightarrow$ differenzierbar
  - Proposition 8.11: differenzierbar $\Rightarrow$ stetig

  Jede C^k-Funktion ist also auch von der Klasse $C^{k-1}, \ldots, C^0$.

- $C^0(U, \mathbb{R}^p)$ ist die Menge der stetigen Funktionen von U nach $\mathbb{R}^p$.

- Die Definition von C^k im Skript [Stra] (Definition 7.5.1, S. 171, Definition 7.5.2, S. 173) ist ein wenig anders formuliert. Sie ist äquivalent zur Definition 8.51.

Beispiel. Jedes Polynom auf $\mathbb{R}^n$ [20] ist glatt. Das folgt aus einem Argument wie in Beispiel 8.22.

Eine wichtige Eigenschaft einer C^k-Funktion ist, dass es für eine solche Funktion nichts ausmacht, in welcher Reihenfolge wir die partiellen Ableitungen nehmen. Das ist der Inhalt des folgenden Satzes von Schwarz. Seien $n \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(U) = C^2(U, \mathbb{R})$ und $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Satz 8.52 (Schwarz, Vertauschen partieller Differentiationen[21])**.** *Es gilt*

$$D_i D_j f = D_j D_i f.$$

Beweis: [Stra, Satz 7.5.1, S. 171]

Dieser Satz ist nach Hermann Schwarz benannt, siehe Abbildung 8.5.

[19] im Sinn der Definition 8.2

[20] siehe die Definition in Beispiel 8.22

[21] Mit "Differentiation" meinen wir "Ableitung nehmen".



Abbildung 8.5: Hermann Schwarz, 1843–1921, deutscher Mathematiker.

Beispiel. [Satz von Schwarz, Vertauschen partieller Differentiationen] Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x_1 x_2^2.$$

($x_i :=$ i-te Koordinate von x) Diese Funktion ist von der Klasse C^2. (Sie ist sogar glatt.) Wir berechnen

$$\begin{aligned} D_1 f(x) = x_2^2, \quad \text{also} \quad D_2 D_1 f(x) = D_2(D_1 f)(x) = 2x_2, \\ D_2 f(x) = x_1 \cdot 2x_2, \quad \text{also} \quad D_1 D_2 f(x) = 2x_2 = D_2 D_1 f(x). \end{aligned}$$

In diesem Beispiel haben wir also die Aussage des Satzes 8.52 durch eine direkte Rechnung gezeigt.

Bemerkung. [Vertauschen partieller Differentiationen] Die Aussage des Satzes 8.52 ist falsch, falls wir nur voraussetzen, dass f zweimal partiell differenzierbar ist. Ein Beispiel dafür ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Funktion ist nämlich zweimal partiell differenzierbar mit

$$\partial_x \partial_y f(0,0) = 1 \neq -1 = \partial_y \partial_x f(0,0).$$

(Rechnen Sie das nach!)

Aus Satz 8.52 folgt, dass die Reihenfolge partieller Differentiationen keine Rolle spielt, falls die gegebene Funktion genügend oft stetig partiell differenzierbar ist. Das ist der Inhalt des folgenden Korollars. Sei $m \in \mathbb{N}$.

Korollar 8.53 (Vertauschen partieller Differentiationen)**.** *Partielle Differentiationen dürfen beliebig vertauscht werden, falls eine C^m-Funktion insgesamt m-mal partiell differenziert wird.*

Beweis: Das folgt aus Satz 8.52.

Bemerkungen. [Vertauschen partieller Differentiationen] Zum Beispiel gilt, dass

$$D_2 D_5 D_3 f = D_5 D_3 D_2 f,$$

falls f C^3 ist.

Eine weitere Anwendung von Satz 8.52 ist Satz 8.43(i), welcher besagt, dass jedes konservative C^1-Vektorfeld X die Integrabilitätsbedingung (8.33) erfüllt, also

$$D_i X^j = D_j X^i, \qquad \forall i, j = 1, \ldots, n.$$

Beweis von Satz 8.43(i): Da X konservativ ist, besitzt es ein Potential, also eine differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ so, dass $\nabla f = X$. Da X (von der Klasse) C^1 ist, ist f C^2. Für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt

$$\begin{aligned} D_i X^j &= D_i D_j f && \text{(wegen } \nabla f = X\text{)} \\ &= D_j D_i f && \text{(gemäss Satz 8.52, da } f \ C^2 \text{ ist)} \\ &= D_j X^i && \text{(wegen } \nabla f = X\text{).} \end{aligned}$$

D. h., X erfüllt die Integrabilitätsbedingung (8.33). Das beweist Satz 8.43(i). □

Sei $m \in \{-1, 0, 1, \ldots\}$. Wie im eindimensionalen Fall können wir eine C^m-Funktion f durch ihre Taylorformel ausdrücken. Das ist der Inhalt des nächsten Satzes. In der Taylorformel kommt das Taylorpolynom m-ter Ordnung von f vor. Aus der Formel folgt, dass das Taylorpolynom die Funktion f annähert. Da Polynome einfache Funktionen sind, werden Funktionen in vielen Anwendungen daher näherungsweise durch ihre Taylorpolynome ersetzt.

Seien $k \in \mathbb{N}_0$ und $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$. Im Fall $k = 0$ haben wir die leere Liste von Zahlen. Wir schreiben

$$\prod_{i=1}^{k} a_i := a_1 \cdots a_k$$

für das Produkt dieser Zahlen. Im Fall $k = 0$ nennen wir $\prod_{i=1}^{k=0} a_i$ das *leere Produkt*. Das ist das Produkt aller Zahlen in der leeren Liste. Wir verwenden dann die Konvention

$$\prod_{i=1}^{k=0} a_i := 1.$$

Seien $n \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in U$. Falls $m \geq 0$, dann nehmen wir an, dass f m-mal partiell differenzierbar ist.

Definition 8.54 (Taylorpolynom)**.** *Wir definieren das* Taylorpolynom von f m-ter Ordnung zum Entwicklungspunkt x_0 *als die Funktion* $T^m_{f,x_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *gegeben durch*[22]

$$\begin{aligned} T^m_{f,x_0}(x) :=& \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} D_{i_k} \cdots D_{i_1} f(x_0) \prod_{j=1}^{k} (x - x_0)_{i_j} \qquad (8.43) \\ =& f(x_0) + \sum_{i_1=1}^{n} D_{i_1} f(x_0)(x - x_0)_{i_1} + \frac{1}{2} \sum_{i_1,i_2=1}^{n} D_{i_2} D_{i_1} f(x_0)(x - x_0)_{i_1}(x - x_0)_{i_2} \\ &+ \cdots + \frac{1}{m!} \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{n} D_{i_m} \cdots D_{i_1} f(x_0)(x - x_0)_{i_1} \cdots (x - x_0)_{i_m}. \end{aligned}$$

Bemerkungen. [Taylorpolynom]

- In der Summe $\sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n}$ summieren wir über alle Tupel von Indizes $(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, n\}^k$. Wir können diese Summe auch als die iterierte Summe $\sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n}$ schreiben. Jeder Index $i_1, \dots, i_k$ läuft also von 1 bis n.

- Im Produkt $\prod_{j=1}^{k} (x - x_0)_{i_j}$ tritt der Index i_j auf, der wiederum einen Index, nämlich j, trägt. Der Index j läuft von 1 bis k. Wir erhalten also die Indizes $i_1, \dots, i_k$. Das Produkt ist somit gegeben durch

$$\prod_{j=1}^{k} (x - x_0)_{i_j} = (x - x_0)_{i_1} \cdots (x - x_0)_{i_k}.$$

  Zum Beispiel ist für $n := 4$, $k := 5$, $x_0 := 0$, $x := \big(-1, 2, 4, 1\big)$, $i_1 := 3$, $i_2 := 1$, $i_3 := 1$, $i_4 := 3$, $i_5 := 1$ das Produkt gegeben durch

$$\prod_{j=1}^{k} (x - x_0)_{i_j} = x_3 x_1 x_1 x_3 x_1 = 4 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 4 \cdot (-1) = -16.$$

  Wir benötigen doppelte Indexierung, um das Taylorpolynom in mehreren Variablen zu definieren, da wir nicht einfach Indizes "a, b, c usw. " statt $i_1, \dots, i_k$ verwenden können. (Was ist zum Beispiel der letzte Index in "a, b, c usw. ", welcher die Rolle von i_k spielt?)

[22] Für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ und jeden Index $i = 1, \dots, n$ bezeichnet v_i hier die i-te Koordinate von v.

- In der Formel (8.43) tritt $k! := \prod_{i=1}^{k} i = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot k$ (k Fakultät) auf. Im Fall $k = 0$ ist das das leere Produkt $0! = 1$.

- Im Fall $m = -1$ ist die rechte Seite von (8.43) eine leere Summe. Diese ist als 0 definiert. Daher ist
$$T^{-1}_{f,x_0} \equiv 0.$$

- Im Fall $m = 0$ ist
$$T^{0}_{f,x_0} \equiv f(x_0).$$

- Im Fall $m = 1$ ist
$$\begin{aligned} T^{1}_{f,x_0}(x) &= f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} D_i f(x_0)(x - x_0)_i \\ &= f(x_0) + df(x_0)(x - x_0). \end{aligned}$$
Das ist die beste affine Näherung von f im Punkt x_0, die wir in (8.9) kennengelernt haben. Das Taylorpolynom verallgemeinert also die beste affine Näherung.

- In [Stra, Bemerkung 7.5.3, S. 174] wird die Notation
$$T_m f(x, x_0) := T^{m}_{f,x_0}(x)$$
verwendet.

Beispiel 8.55. [Taylorpolynom]Wir betrachten die Funktion
$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \sin\left(\|x\|^2\right).$$
Wir berechnen das Taylorpolynom von f m-ter Ordnung zum Entwicklungspunkt $x_0 := 0$ für $m = 0, 1, 2$. Dazu berechnen wir mittels der Kettenregel und der Leibnizregel (=Produktregel)
$$D_i f(x) = \cos\left(\|x\|^2\right) \cdot 2x_i,\ D_j D_i f(x) = -\sin\left(\|x\|^2\right) \cdot 2x_j \cdot 2x_i + \cos\left(\|x\|^2\right) \cdot 2\delta_{ji},\ \forall i, j = 1, \ldots, n,$$
$$\text{wobei} \qquad \delta_{ji} := \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}.$$
Daraus folgt, dass
$$T^{0}_{f,x_0=0}(x) = f(0) = 0, \qquad T^{1}_{f,x_0=0}(x) = f(0) + \sum_{i_1=1}^{n} D_{i_1} f(0)(x - 0)_{i_1} = 0 + 0 = 0,$$

$$\begin{aligned} T^2_{f,x_0=0}(x) :=& f(0) + \sum_{i_1=1}^{n} D_{i_1} f(0)(x-0)_{i_1} + \frac{1}{2} \sum_{i_1,i_2=1}^{n} D_{i_2} D_{i_1} f(0)(x-0)_{i_1}(x-0)_{i_2} \\ =& 0 + 0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot 2x_i^2 \\ =& \|x\|^2. \end{aligned}$$

In der Formel (8.43) für das Taylorpolynom kommen viele gleiche Terme vor. Zum Beispiel ist der Term mit $k = 2$, $i_1 = 3$, $i_2 = 4$ gegeben durch

$$\frac{1}{2} D_4 D_3 f(x_0)(x - x_0)_3 (x - x_0)_4.$$

Der Term mit $k = 2$, $i_1 = 4$, $i_2 = 3$ ist gegeben durch

$$\frac{1}{2} D_3 D_4 f(x_0)(x - x_0)_4 (x - x_0)_3.$$

Gemäss dem Satz von Schwarz 8.52 sind diese beiden Terme gleich. Wir brauchen daher nicht alle höheren partiellen Ableitungen auszurechnen, um ein Taylorpolynom zu berechnen. Mit Hilfe sogenannter Multi-Indizes können wir das Taylorpolynom so umschreiben, dass solche Terme zusammengefasst werden. Ein *Multi-Index* ist ein Element $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multi-Index. Wir schreiben

$$\begin{aligned} |\alpha| &:= \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \qquad =: \text{Ordnung (=: Länge) von } \alpha, \\ \alpha! &:= \alpha_1! \cdots \alpha_n!, \\ \binom{k}{\alpha} &:= \frac{k!}{\alpha!} \qquad (\text{für } k := |\alpha|, \text{ Multinomialkoeffizient}), \\ v^\alpha &:= v_1^{\alpha_1} \cdots v_n^{\alpha_n}, \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n, \\ \partial^\alpha := D^\alpha &:= D_n^{\alpha_n} \cdots D_1^{\alpha_1}. \end{aligned}$$

Beispiel. [Multi-Index-Schreibweise] Für $n = 4$, $\alpha := (3, 0, 2, 0) \in \mathbb{N}_0^3$ und $v := (-1, 2, 4, 1)$ gilt:

$$\begin{aligned} k := |\alpha| &= 3 + 0 + 2 + 0 = 5 \\ \alpha! &= 3! \cdot 0! \cdot 2! \cdot 0! = 12 \\ \binom{k}{\alpha} &= \frac{5!}{3! \cdot 0! \cdot 2! \cdot 0!} = 10 \\ v^\alpha &= (-1, 2, 4, 1)^{(3,0,2,0)} = (-1)^3 \cdot 2^0 \cdot 4^2 \cdot 1^0 = -16 \\ D^\alpha &= D_4^0 D_3^2 D_2^0 D_1^3 = D_3 D_3 D_1 D_1 D_1 \end{aligned}$$

Seien $m \in \mathbb{N}_0$, $f \in C^m(U)$, $x_0 \in U$ und $x \in \mathbb{R}^n$.

Proposition 8.56 (Taylorpolynom in Multi-Index-Schreibweise)**.** *Das Taylorpolynom T^m_{f,x_0} ist gegeben durch*

$$T^m_{f,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n:\,|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x_0)(x-x_0)^\alpha, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Bemerkung. Diese Proposition entspricht [Stra, Bemerkung 7.5.3]. Dort steht für $k = m$ anstelle von $\frac{1}{\alpha!}$ der falsche Faktor $\frac{1}{m!}$.

Diese Proposition folgt unmittelbar aus dem nächsten Lemma. Seien $k \in \mathbb{N}_0$, $f \in C^k(U)$, $x_0 \in U$ und $v \in \mathbb{R}^n$.

Lemma 8.57 (partielle Ableitungen und Multi-Indizes)**.** *Es gilt*

$$\sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} D_{i_k}\cdots D_{i_1} f(x_0) \prod_{j=1}^{k} v_{i_j} = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n:\,|\alpha|=k} \binom{k}{\alpha} D^\alpha f(x_0) v^\alpha. \tag{8.44}$$

Beweis von Lemma 8.57: Für jedes k-Tupel $I = (I_1, \dots, I_k) \in \{1, \dots, n\}^k$ definieren wir den Multi-Index $\alpha^I \in \mathbb{N}_0^n$ durch

$$\alpha^I_i := \text{ Anzahl } j \in \{1,\dots,k\} \text{ so, dass } I_j = i, \qquad \forall i \in \{1,\dots,n\}. \tag{8.45}$$

(I_j spielt die Rolle des Indexes i_j.) Sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Wir schreiben $k := |\alpha|$. Es gilt

$$\text{Anzahl } I \in \{1,\dots,n\}^k \text{ so, dass } \alpha^I = \alpha \qquad = \binom{k}{\alpha} = \frac{k!}{\alpha!}. \tag{8.46}$$

Das folgt mittels Induktion über n aus der Tatsache, dass es $\binom{k}{\ell}$ Kombinationen von ℓ Elementen aus einer Menge mit k Elementen gibt. (Für eine anschauliche Herleitung siehe Bemerkung 8.58(i).) Es gilt

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} D_{i_k}\cdots D_{i_1} f(x_0) \prod_{j=1}^{k} v_{i_j} \\
&= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n:\,|\alpha|=k} \sum_{I\in\{1,\dots,n\}^k:\,\alpha^I=\alpha} D_n^{\alpha_n}\cdots D_1^{\alpha_1} f(x_0) v_1^{\alpha_1}\cdots v_n^{\alpha_n} \\
&\quad \text{(aufgrund des Satzes 8.52 (Schwarz) und weil Multiplikation von Zahlen kommutativ ist)} \\
&= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n:\,|\alpha|=k} \binom{k}{\alpha} D^\alpha f(x_0) v^\alpha \qquad \text{(wegen (8.46))}.
\end{aligned}$$

Das beweist (8.44) und schliesst den Beweis von Lemma 8.57 und damit von Proposition 8.56 ab. □

Bemerkungen 8.58. [Multi-Indizes, Formel (8.46)]

(i) **(Herleitung der Formel für die Anzahl k-Tupel I)** Anschaulich können wir die Formel (8.46) wie folgt herleiten. Wir fassen die Zahlen $1, \dots, n$ als *Buchstaben* auf und betrachten die Menge $\{1, \dots, n\}$ als ein *Alphabet*. Jedes $I = (I_1, \dots, I_k) \in \{1, \dots, n\}^k$ ist ein *Wort der Länge* k im Alphabet $\{1, \dots, n\}$. (Wir denken uns dabei die Klammern und die Kommas weg.) Auf der linken Seite der Formel (8.46) tritt die Menge

$$\left\{ I \in \{1, \dots, n\}^k \;\middle|\; \alpha^I = \alpha \right\} \tag{8.47}$$

auf, welche anschaulich aus allen Wörtern I der Länge k im Alphabet $\{1, \dots, n\}$ besteht, in denen der Buchstabe 1 genau α_1 mal vorkommt, der Buchstabe 2 genau α_2 mal vorkommt usw. (Vergleiche mit (8.45).) Formel (8.46) sagt, dass diese Menge $\binom{k}{\alpha}$ Elemente besitzt.

Um das anschaulich zu sehen, fixieren wir die Wortlänge k und zeichnen eine Reihe mit k leeren Quadraten $Q_1, \dots, Q_k$. Jedes Wort in (8.47) entspricht einer Art, genau α_1 Quadrate mit dem Buchstaben 1 zu füllen, genau α_2 Quadrate mit dem Buchstaben 2 usw. . Wir erhalten eine solche Füllung, indem wir die Quadrate beliebig vertauschen und dann die ersten α_1 Quadrate mit dem Buchstaben 1 füllen, die nächsten α_2 mit dem Buchstaben 2 usw. Wie Sie im Gymnasium gelernt haben, gibt es $k!$ Vertauschungen (=Permutationen) der Quadrate.

Seien π und σ Permutationen der Quadrate so, dass σ die ersten α_1 Quadrate miteinander vertauscht, die nächsten α_2 Quadrate miteinander vertauscht usw. Dann ergeben π und $\sigma \circ \pi$ [23] dieselbe Füllung der Quadrate. Es gibt $\alpha_1! \cdots \alpha_n!$ solche Permutationen σ. Da es insgesamt $k!$ Permutationen der Quadrate gibt, folgt, dass es

$$\frac{k!}{\alpha_1! \cdots \alpha_k!} = \binom{k}{\alpha!}$$

Füllungen der Quadrate $Q_1, \dots, Q_k$ gibt, d. h. Wörter der Länge k, in denen der Buchstabe 1 genau α_1 mal vorkommt, der Buchstabe 2 genau α_2 mal vorkommt usw. Damit haben wir die Formel (8.46) anschaulich hergeleitet.

(ii) **(Fall $n = 2$, Kombinationen)** Wir betrachten den Fall $n = 2$. Ein Wort der Länge k im Alphabet $\{1, 2\}$ wie in Bemerkung (i) entspricht einer Auswahl der α_1 Quadrate aus der Menge $\{Q_1, \dots, Q_k\}$, die den Buchstaben 1 enthalten. (Diese Quadrate legen die α_2 Quadrate fest, die den Buchstaben 2 enthalten.) Eine solche Auswahl ist eine Kombination ohne Wiederholung von α_1 Objekten aus

[23] Diese Permutation führt zuerst die Vertauschung π aus und danach σ.

der Menge von k Objekten $\{Q_1, \ldots, Q_k\}$. Wie Sie in der Mittelschule gelernt haben, ist die Anzahl solcher Kombinationen gleich dem Binomialkoeffizienten

$$\binom{k}{\alpha_1} = \frac{k!}{\alpha_1!(k-\alpha_1)!} = \frac{k!}{\alpha_1!\alpha_2!} = \binom{k}{\alpha}.$$

Das stimmt mit der Formel (8.46) überein.

(iii) **(Multinomialkoeffizient)** Der Multinomialkoeffizient $\binom{k}{\alpha}$ tritt im *Multinomialsatz* auf, welcher besagt, dass für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ und $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^k = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : |\alpha| = k} \binom{k}{\alpha} x^\alpha.$$

$\binom{k}{\alpha}$ ist also der Koeffizient vor dem Term x^α in der Entwicklung der k-ten Potenz der Summe $\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + \cdots + x_n$. (Überlegen Sie sich das! Verwenden Sie dazu ein Argument wie in Bemerkung (i).) Im Fall $n = 2$ ist der Multinomialsatz der *binomische Lehrsatz*. Das erklärt den Namen *Multinomialkoeffizient*.

Seien $m \in \mathbb{N}_0$, $f \in C^{m+1}(U)$ und $x_0, x \in U$ so, dass

$$x_t := (1-t)x_0 + tx \in U, \quad \forall t \in [0,1].$$

Satz 8.59 (Taylorformel)**.** *Es gibt eine Zahl $\theta \in]0,1[$ so, dass gilt*

$$f(x) = T^m_{f,x_0}(x) + \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : |\alpha| = m+1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x_\theta)(x - x_0)^\alpha. \tag{8.48}$$

Beweis: [Stra, Satz 7.5.2, S. 174]

Bemerkungen. [Taylorformel]

- Die Aussage des Satzes gilt auch im Fall $m = -1$, falls wir $\theta = 1$ ebenfalls zulassen. (8.48) besagt dann, dass

$$f(x) = T^{-1}_{f,x_0}(x) + f(x_\theta) = 0 + f(x_\theta).$$

Diese Gleichheit stimmt für $\theta = 1$.

- Im Fall $m = 0$ sagt der Satz, dass es ein θ gibt so, dass

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_\theta)(x - x_0).$$

  Im Fall $n = 1$ ist das die Aussage des Mittelwertsatzes aus Analysis 1 (Satz 5.15).

- Im Fall $n = 1$ haben Sie Satz 8.59 in Analysis 1 gesehen. Siehe Satz 5.44. (Überzeugen Sie sich, dass die obige Formel und die Formel in Satz 5.44 in diesem Fall übereinstimmen!)

Definition 8.60 (Restglied)**.** *Wir definieren das* Restglied von f m-ter Ordnung zum Entwicklungspunkt x_0 *als die Funktion*

$$R^m_{f,x_0} := f - T^m_{f,x_0} : U \to \mathbb{R}.$$

Bemerkung. In [Stra, Bemerkung 7.5.4 i), S. 174] wird das Restglied mit $r_m f(\cdot; x_0)$ bezeichnet.

Sei $r \in]0, \infty[$ so, dass $\overline{B}^n_r(x_0) \subseteq U$. Wir definieren

$$C_m := C_{m,f,x_0,r} := \frac{n^{\frac{m+1}{2}}}{(m+1)!} \max\Big\{|D^\alpha f(y)| \;\Big|\; \alpha \in \mathbb{N}^n_0 :\ |\alpha| = m+1,\ y \in \overline{B}^n_r(x_0)\Big\}.$$

Auf der rechten Seite tritt das Maximum der Zahlen $|D^\alpha f(y)|$ auf, wobei α über alle Elemente von $\mathbb{N}^n_0$ mit $|\alpha| = m + 1$ läuft und y über alle Elemente von $\overline{B}^n_r(x_0)$ läuft. Dieses Maximum existiert, da gemäss Korollar 4.33 jede stetige reellwertige Funktion auf einer kompakten Menge ein Maximum besitzt.

Proposition 8.61 (Restglied)**.** *Es gilt*

$$\big|R^m_{f,x_0}(x)\big| \le C_m \|x - x_0\|^{m+1}, \qquad \forall x \in \overline{B}^n_r(x_0).$$

Beweis: Das folgt aus Satz 8.59.

Bemerkung. [Taylornäherung, Restglied] Wir sagen, dass eine Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ die Funktion f (um den Punkt x_0) in m-ter Ordnung nähert, falls

$$\frac{f(x) - g(x)}{\|x - x_0\|^m} \to 0 \qquad \text{für} \qquad x \to x_0.$$

Gemäss Proposition 8.61 gilt

$$\frac{f(x) - T^m_{f,x_0}(x)}{\|x - x_0\|^m} \le C_m \|x - x_0\| \to 0 \qquad \text{für} \qquad x \to x_0$$

(falls f C^{m+1} ist). Daher nähert das Taylorpolynom m-ter Ordnung die Funktion f in m-ter Ordnung. Den Unterschied $f - T^m_{f,x_0}$, also das Restglied, können wir als Fehler dieser Näherung sehen. Dieser Fehler hat die Ordnung $m+1$, d. h., er ist durch eine Konstante mal r_x^{m+1} beschränkt, wobei

$$r_x := \|x - x_0\|$$

der Euklidische Abstand zwischen x_0 und x ist. Zum Beispiel nähert das Taylorpolynom nullter Ordnung die Funktion bis auf einen linearen Fehler. Das Taylorpolynom erster Ordnung nähert die Funktion bis auf einen quadratischen Fehler, usw.

Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in U$.

Definition 8.62 (strikte lokale Extremalstelle)**.** *Wir nennen x_0 eine* lokale Minimalstelle von f *g. d. w. es eine Umgebung V von x_0 in U gibt so, dass*

$$f(x) \geq f(x_0), \qquad \forall x \in V \setminus \{x_0\}.$$

Wir nennen x_0 eine strikte lokale Minimalstelle von f *g. d. w. diese Bedingung mit "$\geq$" ersetzt durch "$>$" erfüllt ist.*

Wir nennen x_0 eine (strikte) lokale Maximalstelle von f *g. d. w. die analoge Bedingung mit "$\geq$" ("$>$") ersetzt durch "$\leq$" ("$<$") erfüllt ist.*

Wir nennen x_0 eine (strikte) lokale Extremalstelle von f *g. d. w. x_0 eine (strikte) lokale Minimalstelle oder (strikte) lokale Maximalstelle ist.*

Bemerkung. [*lokal*] Das Wort *lokal* bedeutet *in einer (möglicherweise kleinen) Umgebung des gegebenen Punktes.* Eine lokale Extremalstelle x_0 von f ist also eine Extremalstelle von f in einer Umgebung von x_0.

Bemerkung. [lokales Minimum der potentiellen Energie und Stabilität] In der Physik sind lokale Extrema zum Beispiel darum wichtig, weil eine gegebene Lage eines statischen mechanischen System stabil ist, falls die potentielle Energie in dieser Lage ein striktes lokales Minimum annimmt.

Sei $x_0 \in U$ ein Punkt, in dem f differenzierbar ist.

Definition 8.63 (kritischer Punkt)**.** x_0 *heisst* kritischer *(oder* stationärer*)* Punkt von f *g. d. w. die Ableitung von f in x_0 verschwindet, d. h.*

$$df(x_0) = 0.$$

Bemerkung 8.64. [kritischer Punkt] Im Fall $n = 1$ ist x_0 genau dann ein kritischer Punkt von f, wenn $f'(x_0) = 0$.

Sei jetzt $f \in C^2(U)$ und $x_0 \in U$.

Definition 8.65 (Hesse-Matrix)**.** *Wir definieren die* Hesse-Matrix von f im Punkt x_0 *als die quadratische Matrix*

$$\mathrm{Hess}_f(x_0) := \big(D_i D_j f(x_0)\big)_{i,j=1}^n.$$

Bemerkung. Gemäss dem Schwarz 8.52 ist die Hesse-Matrix symmetrisch, d. h.

$$\mathrm{Hess}_f(x_0)_{ij} = \mathrm{Hess}_f(x_0)_{ji}, \qquad \forall i,j = 1,\dots,n.$$

Beispiel 8.66. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2.$$

Die Hesse-Matrix von f an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$\mathrm{Hess}_f(x_0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 8.67. [Hesse-Matrix] Wir betrachten den Fall $n = 1$. Die Hesse-Matrix von f in x_0 ist gegeben durch

$$\mathrm{Hess}_f(x_0) = (f''(x_0)).$$

Erinnerung an die lineare Algebra:

Bemerkungen 8.68. (i) Eine reelle quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heisst *positiv definit* g. d. w.

$$v^T A v > 0, \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Sie heisst *negativ definit* g. d. w.

$$v^T A v < 0, \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

(ii) Im Fall $n = 1$ ist $A \in \mathbb{R}^{1\times 1} = \mathbb{R}$ genau dann positiv (negativ) definit, falls $A > 0$ ($A < 0$).

Satz 8.69 (lokale Extremalstelle, Hesse-Matrix)**.** *(i) (Satz von Fermat über kritische Punkte) Falls $x_0 \in U$ eine lokale Extremalstelle von f ist, dann ist x_0 ein kritischer Punkt von f.*

(ii) Falls x_0 ein kritischer Punkt von f ist und die Hesse-Matrix $\mathrm{Hess}_f(x_0)$ positiv (negativ) definit ist, dann ist x_0 eine strikte lokale Minimalstelle (Maximalstelle) von f.



Abbildung 8.6: Pierre de Fermat, 1607–1665, französischer Mathematiker und Jurist.

Beweis von (ii): [Stra, Satz 7.5.3, S. 175]

Beweis von (i): S. 425

Bemerkungen. [kritischer Punkt, lokale Extremalstelle, Hesse-Matrix im Fall $n = 1$]

- Teil (i) des Satzes 8.69 ist nach Pierre de Fermat benannt, siehe Abbildung 8.6. Im Fall $n = 1$ stimmt Teil (i) des Satzes 8.69 mit Satz 5.52(i) aus Analysis 1 überein. Dieser Teil verallgemeinert also ein Resultat aus Analysis 1 auf mehrere Dimensionen.
- Wir betrachten den Fall $n = 1$. Wir nehmen an, dass x_0 ein kritischer Punkt von f ist. Gemäss Bemerkung 8.64 bedeutet das, dass $f'(x_0) = 0$. Wir nehmen an, dass $f''(x_0) > 0$. Gemäss Bemerkungen 8.67 und 8.68(ii) ist $\mathrm{Hess}_f(x_0)$ dann positiv definit. Gemäss Satz 8.69(ii) ist x_0 daher eine strikte lokale Minimalstelle von f.

  Das wussten Sie schon aus Analysis 1, siehe Satz 5.52(ii). Satz 8.69(ii) verallgemeinert also ein Resultat aus Analysis 1 auf mehrere Dimensionen.

Beweis von Satz 8.69(i): Wir nehmen an, dass $x_0 \in U$ eine lokale Extremalstelle von f ist.

Fall: x_0 ist eine lokale Minimalstelle. Sei $v \in \mathbb{R}^n$. Wir definieren

$$x(t) := x_0 + tv, \qquad g := f \circ x.$$

Da x_0 eine lokale Minimalstelle von f ist, ist $t = 0$ eine lokale Minimalstelle von g. (Überlegen Sie sich das!) Gemäss einem Resultat aus Analysis 1 ([Stra, Korollar 5.5.1, S. 98]) gilt daher

$$0 = \dot{g}(0). \tag{8.49}$$

Andererseits gilt gemäss der Kettenregel (Satz 8.12), dass

$$\dot{g}(0) = df(x(0))\dot{x}(0) = df(x_0)v.$$

Indem wir das mit (8.49) kombinieren, erhalten wir

$$0 = df(x_0)v.$$

Da v beliebig ist, folgt daraus, dass

$$df(x_0) = 0.$$

Fall: x_0 ist eine lokale Maximalstelle: analog.

Das beweist Satz 8.69(i). □

Beispiele 8.70. [(keine) lokale Extremalstelle, Hesse-Matrix]

(i) Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \|x\|^2.$$

Siehe Abbildung 8.7 im Fall $n = 2$.

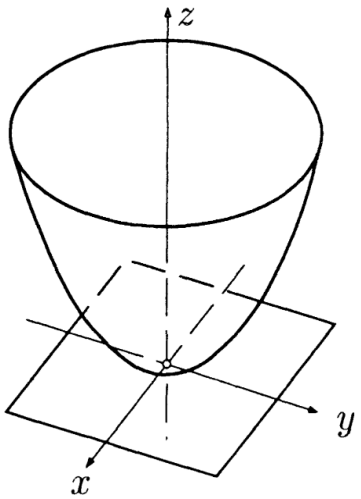


Abbildung 8.7: $f(x) := \|x\|^2$, $x_0 = 0$: lokale Minimalstelle.

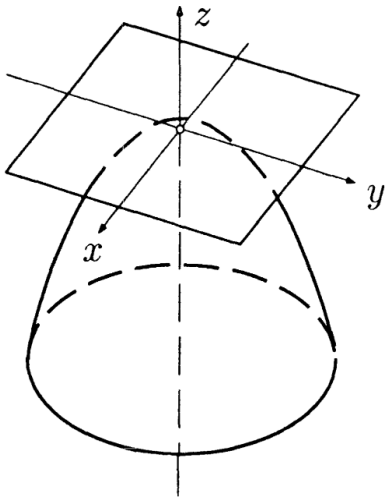


Abbildung 8.8: $f(x) := -\|x\|^2$, $x_0 = 0$: lokale Maximalstelle.

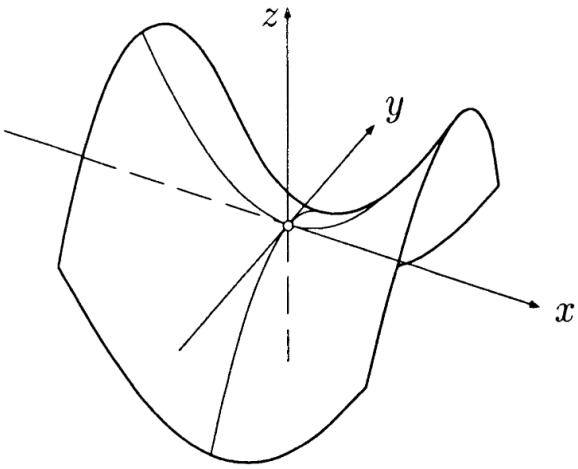


Abbildung 8.9: $f(x) := x_1^2 - x_2^2$, $x_0 = 0$: Sattelpunkt.

Wir bestimmen die kritischen Punkte von f. Dazu berechnen wir ihre Ableitung:

$$df(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & \cdots & 2x_n \end{pmatrix} \cdot : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Die Bedingung $df(x_0) = 0$ ist genau für $x_0 = 0$ erfüllt. Also ist $x_0 = 0$ der einzige kritische Punkt von f.

Um zu überprüfen, ob dieser Punkt eine lokale Extremalstelle ist, berechnen wir die Hesse-Matrix von f:

$$\mathrm{Hess}_f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt

$$v^T \,\mathrm{Hess}_f(x_0 = 0)v = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot 2v_i = 2\|v\|^2 > 0.$$

Daher ist $\mathrm{Hess}_f(0)$ positiv definit. Gemäss Satz 8.69(ii) ist x_0 daher eine strikte lokale Minimalstelle von f.

In diesem Beispiel können wir das auch einfach direkt überprüfen. Des Weiteren ist es auch aus der Abbildung 8.7 ersichtlich.

(ii) Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := -\|x\|^2.$$

Siehe Abbildung 8.8 im Fall $n = 2$. Diese Funktion besitzt genau den kritischen Punkt $x_0 = 0$. Dieser Punkt ist eine lokale Maximalstelle. Das folgt aus einem zu (i) analogen Argument.

(iii) Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x_1^2 - x_2^2.$$

Siehe Abbildung 8.9. Diese Funktion besitzt genau den kritischen Punkt $x_0 = 0$. Das folgt aus einem zu (i) analogen Argument. Der Punkt $x_0 = 0$ ist keine lokale Extremalstelle. Das ist aus der Zeichnung ersichtlich. (Warum?) In Beispiel 8.74 werden wir diese Aussage beweisen.

(iv) Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x_1^2 + x_2^4.$$

Analog zum vorherigen Beispiel ist der einzige kritische Punkt von f gegeben durch $x_0 = 0$. (Überprüfen Sie das!) Die Hesse-Matrix von f ist gegeben durch

$$\mathrm{Hess}_f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12x_2^2 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten jetzt $x = x_0 = 0$. $\mathrm{Hess}_f(0)$ ist nicht positiv definit, da für $v := (0, 1)$ gilt

$$v^T \mathrm{Hess}_f(0) v = 0.$$

$\mathrm{Hess}_f(0)$ ist auch nicht negativ definit. (Warum?) Wir können daher Satz 8.69(ii) nicht anwenden.

Es gilt jedoch $f(x) > 0$ für alle $x \neq 0$. (Überprüfen Sie das!) Daher ist $x_0 = 0$ eine strikte lokale Minimalstelle.

Bemerkung. Die Umkehrung von 8.69(ii) besagt, dass für jede strikte lokale Minimalstelle x_0 von f die Hesse-Matrix $\mathrm{Hess}_f(x_0)$ positiv definit ist. Aufgrund des letzten Beispiels ist diese Umkehrung *falsch*.

Wir betrachten jetzt den Fall $n = 2$.

Proposition 8.71 (positive und negative Definitheit in zwei Dimensionen)**.** *Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine symmetrische Matrix.*

(i) A ist positiv definit g. d. w.

$$\det(A) > 0 \qquad \textit{und} \qquad A_{11} > 0.^{24}$$

(ii) A ist negativ definit g. d. w.

$$\det(A) > 0 \qquad \textit{und} \qquad A_{11} < 0.$$

Beweis: [Bla96b, (5.8), S. 158].

Bemerkung. [positive Definitheit] Für ein allgemeines $n \in \mathbb{N}$ ist eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ genau dann positiv definit, wenn sie das *Sylvester-Kriterium*[25] erfüllt. Dieses Kriterium ist die Eigenschaft, dass alle führenden Hauptminoren von A positiv sind. (Siehe lineare Algebra.)

Beispiel. [positive Definitheit der Hesse-Matrix, strikte lokale Minimalstelle] Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2.$$

Der einzige kritische Punkt von f ist $x_0 = 0$. (Überprüfen Sie das!) Gemäss Beispiel 8.66 gilt

$$\mathrm{Hess}_f(x_0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

[24] A_{ij} bezeichnet den (i, j)-ten Eintrag von A.

[25] Manchmal wird dafür die Bezeichnung *Hurwitz-Kriterium* verwendet.

Es gilt

$$\det\left(\mathrm{Hess}_f(x_0)\right) = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3 > 0, \qquad \mathrm{Hess}_f(x_0)_{11} = 2 > 0.$$

Gemäss Proposition 8.71 ist $\mathrm{Hess}_f(x_0)$ daher positiv definit. Gemäss Satz 8.69(ii) ist $x_0 = 0$ daher eine strikte lokale Minimalstelle von f.

Sei $f : U \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in U$ ein Punkt, in dem f differenzierbar ist.

Definition 8.72. *x_0 heisst ein* Sattelpunkt *von f g. d. w. x_0 ein kritischer Punkt von f und keine lokale Extremalstelle von f ist.*

Bemerkungen 8.73. [Sattelpunkt, Indefinitheit der Hesse-Matrix]

(i) Ein kritischer Punkt x_0 von f ist ein Sattelpunkt g. d. w. es in jeder Umgebung von x_0 sowohl einen Punkt gibt, in dem f grösser als in x_0 ist, als auch einen Punkt gibt, in dem f kleiner als in x_0 ist.

Sei jetzt $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reelle quadratische Matrix.

(ii) A heisst *indefinit* g. d. w. es Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ gibt so, dass

$$v^T A v > 0, \qquad w^T A w < 0.$$

(iii) Wir nehmen jetzt an, dass $n = 2$ und A symmetrisch ist. Dann ist A indefinit g. d. w. $\det A < 0$.

(iv) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $f \in C^2(U)$ und $x_0 \in U$ ein kritischer Punkt von f. Falls die Hesse-Matrix $\mathrm{Hess}_f(x_0)$ indefinit ist, dann ist x_0 ein Sattelpunkt. Das folgt aus [Stra, Bemerkung 7.5.4 i)]. Gemäss (iii) ist x_0 also ein Sattelpunkt, falls

$$n = 2, \qquad \det\left(\mathrm{Hess}_f(x_0)\right) < 0.$$

Beispiel 8.74. [Indefinitheit der Hesse-Matrix, Sattelpunkt] Wir betrachten die Funktion

$$f : U := \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x_1^2 - x_2^2.$$

Siehe Abbildung 8.9. Der Punkt $x_0 := 0$ ist ein kritischer Punkt von f. (Überprüfen Sie das!) Es gilt

$$\mathrm{Hess}_f(x_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \text{also} \qquad \det\left(\mathrm{Hess}_f(x_0)\right) = -4 < 0.$$

Gemäss Bemerkung 8.73(iv) ist $x_0 = 0$ daher ein Sattelpunkt.

Bemerkung. [Typ eines kritischen Punktes] Mit dem *Typ* eines kritischen Punktes x_0 von f meinen wir die Eigenschaft, eine lokale Maximalstelle, lokale Minimalstelle oder ein Sattelpunkt zu sein.

Kapitel 9

Umkehrsatz, Satz über implizite Funktionen, Untermannigfaltigkeit des Koordinatenraums, Tangentialraum

9.1 C^k-Diffeomorphismus, Umkehrsatz

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96b, 5.4] und [Stra, 7.7]. Darin lernen wir zwei grundlegende Werkzeuge der Analysis kennen, nämlich den Umkehrsatz und den Satz über implizite Funktionen. Der Umkehrsatz gibt Bedingungen an, unter denen wir eine Gleichung der Form

$$f(x) = y$$

nach x auflösen können, falls y nahe bei einem Punkt y_0 liegt, für den eine Lösung x der Gleichung $f(x) = y_0$ existiert. Der Satz über implizite Funktionen gibt Bedingungen an, unter denen die Lösung einer Gleichung auf eine C^k-Weise von Parametern abhängt.

Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, $f : S \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion und $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Wir nehmen an, dass es für $y = y_0$ eine Lösung $x_0 \in S$ folgender Gleichung gibt:

$$f(x) = y. \tag{9.1}$$

Frage 9.1. *Unter welchen Bedingungen an f gibt es eine Lösung dieser Gleichung für y nahe bei y_0?*

Frage 9.2. *Unter welchen Bedingungen ist diese Lösung eindeutig?*

Frage 9.3. *Wie hängt sie von y ab?*

Satz 9.6 gibt Antworten auf diese Fragen. Um ihn zu formulieren, brauchen wir Folgendes. Seien X_0, Y_0 Mengen, $f : X_0 \to Y_0$ eine Abbildung, $X \subseteq X_0$ und $Y \subseteq Y_0$ so, dass $f(X) \subseteq Y$.[1]

$$f : X \to Y, \tag{9.2}$$

die *Einschränkung von f auf X und Y* ist die Abbildung mit Definitionsbereich X, Zielbereich[2] Y und Graph gegeben durch $\{(x, f(x)) \mid x \in X\}$. $f : X \to Y$ ist also die gleiche Funktion wie f, ist aber nur auf X definiert und besitzt einen verkleinerten Zielbereich. Im Fall $Y = Y_0$ schreiben wir

$$f|_X \quad := \quad f \restriction_X \quad := \quad f : X \to Y_0$$

für diese Einschränkung. Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine *injektive* Funktion. Wir definieren die *Umkehrung* (*Umkehrabbildung* oder *Inverse*) von f als die Funktion

$$f^{-1} : f(X) \to X, \qquad f^{-1}(y) := \text{ eindeutiges } x \in X \text{ so, dass } f(x) = y. \tag{9.3}$$

Seien jetzt $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^p$ offene Teilmengen und $k \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$.

Definition 9.4 (C^k-Diffeomorphismus)**.** *Eine Abbildung $f : U \to V$ heisst* C^k-Diffeomorphismus *g. d. w. sie bijektiv und C^k ist und ihre Umkehrung C^k ist. Wir nennen einen C^∞-Diffeomorphismus einen* glatten Diffeomorphismus *oder einfach einen* Diffeomorphismus.

Beispiele. Folgende Abbildungen sind (glatte) Diffeomorphismen:

- Jeder lineare Isomorphismus zwischen zwei endlichdimensionalen Vektorräumen.
- Die Exponentialfunktion
$$\exp : \mathbb{R} \to]0, \infty[.$$

Bemerkung 9.5. [Umkehren und ableiten] Falls f ein C^1-Diffeomorphismus ist, dann ist für jedes $x \in U$ $Df(x)$ invertierbar und

$$D(f^{-1})(y) = Df(f^{-1}(y))^{-1}, \quad \forall y \in V. \tag{9.4}$$

Um das zu zeigen, sei $x \in U$. Gemäss der Kettenregel (Satz 8.12) gilt, dass

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} &= D\,\mathrm{id}_U(x) = D(f^{-1})(f(x))Df(x), \\ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^p} &= D\,\mathrm{id}_V(f(x)) = Df(x)D(f^{-1})(f(x)). \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $Df(x)$ invertierbar ist und dass die Gleichheit (9.4) gilt. Falls $U \neq \emptyset$, folgt daraus, dass die Vektorräume $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^p$ isomorph sind (mittels $Df(x)$) und darum, dass $n = p$.

[1] $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ ist das Bild von X unter f.

[2] In [Stra, Definition 1.3.1, p. 8] wird der Zielbereich der *Bild-* oder *Wertebereich* genannt.



Abbildung 9.1: Umkehrsatz mit $n = 2$. Wir nehmen an, dass $Df(x_0)$ invertierbar ist, d. h., dass die Vektoren $Df(x_0)e_1$ und $Df(x_0)e_2$ linear unabhängig sind.

Das Hauptresultat dieses Abschnitts ist folgender Satz.

Satz 9.6 (Umkehrsatz)**.** *Seien $U_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $f \in C^k(U_0, \mathbb{R}^n)$ und $x_0 \in U_0$ ein Punkt so, dass $Df(x_0)$ invertierbar ist. Dann gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq U_0$ von x_0 so, dass $f(U)$ offen ist und die Einschränkung*

$$f : U \to f(U)$$

ein C^k-Diffeomorphismus ist.

Beweis: [Stra, Satz 8.7.1, S. 229].

Abbildung 9.1 verdeutlicht diesen Satz.

Bemerkungen 9.7.

- Eine offene Umgebung eines Punktes in $\mathbb{R}^n$ ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, die den Punkt enthält. (Vergleiche mit Definition 4.40.)
- Dieser Satz liefert Antworten auf die Fragen 9.1, 9.2 und 9.3 (S. 431).
- Er verallgemeinert folgendes Resultat aus Analysis 1: Sei I ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Falls $f' \neq 0$, dann ist f injektiv und $f^{-1} : f(I) \to I$ differenzierbar. Siehe [Stra, Satz 6.2.2, S. 117, und Beispiel 8.7.1. i), S. 229].
- Bemerkung 9.5 impliziert:

  "f C^1-Diffeomorphismus $\Rightarrow$ $Df(x_0)$ invertierbar"

  Die Umkehrung davon lautet:

  "$Df(x_0)$ invertierbar $\Rightarrow$ f C^1-Diffeomorphismus"

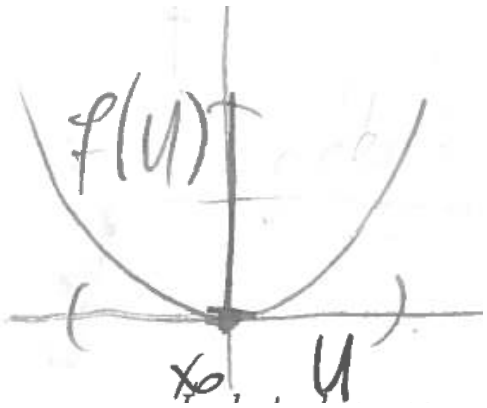


Abbildung 9.2: Um x_0 besitzt f keine Umkehrung.

Für $k = 1$ ist das die Aussage des Satzes 9.6, ausser, dass der Satz nur eine *lokale* Aussage macht, nämlich, dass f auf einer (kleinen) Umgebung von x_0 ein C^1-Diffeomorphismus ist.

Der Satz liefert also eine "lokale" Umkehrung der Bemerkung 9.5.

- Satz 9.6 sagt unter anderem, dass es Umgebungen U von x_0 und V $(= f(U))$ von y_0 gibt so, dass $f : U \to V$ bijektiv ist. Schon das ist eine bemerkenswerte Aussage.

- Die Bedingung, dass $Df(x_0)$ invertierbar ist, ist notwendig. Um das einzusehen, betrachten wir einen Punkt $y_0 \in \mathbb{R}^n$ und die konstante Abbildung $f \equiv y_0$. Ein anderes Beispiel ist durch eine nicht invertierbare lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gegeben. Noch ein Beispiel ist durch die Abbildung

$$f : U_0 := \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := x^2$$

und den Punkt $x_0 := 0$ gegeben. Siehe Abbildung 9.2.

- Im Allgemeinen können wir nicht $U = U_0$ wählen. Betrachte zum Beispiel $f : U_0 := \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$ und $x_0 = 1$.

- Für den Satz 9.6 brauchen wir, dass f *stetig* differenzierbar ist. Falls wir nur voraussetzen, dass f differenzierbar ist, dann ist die Aussage des Satzes 9.6 falsch. Um das zu sehen, wählen wir eine nicht injektive differenzierbare Funktion $g :]0, 1[\to \mathbb{R}$ so, dass $g(x) = x$ für $x \leq \frac{1}{3}$ und $x \geq \frac{2}{3}$. (Überlegen Sie sich, dass es ein solches g gibt! Es gibt sogar eine glatte solche Funktion.) Für jedes $j \in \mathbb{N}$ definieren wir $I_j := \left(\frac{1}{j}, \frac{1}{j} + \frac{1}{j^2}\right)$. Wir definieren $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{j} + \dfrac{g(j^2 x - j)}{j^2}, & \text{falls } x \in I_j,\ j \in \mathbb{N}, \\ x, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Funktion ist differenzierbar. (Für $x = 0$ folgt das aus der Definition der Differenzierbarkeit in einer Variable.) Es gilt $f'(0) = 1$, darum ist $Df(0) = f'(0)\cdot$ invertierbar. f erfüllt daher die Voraussetzungen des Umkehrsatzes mit $k = 1$, bis auf die Voraussetzung, dass f *stetig* differenzierbar ist.

Sei $j \in \mathbb{N}$. Da g nicht injektiv ist, ist die Einschränkung von f auf I_j nicht injektiv. Daher gibt es keine Umgebung von 0, worauf f injektiv ist. Die Aussage des Satzes 9.6 ist daher falsch.

Der Umkehrsatz ist daher ein Beispiel eines Satzes, wofür *stetige* Differenzierbarkeit die "richtige" Voraussetzung ist.

- Im Satz 9.6 sind die Dimensionen des Definitionsbereichs und des Zielbereichs von f gleich. Der Satz über implizite Funktionen (Satz 9.14) wird beschreiben, was geschieht, falls das nicht der Fall ist.

Beispiel 9.8. [kubische Funktion] Wir betrachten die Abbildung

$$f : U_0 = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x) := \begin{pmatrix} 1 + x_1 + x_2^3 \\ x_1^3 + x_2 \end{pmatrix}.$$

Diese Abbildung ist glatt, d. h. beliebig oft stetig partiell differenzierbar. Es gelten $f(0) = (1, 0)$,

$$Df(x) = \begin{pmatrix} 1 & 3x_2^2 \\ 3x_1^2 & 1 \end{pmatrix} \cdot : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

und darum

$$Df(0) = \mathrm{id}\,. \tag{9.5}$$

Daher sind die Voraussetzungen des Satzes 9.6 mit $U_0 := \mathbb{R}^2$, $x_0 = 0$ und $k = \infty$ erfüllt. Gemäss diesem Satz gibt es daher eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^2$ von 0 so, dass $f(U)$ offen ist und die Einschränkung $f : U \to f(U)$ ein (glatter) Diffeomorphismus ist. Daher gibt es für jedes $y \in f(U)$ ein eindeutiges $x \in U$ so, dass $f(x) = y$. Wegen (9.5) und Bemerkung 9.5 ist die Ableitung der Umkehrung im Punkt $y_0 = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$D(f|_U^{-1})((1,0)) = Df\big(f|_U^{-1}((1,0)) = 0\big)^{-1} = \mathrm{id}^{-1} = \mathrm{id}\,.$$

(Die Inverse $f|_U^{-1} : f(U) \to U$ ist wie in (9.3) definiert.)

Bemerkung. [Formel für Umkehrung] Möglicherweise gibt es im Beispiel 9.8 keine Formel für die Umkehrung $f^{-1} : f(U) \to U$. (Versuchen Sie, eine solche Formel zu finden!) Bemerkenswerterweise konnten wir trotzdem die Ableitung von $f|_U^{-1}$ im Punkt $(1, 0)$ berechnen.

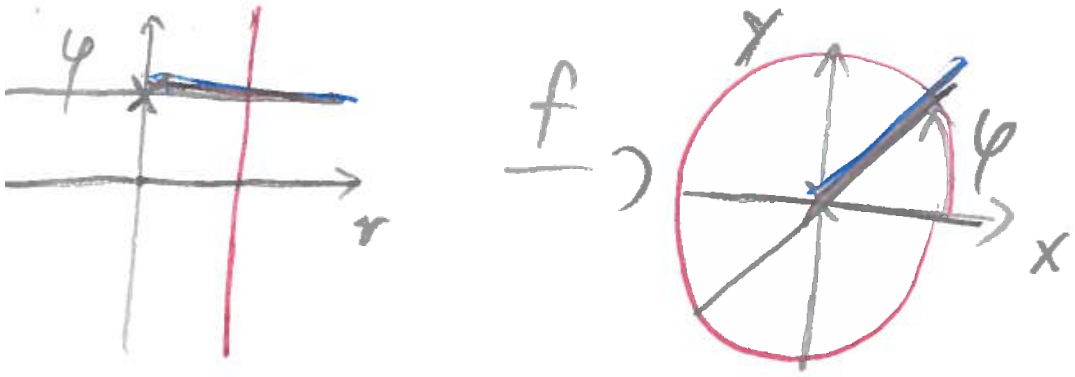


Abbildung 9.3: Polarkoordinaten.

In der Physik und anderen Anwendungen wollen wir manchmal die Koordinaten wechseln, um Rechnungen zu vereinfachen. Satz 9.6 rechtfertigt lokale Koordinatentransformationen, weil er uns erlaubt, physikalische Grössen in den neuen Koordinaten auszudrücken. Wenn zum Beispiel $g : U \to \mathbb{R}$ die Temperatur ist, dann ist $g \circ f|_U^{-1}$ die Temperatur in den mittels f transformierten Koordinaten.

Beispiel 9.9. [Polarkoordinaten] Wir definieren

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(r,\varphi) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Das ist die Polarkoordinatentransformation. Siehe Abbildung 9.3. Es gilt

$$Df(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \cdot : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

und darum[3]

$$\det Df(r,\varphi) = r\big(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\big) = r. \tag{9.6}$$

Sei $(r_0,\varphi_0) \in \mathbb{R}^2$ so, dass $r_0 > 0$. Dann gilt $\det Df(r_0,\varphi_0) = r_0 \neq 0$. Darum gibt es gemäss dem Umkehrsatz 9.6 eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^2$ von (r_0,φ_0) so, dass $f(U)$ offen ist und $f|_U : U \to f(U)$ ein Diffeomorphismus ist. In der Tat, falls $\varphi_0 \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, dann können wir

$$U :=]0,\infty[\times \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

wählen. Die Umkehrung von $f|_U$ wird dann gegeben durch

$$(f|_U)^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ \arctan(y/x) \end{pmatrix}.$$

[3]Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $T : V \to V$ eine lineare Abbildung. Die Determinante von T ist definiert als die Determinante der Matrix von T bezüglich einer beliebigen Basis von V. Die Matrix der linearen Abbildung $Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bezüglich der Standardbasis $e_1 = (1,0,\ldots,0), \ldots, e_n = (0,\ldots,0,1)$ ist die Jacobi-Matrix $J_f(x)$. Es gilt also $\det Df(x) = \det J_f(x)$.

Frage. *Was geschieht für andere Werte von φ_0?*

9.2 Der Satz über implizite Funktionen

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96b, 5.3] und [Stra, 7.8]. Gewisse physikalische Gesetze können als eine Gleichung der Form

$$f(x, y) = 0 \tag{9.7}$$

geschrieben werden, wobei $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ eine Funktion ist, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^p$ und die Koordinaten von x und y physikalische Grössen sind. Dabei betrachten wir $x = (x^1, \ldots, x^n)$ als gegebene und $y = (y^1, \ldots, y^p)$ als gesuchte Grössen.

Beispiel 9.10. Wir betrachten ein ideales Gas. Wir schreiben:

p:= Druck des Gases

V:= Volumen

T:= Temperatur

n:= Stoffmenge[4]

R:= universelle Gaskonstante $\approx 8.3\,\mathrm{JK^{-1}mol^{-1}}$

Wir schreiben

$$x := \big(V, T, n, R\big), \quad y := p.$$

Das ideale Gasgesetz lautet

$$f\big(V, T, n, R, p\big) := pV - nRT = 0.$$

In Anwendungen ist es wichtig zu wissen, wie die gesuchten Grössen y von den gegebenen Grössen x abhängen. Um das zu präzisieren, nehmen wir an, dass $\big(x, y\big) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ eine Lösung der Gleichung (9.7) ist.

Frage 9.11. *Gibt es eine Lösung y von (9.7) für x nahe bei x_0?*

Frage 9.12. *Ist diese Lösung eindeutig?*

Frage 9.13. *Wie hängt sie von x ab?*

[4]Die Stoffmenge wird in *Mol* gemessen. Ein Mol entspricht ungefähr $6.0 \cdot 10^{23}$ Teilchen.

Beispiel. Im Beispiel 9.10 ist die Antwort auf die Fragen 9.11 und 9.12 "ja", falls f auf $]0,\infty[$[5] definiert ist. Es gilt nämlich

$$p\big(V,T,n,R\big)=\frac{nRT}{V}.$$

Die Antwort auf die Frage 9.13 ist "glatt". Der Satz über implizite Funktionen besagt, dass diese Aussagen unter bestimmten Bedingungen allgemein gelten, ausser, dass die Lösung nur *lokal* existiert und nur lokal eindeutig ist.

Bemerkung. Zur Frage 9.12: Wir haben p Unbekannte $y^1,\dots,y^p$ und p Gleichungen:

$$f^i\big(x^1,\dots,x^n,y^1,\dots,y^p\big)=0,\quad i=1,\dots,p.$$

Darum ist es vernünftig zu erwarten, dass die Lösungen y isoliert auftreten, d. h., dass die Lösung eindeutig ist, falls wir das Gebiet von y auf eine kleine Umgebung von y_0 einschränken. Falls die Abbildung

$$f(x,\cdot):\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^p$$

zum Beispiel linear ist, dann ist $y=0$ die einzige Lösung von (9.7).

Das Hauptresultat dieses Abschnitts gibt Antworten auf die Fragen 9.11,9.12,9.13: Seien $W\subseteq\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p$ eine offene Teilmenge, $(x_0,y_0)\in W$, $k\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ und $f\in C^k(W,\mathbb{R}^p)$. Wir definieren

$$D_xf(x_0,y_0):=D\big(f(\cdot,y_0)\big)(x_0):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p.$$

Das ist die Ableitung der Abbildung

$$x\mapsto f(x,y_0)$$

im Punkt $x=x_0$. Des Weiteren schreiben wir

$$D_yf(x_0,y_0):\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^p$$

für die Ableitung der Abbildung

$$y\mapsto f(x_0,y)$$

im Punkt $y=y_0$.

Satz 9.14 (implizite Funktionen)**.** *Wir nehmen an, dass*

$$f(x_0,y_0)=0, \tag{9.8}$$

$$D_yf(x_0,y_0)\ \textit{invertierbar ist.} \tag{9.9}$$

Folgende Aussagen gelten:

(i) Es gibt offene Umgebungen U von x_0 und V von y_0 und eine Abbildung

$$g \in C^k(U, V)$$

so, dass

$$U \times V \subseteq W, \tag{9.10}$$
$$f^{-1}(0) \cap (U \times V) = \mathrm{gr}(g) = \big\{(x, g(x)) \,\big|\, x \in U\big\}, \tag{9.11}$$
$$D_y f(x, g(x)) \text{ invertierbar ist}, \quad \forall x \in U \tag{9.12}$$

($\mathrm{gr}(g)$ = Graph von g).

(ii) Seien U, V und g wie in (i) und $x \in U$. Dann gilt

$$Dg(x) = -\big(D_y f(x, g(x))\big)^{-1} D_x f(x, g(x)). \tag{9.13}$$

Beweis: (i): [Stra, Satz 8.8.1, S. 237]

(ii): S. 442

Beispiel 9.15. [Satz über implizite Funktionen] Wir betrachten

$$n = p = 1,$$
$$f : W := \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) := y^2 - x + 1,$$
$$(x_0, y_0) \in]1, \infty[\times]0, \infty[,$$

siehe Abbildung 9.4. In diesem Fall erfüllen

$$U :=]1, \infty[, \quad V :=]0, \infty[,$$
$$g : U \to V, \quad g(x) := \sqrt{x - 1},$$

die Bedingungen in Teil (i) des Satzes 9.14. (Siehe Abbildung 9.5.) Es gilt

$$D_x f(x, y) = -1\cdot, \quad D_y f(x, y) = 2y\cdot$$

und darum:

$$-\big(D_y f(x, g(x))\big)^{-1} D_x f(x, g(x)) = -\big(2\sqrt{x-1}\big)^{-1} \cdot (-1)\cdot = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\cdot$$

Die rechte Seite stimmt mit $Dg(x) = g'(x)\cdot$ überein. Daher gilt dies Aussage (ii) des Satzes 9.14 in diesem Beispiel.

Bemerkungen. [Satz über implizite Funktionen]

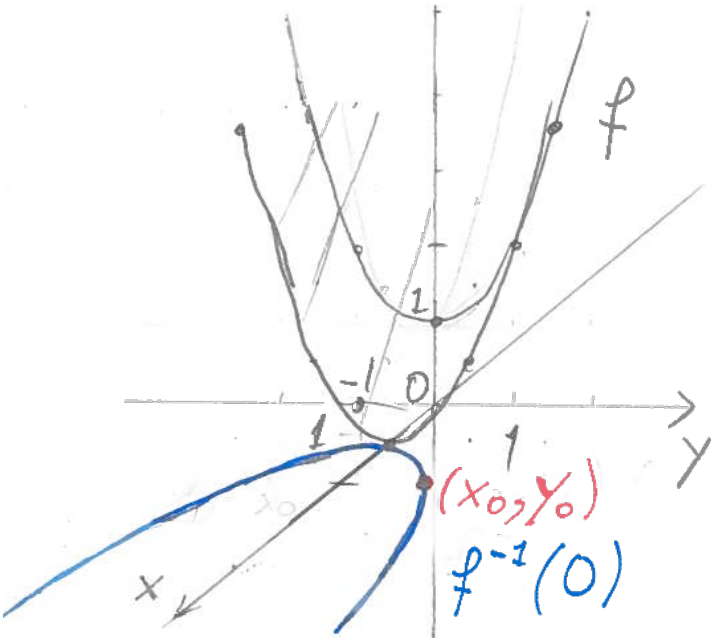


Abbildung 9.4: $f(x, y) := y^2 - x + 1$, Niveaumenge $f^{-1}(0)$ = Isolinie

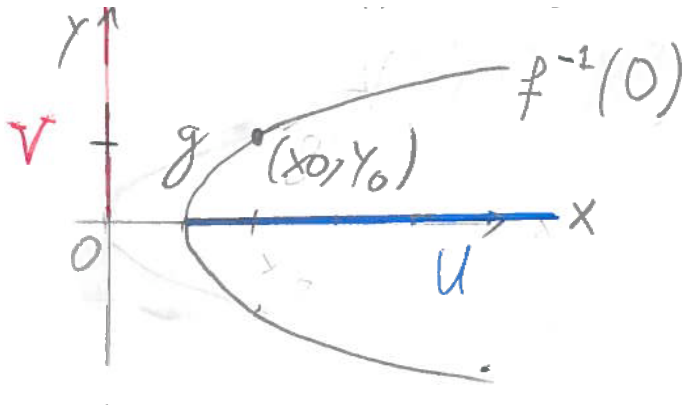


Abbildung 9.5: Der Satz über implizite Funktionen.



Abbildung 9.6: Höhenlinie auf einer Karte.

- **(Grösse von U und V)** In diesem Beispiel müssen wir U und V klein genug wählen: Die Funktion g kann nicht auf $]-\infty, 1[$ definiert werden. Darum darf U das Intervall $]-\infty, 1[$ nicht schneiden. V darf $-y_0$ nicht enthalten, da sonst die Bedingung (9.11) $(f^{-1}(0) \cap (U \times V) = \mathrm{gr}(g))$ nicht erfüllt ist.

- **(Voraussetzung $D_y f(x_0, y_0)$ invertierbar)** Die Aussage von 9.14(i) ist falsch für $(x_0, y_0) = (1, 0)$, weil y in keiner Umgebung dieses Punktes als eine Funktion von x geschrieben werden kann:

  - Für $x < 1$ gibt es keine Lösung y von $f(x, y) = 0$.
  - Für $x > 1$ gibt es zwei Lösungen nahe $y_0 = 0$.

  Das zeigt, dass wir die Voraussetzung 9.9 ($D_y f(x_0, y_0)$ invertierbar) nicht weglassen können. (Für $(x_0, y_0) = (1, 0)$ ist diese Bedingung nicht erfüllt, da $D_y f(1, 0) = 0$, was nicht invertierbar ist.)

Bemerkungen. [Satz über implizite Funktionen, Isolinie, Höhenlinien]

- **(Isolinie, Höhenlinie)** Für jedes $z \in \mathbb{R}$ ist die Niveaumenge $f^{-1}(z)$ eine *Isolinie*. (*iso* kommt von griechisch $\iota\sigma o\sigma$ = gleich.) Diese Linien kommen in *topographischen Karten* vor. Dort beschreibt f die Höhe eines Punktes über dem Meeresspiegel, siehe Abbildung 9.6. Die Isolinien sind dann die Höhenlinien. Topographische Karten sind beim Wandern in den Bergen nützlich, da sie den vertikalen Abstand zwischen zwei Punkten angeben.

  Satz 9.14 gibt Bedingungen an, unter denen eine Isolinie lokal der Graph einer C^k-Funktion g ist. ("Lokal" bedeutet "in einer kleinen Umgebung eines gegebenen Punktes".) Das bedeutet, dass die Isolinie schön aussieht. (Sie ist dann eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, siehe später.)

- **(implizite Funktion)** g heisst die *implizite Funktion*. Sie ist implizit durch die Gleichung 9.7 definiert.

- **(Gleichung $f(x,y)=0$)** Satz 9.14 liefert Antworten auf die Fragen 9.11 (Gibt es eine Lösung?), 9.13 (Wie hängt sie von x ab?) und auf eine lokale Version der Frage 9.12 (Ist die Lösung eindeutig?).

- **(Voraussetzung $D_yf(x_0,y_0)$ invertierbar)** Wie in Beispiel 9.15 bemerkt, können wir die Voraussetzung 9.9, dass $D_yf(x_0,y_0)$ invertierbar ist, nicht weglassen.

  Merkhilfe für die Voraussetzung (9.9): $D_yf(x_0,y_0)$ ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^p$ nach $\mathbb{R}^p$, daher ist es sinnvoll, Invertierbarkeit dieser Abbildung zu fordern. (Im Gegensatz dazu ist $D_xf(x_0,y_0)$ eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^p$ und daher nie invertierbar, falls $n\neq p$.)

- **(Ableitung der impliziten Funktion)** Die Bedingungen (9.8),9.11) implizieren, dass $y_0=g(x_0)$. Wegen 9.13 folgt daraus, dass

$$Dg(x_0)=-\big(D_yf(x_0,y_0)\big)^{-1}D_xf(x_0,y_0).$$

  Bemerkenswerterweise können wir mit dieser Formel die Ableitung von g im Punkt x_0 explizit berechnen, falls wir f explizit kennen. (Wir brauchen dazu also keine Formel für g.) Falls $n=p=1$, dann ist diese Ableitung die Rate, mit der sich die Grösse y ändert, wenn die Grösse x sich ändert.

  Merkhilfe für die Formel (9.13) für $Dg(x)$:

  - Wir verwenden, was wir haben, nämlich die Inverse $D_yf(x,g(x))^{-1}$. Diese existiert wegen (i), (9.12).
  - Die rechte Seite von (9.13) ist die "einzige kurze" sinnvolle Formel, die $D_yf(x,g(x))^{-1}$ enthält. (Diese Formel liefert tatsächlich eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^p$.)

Beweis von Teil (ii) des Satzes 9.14(ii) (Formel für $Dg(x)$): Die Bedingung (9.11) impliziert, dass $f(x,g(x))=0$, $\forall x\in U$, und daher

$$0=f\circ\begin{pmatrix}\mathrm{id}\\ g\end{pmatrix}:U\to\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p. \tag{9.14}$$

Da g C^k ist, ist die Abbildung

$$(\mathrm{id},g):U\to U\times V$$

C^k und daher differenzierbar. Die Gleichheit (9.14) und die Kettenregel (Satz 8.12) implizieren daher, dass

$$\begin{aligned}
0 &= D\left(f \circ \begin{pmatrix} \mathrm{id} \\ g \end{pmatrix}\right)(x) \\
&= Df(x, g(x)) \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} \\ Dg(x) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} D_x f(x, g(x)) & D_y f(x, g(x)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} \\ Dg(x) \end{pmatrix} \\
&= D_x f(x, g(x)) + D_y f(x, g(x)) Dg(x), \quad \forall x \in U.
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Gleichheit (9.13) . Das beweist Teil (ii) des Satzes 9.14. □

Beispiel für den Satz über implizite Funktionen: einfache Nullstellen von Polynomen

Beispiel 9.16. [einfache Nullstellen von Polynomen] Einfache Nullstellen von Polynomen hängen glatt von den Koeffizienten ab: Seien

$$f : W := \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) := \sum_{i=0}^{n} x_i y^i \quad (i\text{-te Potenz von } y)$$

und $(X, Y) \in W$ so, dass $f(X, Y) = 0$. ((X, Y) spielt die Rolle von (x_0, y_0).) Wir definieren

$$p_0(y) := f(X, y).$$

Behauptung 1. *$D_y f(X, Y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann invertierbar, wenn Y eine einfache Nullstelle von p_0 ist.*

Diese Bedingung bedeutet Folgendes: Falls q_0 ein Polynom ist so, dass $p_0(y) = (y - Y)q_0(y)$, dann gilt $q_0(Y) \neq 0$.

Beweis der Behauptung 1: "$\Longleftarrow$": Wir nehmen an, dass Y eine einfache Nullstelle von p_0 ist. Es gilt

$$D_y f(X, Y) = p_0'(Y) \cdot : \mathbb{R} \to \mathbb{R}. \tag{9.15}$$

Sei q_0 ein Polynom so, dass $p_0(y) = (y - Y)q_0(y)$. Gemäss der Leibnizregel (=Produktregel) gilt

$$p_0'(y) = q_0(y) + (y - Y)q_0'(y)$$

und darum, dass $p_0'(Y) = q_0(Y)$. Da Y eine einfache Nullstelle von p_0 ist, folgt, dass $p_0'(Y) \neq 0$. Mittels (9.15) folgt, dass $D_y f(X, Y)$ invertierbar ist. Das beweist "$\Longleftarrow$".

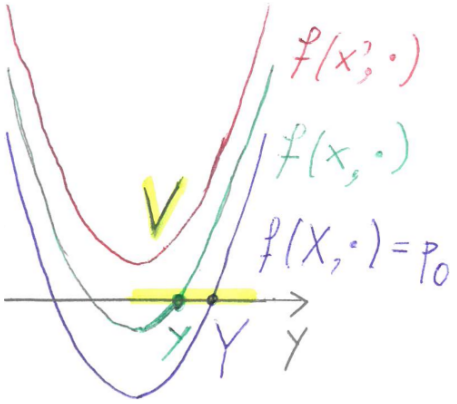


Abbildung 9.7: Polynome, die zu verschiedenen Parametern gehören. Für x in einer Umgebung U von X besitzt das Polynom $f(x,\cdot)$ eine eindeutige Nullstelle y in der Umgebung V von Y. Das bedeutet, dass y die Gleichung $f(x,y)=0$ löst. Für x' gibt es keine Lösung y der Gleichung $f(x',y)=0$. (x' liegt ausserhalb der Umgebung U von X.)

Die Implikation "$\Rightarrow$" folgt aus einem analogen Argument. Das beweist Behauptung 1. □

Wir nehmen jetzt an, dass Y eine einfache Nullstelle von p_0 ist. Wegen Satz 9.14 gibt es dann offene Umgebungen $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ von X und $V \subseteq \mathbb{R}$ von Y und eine Funktion $g \in C^\infty(U,V)$ so, dass für jedes $x \in U$ die Zahl $y = g(x)$ die Gleichung

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{n} x_i y^i = 0,$$

löst und das die einzige Lösung in V ist. (Wir können für V ein Intervall wählen.) Abbildung 9.7 verdeutlicht das.

In den Fällen $n=1$ und $n=2$ wussten wir das schon:

Fall $n=1$: Da Y eine einfache Nullstelle von p_0 ist, gilt

$$0 \neq p_0'(Y) = X_1.$$

In diesem Fall gibt es tatsächlich eine implizite Funktion: Wir können dafür nämlich Folgendes nehmen:

$$U := \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}),\ V := \mathbb{R}, \quad g(x) := -\frac{x_0}{x_1}.$$

Fall $n=2$: Da Y eine einfache Nullstelle von p_0 ist, gilt

$$0 \neq p_0'(Y) = X_1 + 2X_2Y. \tag{9.16}$$

In diesem Fall gibt es tatsächlich eine implizite Funktion:

Fall $X_2 \neq 0$**.** Dann gilt

$$y = g(x) := \frac{-x_1 \pm \sqrt{x_1^2 - 4x_0x_2}}{2x_2}. \tag{9.17}$$

Das ist die Mitternachtsformel[5] Das richtige Vorzeichen in 9.17 hängt von Y ab. Die Bedingung 9.16 garantiert, dass

$$X_1^2 - 4X_0X_2 \neq 0.$$

(Sonst haben wir

$$Y = g(X) = -\frac{X_1}{2X_2}.)$$

Daraus folgt, dass g (gegeben durch (9.17)) im Punkt $x = X$ glatt ist.

Frage. *Wie steht es mit dem Fall* $X_2 = 0$*?*

Frage. *Passen die Formeln für die Fälle* $X_2 \neq 0$ *und* $X_2 = 0$ *glatt zusammen?*

Frage. *Wie steht es mit mehrfachen Nullstellen von Polynomen? Hängen diese ebenfalls glatt von den Koeffizienten ab?*

(Versuchen Sie, selber Antworten auf diese Fragen zu finden!) △

Bemerkung. Wie wir in Beispiel 9.16 gesehen haben, hängen einfache Nullstellen von Polynomen glatt von den Koeffizienten ab. Im Gegensatz dazu besagt der Satz von Abel-Ruffini, dass es für $n \geq 5$ keine Formel für die Nullstellen eines allgemeinen Polynoms vom Grad n gibt. Mit einer Formel meinen wir hier einen endlichen Ausdruck, der aus den Koeffizienten des Polynoms mittels Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und Wurzelziehen gebildet wird. (Dieser Satz ist nach Paolo Ruffini (1765 - 1822, italienischer Mathematiker und Arzt) und Niels-Henrik Abel (1802 - 1829, norwegischer Mathematiker) benannt.

Das zeigt, dass der Satz über implizite Funktionen ein starkes Werkzeug ist: Obwohl es dafür keine Formel gibt, wissen wir, dass es eine glatte implizite Funktion gibt. Wir können sogar ihre Ableitung in bestimmten Punkten berechnen.

[5]Damit meinen wir die Lösungsformel für eine quadratische Gleichung.

Untermannigfaltigkeit des Koordinatenraums, Immersion, Einbettung, Submersion

Intuitiv ist eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ eine "schöne" Teilmenge wie zum Beispiel eine Kurve oder eine Fläche in $\mathbb{R}^3$. "Schönheit" bedeutet, dass die Teilmenge lokal wie $\mathbb{R}^d$ aussieht, wobei für eine Kurve $d = 1$ und für eine Fläche $d = 2$ ist. Untermannigfaltigkeiten kommen in den Sätzen von Green, Stokes und Gauß vor, die wir später behandeln werden. Diese Sätze spielen eine zentrale Rolle in der Elektrodynamik.

Wir werden auch Immersionen und Submersionen behandeln. Eine Immersion ist eine differenzierbare Abbildung, deren Ableitung in jedem Punkt injektiv ist. Eine Submersion ist eine differenzierbare Abbildung, deren Ableitung in jedem Punkt surjektiv ist.

Ein Punkt y heisst *regulärer Wert* einer C^k-Abbildung f, falls für jeden Punkt x im Urbild von y unter f die Ableitung von f im Punkt x surjektiv ist. Der Satz vom regulären Wert besagt, dass das Urbild jedes regulären Wertes eine Untermannigfaltigkeit des Koordinatenraums ist. Dieser Satz liefert viele Beispiele von Untermannigfaltigkeiten.

9.3 Untermannigfaltigkeit des Koordinatenraums, Dimension

Seien $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $d \in \{0, \dots, n\}$.

Definition 9.17 (Untermannigfaltigkeit des Koordinatenraums)**.** *Sei $x_0 \in M$. Wir sagen, dass M* um x_0 eine *d*-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ *ist g. d. w. es eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von x_0, eine Permutation σ von $\{1, \dots, n\}$, eine offene Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^d$ und eine Funktion $f \in C^k(V, \mathbb{R}^{n-d})$ gibt so, dass*

$$\big\{\big(x^{\sigma(1)}, \dots, x^{\sigma(n)}\big) \,\big|\, x \in M \cap U\big\} = \mathrm{gr}(f) = \big\{(y, f(y)) \,\big|\, y \in V\big\}. \tag{9.18}$$

Wir nennen M eine d-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ *g. d. w. M diese Bedingung für jeden Punkt $x_0 \in M$ erfüllt. Im Fall $k = \infty$ nennen wir eine solche Teilmenge M eine* glatte *(d-dimensionale) Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.*

Abbildung 9.8 verdeutlicht diese Definition.

Bemerkungen. [Untermannigfaltigkeit]

- Eine Permutation einer Menge X ist eine Bijektion $\sigma : X \to X$. Ein Beispiel dafür ist die Identität id_X. Ein anderes Beispiel ist die Abbildung

$$\sigma : \{1, 2\} \to \{1, 2\}, \qquad \sigma(1) := 2,\ \sigma(2) := 1.$$

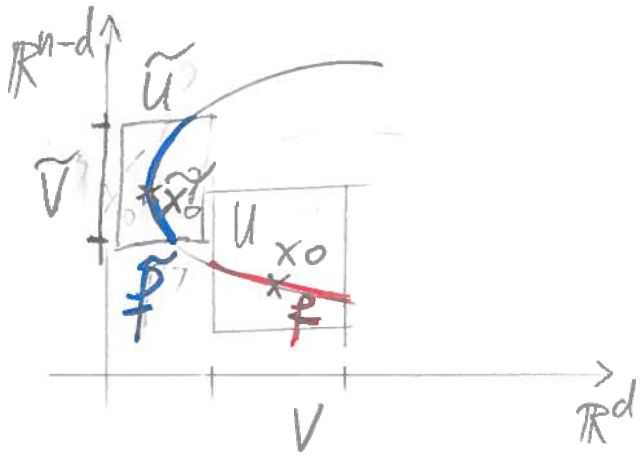


Abbildung 9.8: 1-dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$. ($n = 2$, $d = 1$) Um den Punkt x_0 kann die Koordinate x^2 als eine Funktion von x^1 aufgefasst werden. Um den Punkt $\widetilde{x}_0$ ist es umgekehrt.

Diese Abbildung permutiert, d. h. vertauscht die beiden Indizes 1 und 2.

- Im Fall $\sigma = \mathrm{id}_{\{1,\dots,n\}}$ sagt die Bedingung (9.18), dass der Durchschnitt $M \cap U$ der Graph der Funktion f ist.

- Für eine allgemeine Permutation σ von $\{1, \dots, n\}$ ist die linke Seite von (9.18) das Bild von $M \cap U$ unter der Standardkoordinatentransformation

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto \left(x^{\sigma(1)}, \dots, x^{\sigma(n)}\right) \in \mathbb{R}^n. \tag{9.19}$$

  Diese Koordinatentransformation entspricht einer Vertauschung der Variablen $x^1, \dots, x^n$. Die Bedingung in Definition 9.17 ist also, dass M lokal bis auf eine Standardkoordinatentransformation als der Graph einer C^k-Funktion geschrieben werden kann.

Proposition 9.18 (Dimension wohldefiniert)**.** *Falls M um $x_0 \in M$ eine C^k-Untermannigfaltigkeit der Dimensionen d und d' ist, dann gilt $d = d'$.*

Beweis: Wir schreiben $\mathrm{pr}' : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{d'} \times \mathbb{R}^{n-d'}$ für die Projektion auf den ersten Faktor.[6] Wir wählen U, σ, V, f wie in Definition 9.17. Wir schreiben $x_0 =: (y_0, z_0) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$. Im Fall $\sigma = \mathrm{id}$ ist die Ableitung der Abbildung $\mathrm{pr}' \circ (\mathrm{id}, f) : V \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d'}$ im Punkt y_0 injektiv. Daraus folgt, dass $d' \geq d$. Den Fall $\sigma \neq \mathrm{id}$ behandeln wir analog, indem wir die Koordinaten geeignet transformieren.

[6] Diese Projektion ist definiert durch $\mathrm{pr}'(y', z') := y'$, für $x = (y', z') \in \mathbb{R}^{d'} \times \mathbb{R}^{n-d'}$.

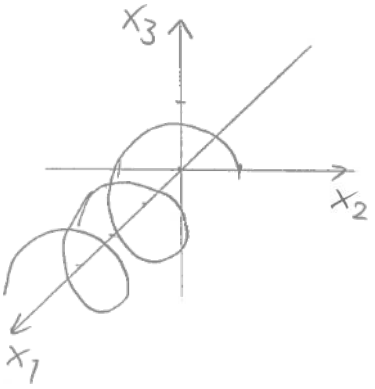


Abbildung 9.9: Helix = Schraubenlinie.

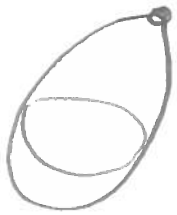


Abbildung 9.10: Dieser "Ballon" mit einer Spitze ist keine C^1-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$.

Ein analoges Argument zeigt, dass $d \geq d'$, also $d = d'$. Das beweist Proposition 9.18. □

Beispiel 9.19. Jeder d-dimensionale (lineare) Unterraum des $\mathbb{R}^n$ ist eine glatte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ der Dimension d.

Beispiel 9.20. Jede offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist eine glatte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ der Dimension n.

Beispiel 9.21. Wir betrachten die Helix (=Schraubenlinie)

$$\big\{\big(y, \cos y, \sin y\big) \,\big|\, y \in \mathbb{R}\big\},$$

siehe Abbildung 9.9. Das ist eine glatte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ der Dimension 1. (Warum?)

Beispiel 9.22. Die Sphäre

$$S^{n-1} := S_1^{n-1}(0) = \big\{x \in \mathbb{R}^n \,\big|\, \|x\| = 1\big\}$$

ist eine glatte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ der Dimension $n-1$. Um das einzusehen, betrachten wir zuerst einen Punkt $x_0 \in S^{n-1} \cap \mathbb{R}^{n-1}\times]0,\infty[$. Wir definieren

$$\begin{aligned} &U := \mathbb{R}^{n-1}\times]0,\infty[, \quad V := B^{n-1}, \sigma := \mathrm{id}, \\ &f : V \to]0,\infty[, \quad f(y) := \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2}. \end{aligned} \tag{9.20}$$

Diese Abbildung ist glatt. Des Weiteren ist U eine offene Umgebung von x_0 und

$$\big\{\big(x^{\sigma(1)}, \ldots, x^{\sigma(n)}\big) \,\big|\, x \in M \cap U\big\} = S^{n-1} \cap U = \mathrm{gr}(f).$$

S^{n-1} ist daher um den Punkt x_0 eine glatte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ der Dimension $n-1$. Dasselbe gilt für einen allgemeinen Punkt $x_0 \in S^{n-1}$. Um das zu sehen, betrachten wir wieder die Funktion f wie in (9.20) und verwenden ein geeignetes U und eine geeignete Permutation σ der Menge $\{1,\dots,n\}$. Im Fall $n=2$ und $x_0=(1,0)$ können wir zum Beispiel $U :=]0,\infty[\times\mathbb{R}$ und die Permutation $\sigma(1) := 2$, $\sigma(2) := 1$ verwenden. (Überprüfen Sie das!) Daraus folgt, dass die Sphäre S^{n-1} eine glatte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ der Dimension $n-1$ ist, wie behauptet.

Beispiele 9.23. [keine C^1-Untermannigfaltigkeit]

- Die Menge
$$(\mathbb{R}\times\{0\})\cup(\{0\}\times\mathbb{R})$$
ist keine C^1-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$. (Warum?)
- Ein "Ballon" mit einer Spitze wie in Abbildung 9.10 ist keine C^1-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$. (Warum?)

9.4 Immersion, Einbettung, Submersion, "Einbettungssatz", Charakterisierung einer Untermannigfaltigkeit

Dieser Abschnitt wird teilweise in [Stra, 8.6] behandelt. Eine Immersion ist eine differenzierbare Abbildung, deren Ableitung injektiv ist. Eine Submersion ist eine differenzierbare Abbildung, deren Ableitung surjektiv ist.

Seien $n,p\in\mathbb{N}_0$, $k\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, $U\subseteq\mathbb{R}^n$ offen und $f: U\to\mathbb{R}^p$.

Definition 9.24 (Immersion, Submersion, Einbettung)**.** *Sei $x\in U$ ein Punkt, in dem f differenzierbar ist. Wir sagen, dass f im Punkt x eine* Immersion *ist g. d. w. $Df(x)$ injektiv ist. Wir sagen, dass f im Punkt x eine* Submersion *ist g. d. w. $Df(x)$ surjektiv ist. Wir sagen, dass f eine* Immersion/ Submersion *ist g. d. w. f in jedem Punkt eine* Immersion/ Submersion *ist. Wir nennen f eine C^k-*Einbettung *g. d. w. f injektiv, C^k und eine Immersion ist und $f^{-1}: f(U)\to U$ stetig ist.*

Beispiel 9.25. [Immersion, Einbettung, Submersion] Sei $f=T: U:=\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ eine lineare Abbildung. Falls T injektiv ist, dann ist es eine glatte Einbettung, also insbesondere eine glatte Immersion. Falls T surjektiv ist, dann ist es eine glatte Submersion.

Beispiel 9.26. [Immersion, die keine Einbettung ist] Wir betrachten die Abbildung

$$f:]-\infty,0[\cup]0,\infty[\to\mathbb{R}^2,\quad f(y) := \begin{cases}(y+1,0), & \text{falls } y<0,\\ (0,y-1), & \text{falls } y>0,\end{cases}$$

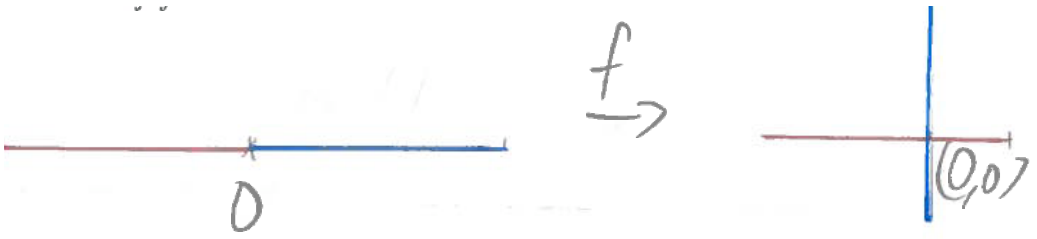


Abbildung 9.11: Eine Immersion, die keine Einbettung ist.

siehe Abbildung 9.11. Diese Abbildung ist eine glatte Immersion, aber keine C^k-Einbettung (für jedes $k \geq 1$), weil sie nicht injektiv ist. Wir schreiben $V :=]-\infty, 0[\cup]1, \infty[$. $f|_V$ ist eine injektive glatte Immersion, aber keine C^k-Einbettung (für jedes $k \geq 1$), da $f|_V^{-1} : f(V) \to V$ im Punkt $(0,0)$ nicht stetig ist. (Überlegen Sie sich das!) Auf der anderen Seite ist die Einschränkung von f auf $]-\infty, 0[\cup]2, \infty[$ eine glatte Einbettung.

Bemerkung. Im obigen Beispiel konnten wir für einen gegebenen Punkt im Definitionsbereich der Immersion f eine Umgebung finden, auf der f eine Einbettung ist. Das Bild dieser Einbettung ist eine glatte Untermannigfaltigkeit. Diese zwei Aussagen gelten allgemein.

Seien $d, n \in \mathbb{N}_0$, $V \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $\psi : V \to \mathbb{R}^n$.

Satz 9.27 ("Einbettungssatz")**.** *Falls ψ eine C^k-Einbettung ist, dann ist ihr Bild $\psi(V)$ eine C^k-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ der Dimension d.*

Beweis: [DK04a, Corollary 4.3.2, p. 116]

Bemerkung. Das bedeutet, dass C^k-Einbettungen "schöne" Abbildungen sind.

Beispiel 9.28. [injektive lineare Abbildung] Sei $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ linear und injektiv. Dann ist ψ eine glatte Einbettung. Gemäss Satz 9.27 ist ihr Bild $\psi(\mathbb{R}^d)$ daher eine glatte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ der Dimension d. Wie Sie im Fach *Lineare Algebra* gelernt haben, ist dieses Bild sogar[7] ein d-dimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$. Siehe Bemerkung 9.29(iii) unten.

Bemerkungen 9.29. [Kern und Bild einer linearen Abbildung, Dimensionssatz] Wiederholung aus der linearen Algebra: Seien V, W Vektorräume und $T : V \to W$ eine lineare Abbildung.

[7]Hier steht *sogar*, da jeder d-dimensionale Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ eine glatte d-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist. Siehe Beispiel 9.19.

(i) Der *Kern* (oder *Nullraum*) *von* T ist die Menge

$$\ker T := T^{-1}(0) = \{v \in V \mid T(v) = 0\}.$$

(ii) Das Bild von T ist ein Untervektorraum von W.

(iii) Der *Dimensionssatz für lineare Abbildungen* (oder *Rangsatz*) besagt, dass

$$\dim(\ker(T)) + \dim(\mathrm{im}(T)) = \dim(V).$$

Falls T injektiv ist, dann ist sein Kern gleich $\{0\}$ und daher also

$$\dim(\mathrm{im}(T)) = \dim(V).$$

Falls T surjektiv ist, dann ist sein Bild gleich W und daher also

$$\dim(\ker(T)) = \dim(V) - \dim(W).$$

Seien $n \in \mathbb{N}_0$, $d \in \{0, \ldots, n\}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $x_0 \in M$.

Satz 9.30 (Charakterisierung einer Untermannigfaltigkeit)**.** *Folgende Bedingungen sind äquivalent:*

(i) (Untermannigfaltigkeit) Um x_0 ist M eine C^k-Untermannigfaltigkeit der Dimension d.

(ii) (lokale Parametrisierung) Es gibt eine offene Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^d$, eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von x_0 und eine C^k-Einbettung $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ so, dass

$$M \cap U = \psi(V).$$

(iii) (lokale Submersion) Es gibt eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von x_0 und eine C^k-Submersion $g : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ so, dass

$$M \cap U = g^{-1}(g(x_0)). \tag{9.21}$$

Beweis: [DK04a, Theorem 4.7.1, p. 126]

Bemerkung. Eine Abbildung ψ wie in (ii) heisst *lokale Parametrisierung* von M. ψ parametrisiert $M \cap U$, was eine Umgebung des Punktes x_0 in M ist. Das Wort *lokal* deutet an, dass diese Umgebung klein sein kann.

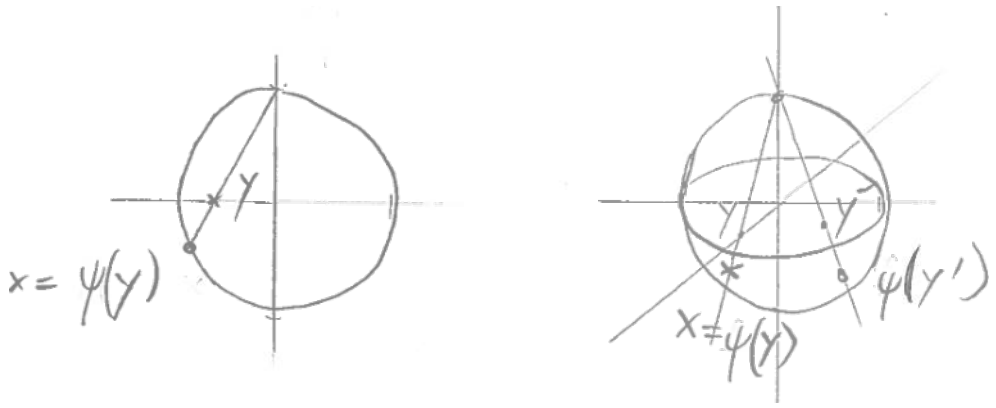


Abbildung 9.12: ψ = inverse stereographische Projektion.

Beispiel 9.31. [Sphäre ist Untermannigfaltigkeit, lokale Parametrisierung] Wir wenden die Implikation (ii)⇒(i) des Satzes 9.30 an, um zu zeigen, dass die Sphäre $M := S^{n-1}$ eine glatte $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist. Sei $x_0 \in S^{n-1}$. Wir überprüfen die Bedingung (ii) mit $d := n-1$. Wir nennen den Punkt $\big(0,\dots,0,1\big)$ den *Nordpol der Sphäre* S^{n-1}.

Fall: $x_0 \neq$ **Nordpol.** Wir definieren

$$V := \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{n-1}, \qquad U := \mathbb{R}^n \setminus \big\{\big(0,\dots,0,1\big)\big\} \qquad \text{und} \qquad \psi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$$

als die inverse stereographische Projektion durch den Nordpol. Diese Abbildung ist durch die Konstruktion in Abbildung 9.12 gegeben. Gemäss Übungsserie 5 ist diese Abbildung eine glatte Einbettung. Sie ist also eine glatte lokale Parametrisierung der Sphäre. Ihr Bild ist die Sphäre ohne den Nordpol, also

$$\mathrm{im}(\psi) = \psi(\mathbb{R}^n) = S^{n-1} \setminus \big\{\big(0,\dots,0,1\big)\big\} = S^{n-1} \cap U.$$

Daher ist die Bedingung (ii) des Satzes 9.30 erfüllt. Im Fall, dass x_0 der Nordpol ist, folgt das aus einem analogen Argument, in dem wir stereographische Projektion durch den Südpol $\big(0,\dots,0,-1\big)$ verwenden.

Gemäss Satz 9.30 ist daher die Bedingung (i) mit $d = n-1$ erfüllt, d. h., um x_0 ist S^{n-1} eine glatte Untermannigfaltigkeit der Dimension $n-1$. Da das für jeden Punkt $x_0 \in S^{n-1}$ gilt, ist S^{n-1} eine glatte Untermannigfaltigkeit der Dimension $n-1$. Das hatten wir schon in Beispiel 9.22 gesehen.

Beispiel 9.32. [Sphäre ist Untermannigfaltigkeit, lokale Submersion] Wir wenden die Implikation (iii)⇒(i) des Satzes 9.30 an, um zu zeigen, dass die Sphäre $M := S^{n-1}$ eine glatte $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist. Sei $x_0 \in S^{n-1}$. Wir überprüfen die Bedingung (iii) mit $d := n-1$. Dazu definieren wir

$$U := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \qquad g : U \to \mathbb{R}^{n-d} = \mathbb{R},\ g(x) := \|x\|^2.$$

Es gilt

$$g(x_0) = 1, \qquad \text{also} \qquad S^{n-1} = g^{-1}(1) = g^{-1}(g(x_0)).$$

Daher ist die Bedingung (9.21) erfüllt. Die Abbildung g ist glatt. Sei $x \in U$. Gemäss Beispiel 8.16 ist die Ableitung von g in x gegeben durch

$$Dg(x) = 2\langle x, \cdot \rangle = 2 \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \cdot : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Diese Abbildung ist nicht konstant gleich 0. Da sie linear ist und als Zielraum $\mathbb{R}$ hat, ist sie daher surjektiv. Daher ist g im Punkt x eine Submersion. Da dies für jeden Punkt $x \in U$ gilt, ist g eine Submersion. Also erfüllt g alle Bedingungen von (iii). Daher ist diese Bedingung mit $d = n - 1$ erfüllt. Gemäss Satz 9.30 ist daher die Bedingung (i) mit $d = n - 1$ erfüllt, d. h., um x_0 ist S^{n-1} eine glatte Untermannigfaltigkeit der Dimension $n - 1$.

9.5 Satz vom regulären Wert

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96b, 5.3, 5.4]. Ein regulärer Wert einer differenzierbaren Funktion g ist ein Punkt z im Zielbereich von g so, dass die Ableitung $Dg(x)$ surjektiv ist für jeden Punkt x im Urbild $g^{-1}(z)$. Der Satz vom regulären Wert besagt, dass das Urbild eines regulären Wertes einer C^k-Funktion eine C^k-Untermannigfaltigkeit ist. Das ist ein wichtiges Werkzeug, um Untermannigfaltigkeiten zu konstruieren.

In diesem Abschnitt charakterisieren wir auch Untermannigfaltigkeiten mittels lokaler Submersionen.

Seien $n, p \in \mathbb{N}_0$, $U_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $g \in C^k(U_0, \mathbb{R}^p)$ und $z_0 \in \mathbb{R}^p$.

Definition 9.33. *Wir nennen z_0 einen* regulären Wert für g *g. d. w. g eine Submersion ist in jedem Punkt von*

$$g^{-1}(z_0) = \big\{ x \in U_0 \,\big|\, g(x) = z_0 \big\}.$$

Sonst nennen wir z_0 einen singulären Wert für g.

Satz 9.34 (Satz vom regulären Wert)**.** *Das Urbild jedes regulären Wertes für g ist eine C^k-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ der Dimension $n - p$.*

Beweis: Das folgt aus der Implikation (i)$\Longleftarrow$(iii) in Satz 9.30.

Bemerkungen.
- Dieser Satz liefert eine Bedingung, unter der die Lösungsmenge der Gleichung $g(x) = z$ "schön" ist.

- Dass die Dimension von $g^{-1}(z_0)$ gleich $n-p$ ist, ist plausibel, weil wir n Unbekannte $x^1, \dots, x^n$ und p Bedingungen $g^i(x) = z_0^i$, $i = 1, \dots, p$, haben. Jede Bedingung vermindert die Dimension um 1.

Beispiel 9.35. [Satz vom regulären Wert, surjektive lineare Abbildung] Sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ eine surjektive lineare Abbildung. Dann ist g eine glatte Submersion. Jeder Punkt in $\mathbb{R}^p$ ist daher ein regulärer Wert für g. Gemäss Satz 9.34 ist $g^{-1}(0)$ daher eine glatte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ der Dimension $n-p$. Wie Sie im Fach *Lineare Algebra* gelernt haben, ist $g^{-1}(0)$ sogar[8] ein $(n-p)$-dimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$. Siehe Bemerkung 9.29(iii).

Beispiel 9.36. [Sphäre als Niveaumenge, Satz vom regulären Wert] Wir wenden Satz 9.34 an, um zu zeigen, dass die Sphäre S^{n-1} eine glatte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ der Dimension $n-1$ ist. Dazu definieren wir $p := 1$ und betrachten wir die Abbildung

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p = \mathbb{R}, \quad g(x) := \|x\|^2.$$

Es gilt

$$g^{-1}(1) = S^{n-1}.$$

Die Abbildung g ist glatt und 1 ist ein regulärer Wert für g, weil

$$Dg(x) = 2\langle x, \cdot \rangle = 2 \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \cdot : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

surjektiv ist für jeden Punkt $x \in S^{n-1}$. Gemäss Satz 9.34 ist S^{n-1} daher eine glatte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ der Dimension $n-p = n-1$. Das hatten wir schon in den Beispielen 9.22, 9.31 und 9.32 gesehen. (Beispiel 9.32 ist ähnlich zum jetzigen Beispiel.)

Im Gegensatz dazu ist das Urbild $g^{-1}(0) = \{0\}$ keine C^1-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ der Dimension $n-1$.[9] Das steht nicht im Widerspruch zu Satz 9.34, da 0 ein singulärer Wert für g ist.

Beispiel 9.37. [Hyperbel und singulärer Wert] Wir betrachten die Abbildung

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x) := x_1 x_2.$$

Sei $z_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann ist $g^{-1}(z_0) \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Doppelhyperbel. Siehe Abbildung 9.13. Es gilt

$$Dg(x) = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$$

Für jeden Punkt $x \in g^{-1}(z_0)$ ist diese Abbildung ungleich 0 und daher surjektiv. (Wir verwenden hier, dass die Abbildung linear ist und der Zielraum $\mathbb{R}$ ist.) Daher ist z_0 ein

[8] Hier steht *sogar*, da jeder d-dimensionale Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ eine glatte d-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist. Siehe Beispiel 9.19.

[9] Es ist jedoch eine glatte Untermannigfaltigkeit der Dimension 0.

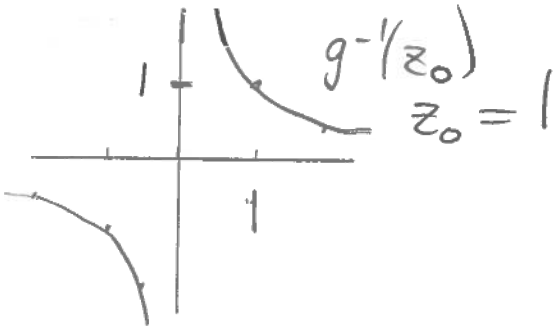


Abbildung 9.13: Doppelhyperbel.

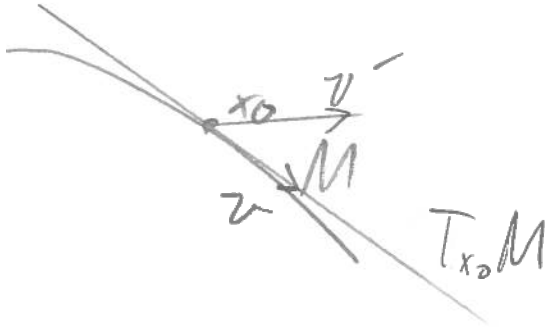


Abbildung 9.14: v ist ein Tangentialvektor an M im Punkt x_0, v' nicht.

regulärer Wert. Gemäss Satz 9.34 ist $g^{-1}(z_0)$ daher eine glatte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ der Dimension 1. Im Gegensatz dazu ist

$$g^{-1}(0) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1 x_2 = 0\right\} = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$$

im Punkt 0 keine C^1-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$. Das steht nicht im Widerspruch mit Satz 9.34, da $z_0 = 0$ ein singulärer Wert für g ist.

Bemerkung: Die Umkehrung des Satzes vom regulären Wert ist die folgende Aussage:

Falls $g^{-1}(z_0)$ eine C^k-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ der Dimension $n - p$ ist, dann ist z_0 ein regulärer Wert für g.

Frage. *Gilt diese Umkehrung?*

Versuchen Sie, diese Frage zu beantworten!

9.6 Tangentialraum an eine Untermannigfaltigkeit, Charakterisierung mittels Graphen, Immersion, Submersion

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96b, 5.1, 5.3]. Wir betrachten eine Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$, einen Punkt $x_0 \in M$ und einen Vektor v mit Anfangspunkt x_0. v ist ein *Tangentialvektor* an M im Punkt x_0 g. d. w. die Gerade durch v die Untermannigfaltigkeit M im Punkt x_0 berührt, siehe Abbildung 9.14. Die Menge aller Tangentialvektoren ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$. Sie heisst der *Tangentialraum* an M im Punkt x_0 und wird als $T_{x_0}M$ geschrieben. Siehe Abbildung 9.15. Der Tangentialraum verallgemeinert die *Tangente* an den Graphen einer Funktion einer reellen Variable.

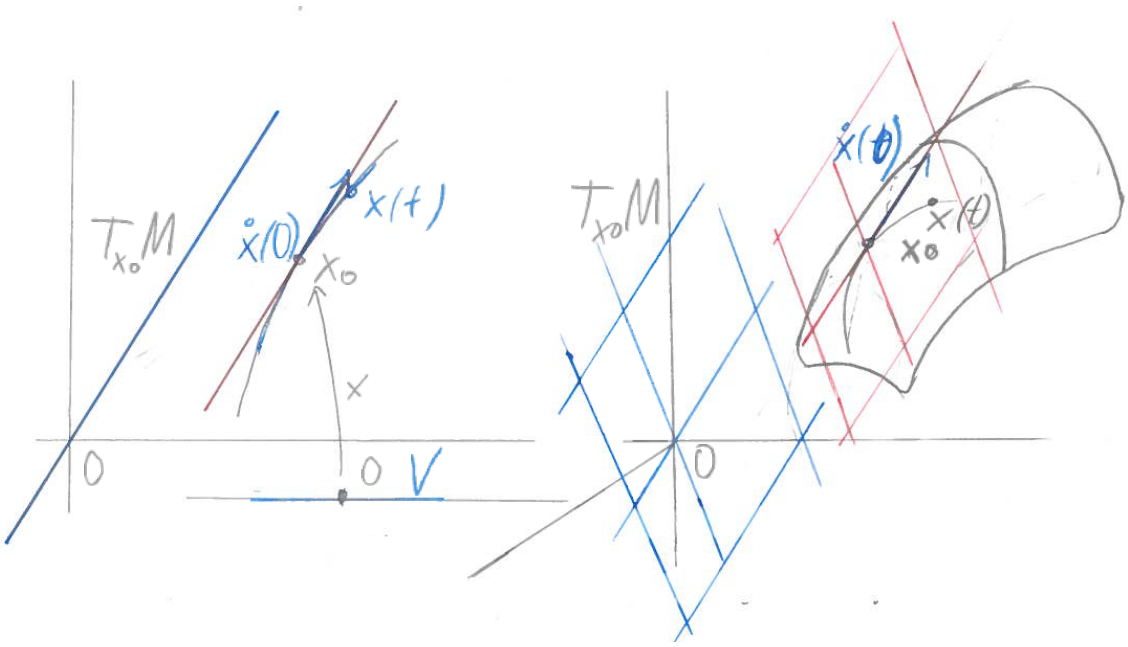


Abbildung 9.15: Der Tangentialraum $T_{x_0}M$ an eine Kurve und an eine Fläche.

Die *Tangentialabbildung* einer C^1-Abbildung zwischen zwei Untermannigfaltigkeiten M und N in einem Punkt $x_0 \in M$ ist eine lineare Abbildung von $T_{x_0}M$ nach $T_{f(x_0)}N$. Sie verallgemeinert die Ableitung einer Funktion zwischen Koordinatenräumen. Ein kritischer Punkt einer C^1-Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ ist ein Punkt in M, in dem die Tangentialabbildung von f verschwindet. Jeder kritische Punkt ist ein Kandidat für eine Maximal- oder Minimalstelle von f. Die Lagrange-Multiplikatorenregel ist ein Werkzeug, um kritische Punkte einer Funktion auf einer Untermannigfaltigkeit zu finden.

Seien $n \in \mathbb{N}_0$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine C^1-Untermannigfaltigkeit und $x_0 \in M$.

Definition 9.38 (Tangentialraum)**.** *Wir definieren $T_{x_0}M$, den* Tangentialraum an M im Punkt x_0 *als die Menge*

$$T_{x_0}M := \big\{\dot{x}(0)\big|\, W \subseteq \mathbb{R} \text{ offen}, x : W \to \mathbb{R}^n : \\ 0 \in W,\, x(0) = x_0,\, x(t) \in M,\, \forall t \in W,\, x \text{ differenzierbar in } 0\big\}. \tag{9.22}$$

Wir nennen die Elemente von $T_{x_0}M$ Tangentialvektoren an M im Punkt x_0.

Beispiel 9.39. [Tangentialräume an lineare Unterräume] Sei M ein d-dimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ und $x_0 \in M$. Dann gilt

$$T_{x_0}M = M.$$

Beispiel 9.40. [Tangentialräume an eine offene Teilmenge] Seien $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $x_0 \in M$. Dann gilt

$$T_{x_0}M = \mathbb{R}^n.$$

Folgendes Resultat liefert nützliche Formeln für den Tangentialraum. Seien $n \in \mathbb{N}_0$, $d \in \{0, \ldots, n\}$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine C^1-Untermannigfaltigkeit der Dimension d und $x_0 \in M$. Wir können $T_{x_0}M$ wie folgt charakterisieren.

Satz 9.41 (Charakterisierung des Tangentialraumes)**.** *(i) Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von x_0, $V \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f \in C^1(V, \mathbb{R}^{n-d})$ so, dass*

$$M \cap U = \mathrm{gr}(f) = \big\{(y, f(y)) \,\big|\, y \in V\big\}.$$

Wir bezeichnen die erste Komponente von $x_0 \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$ mit y_0. Es gilt

$$T_{x_0}M = \mathrm{gr}(Df(y_0)). \tag{9.23}$$

(ii) Seien $V \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $y_0 \in V$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von x_0 und $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ so, dass

$$\psi(y_0) = x_0, \quad \psi(V) = M \cap U$$

und ψ im Punkt y_0 eine Immersion ist. Dann gilt

$$T_{x_0}M = \mathrm{im}(D\psi(y_0)). \tag{9.24}$$

(iii) Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von x_0 und $g : U \to \mathbb{R}^{p=n-d}$ so, dass

$$M \cap U = g^{-1}(g(x_0))$$

und g im Punkt x_0 eine Submersion ist. Dann gilt

$$T_{x_0}M = \ker(Dg(x_0)) = Dg(x_0)^{-1}(0). \tag{9.25}$$

Beweis: [DK04a, Theorem 5.1.2, p. 134]

Bemerkungen. [Charakterisierung des Tangentialraumes]

- Aufgrund der Definition 9.17 (Untermannigfaltigkeit) besitzt M bis auf eine Standard-Koordinatentransformation eine lokale Darstellung mittels f wie in Satz 9.41(i). Aufgrund des Satzes 9.30 (Charakterisierung einer Untermannigfaltigkeit) besitzt M eine lokale Darstellung mittels ψ und g wie in Satz 9.41((ii),(iii)). Wir können daher die Gleichheiten (9.23,9.24,9.25) verwenden, um $T_{x_0}M$ zu berechnen.

- Die drei Beschreibungen des Tangentialraumes in Satz 9.41 sind parallel zu den Beschreibungen der Eigenschaft, dass M eine Untermannigfaltigkeit ist: In (i) wird M lokal als *Graph* einer Funktion und $T_{x_0}M$ als der *Graph* der Ableitung der Funktion (im Punkt y_0) geschrieben. In (ii) wird M lokal als das *Bild* einer Immersion[10] und $T_{x_0}M$ als das *Bild* der Ableitung der Immersion geschrieben. In (iii) wird M lokal als das *Urbild* eines Punktes einer Submersion[11] und $T_{x_0}M$ als das *Urbild* von 0 unter der Ableitung der Submersion geschrieben.

Korollar 9.42 (Dimension des Tangentialraumes)**.** *$T_{x_0}M$ ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ der Dimension gleich der Dimension von M.*

Beweis des Korollars 9.42: Gemäss Satz 9.30(i)⇒(ii) (Charakterisierung einer Untermannigfaltigkeit) gibt es (V, U, ψ) wie in Satz 9.41(ii). Gemäss diesem Satz gilt (9.24), d. h. $T_{x_0}M = \mathrm{im}(D\psi(y_0))$. Da $D\psi(y_0)$ linear ist, ist sein Bild, also $T_{x_0}M$, ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$. Da $D\psi(y_0)$ auf $\mathbb{R}^d$ definiert und injektiv ist, gilt $\dim\big(T_{x_0}M = \mathrm{im}\,\big(D\psi(y_0)\big)\,\big) = \dim\mathbb{R}^d = d$. Das beweist Korollar 9.42. □

Bemerkung. Alternativ folgt Korollar 9.42 aus Satz 9.30(i)⇒(iii) und Satz 9.41(iii). (Überprüfen Sie das!)

Beispiel. [Tangentialraum und Tangente] Sei $V \subseteq \mathbb{R}$ eine offene Teilmenge und $f \in C^1(V, \mathbb{R})$. Der Graph $M := \mathrm{gr}(f)$ ist eine eindimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$. Sei $x_0 \in M$. Wir schreiben y_0 für die erste Komponente von x_0. Gemäss Satz 9.41(i) ist der Tangentialraum an $\mathrm{gr}(f)$ im Punkt x_0 gegeben durch

$$T_{x_0}\,\mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}(Df(y_0)) = \big\{\big(t, Df(y_0)t\big) = t\big(1, f'(y_0)\big) \;\big|\; t \in \mathbb{R}\big\}. \tag{9.26}$$

Das ist die *Tangente*[12] an den Graphen der Funktion f, so verschoben, dass sie durch den Ursprung in $\mathbb{R}^2$ geht. Machen Sie sich das klar! Verwenden Sie, dass die Ableitung der Funktion im Punkt y_0 die Steigung der Tangente ist! (So kann man die Ableitung intuitiv erklären.)

Als ein Beispiel betrachten wir

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(y) := y^2, \qquad x_0 := (1, 1).$$

Wir haben $y_0 = 1$ und $f'(y_0) = 2$. Gemäss (9.26) ist der Tangentialraum an $\mathrm{gr}(f)$ im Punkt x_0 daher gegeben durch

$$T_{x_0}\,\mathrm{gr}(f) = \{t(1, 2) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Das ist die Gerade durch den Ursprung und durch den Punkt $(1, 2)$.

[10] Es reicht, dass die Abbildung im Punkt y_0 eine Immersion ist.
[11] Es reicht, dass die Abbildung im Punkt x_0 eine Submersion ist.
[12] die Sie in der Mittelschule gesehen haben

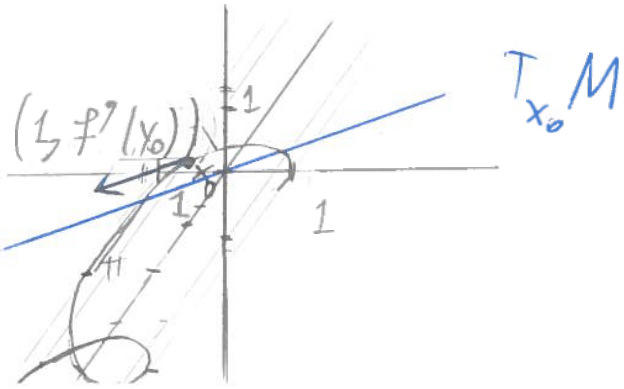


Abbildung 9.16: Tangentialraum = Tangente an die Helix.

Beispiel. [Tangentialraum an eine Helix] Wir betrachten die Helix

$$M := \big\{\big(y, \cos y, \sin y\big) \,\big|\, y \in \mathbb{R}\big\}.$$

(Siehe Abbildung 9.9.) Sei $x_0 \in M$. Wir berechnen den Tangentialraum an M im Punkt x_0 mittels des Satzes 9.41(i). Dazu schreiben wir y_0 für die erste Koordinate von x_0. M ist der Graph der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad f(y) := \big(\cos y, \sin y\big).$$

Es gilt

$$Df(y) = f'(y)\cdot = \big(-\sin y, \cos y\big)\cdot : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Gemäss Satz 9.41(i) gilt daher

$$T_{x_0}M = \mathrm{gr}(Df(y_0)) = \big\{t\big(1, -\sin y_0, \cos y_0\big) \,\big|\, t \in \mathbb{R}\big\}.$$

Das ist eine Gerade in $\mathbb{R}^3$. Siehe Abbildung 9.16.

Beispiel 9.43. [Tangentialräume an die Sphäre] Wir betrachten die Sphäre

$$M := S^{n-1} := \big\{x \in \mathbb{R}^n \,\big|\, \|x\| = 1\big\}.$$

Sei $x_0 \in S^{n-1}$. Wir berechnen den Tangentialraum an S^{n-1} im Punkt x_0 mittels des Satzes 9.41(iii). Dazu definieren wir die Funktion

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad g(x) := \|x\|^2.$$

Es gilt

$$g^{-1}(1) = S^{n-1}, \qquad Dg(x_0)v = 2\langle x_0, v\rangle, \ \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

Wegen Beispiel 9.36 (Sphäre als reguläre Niveaumenge) ist 1 ein regulärer Wert von g. Gemäss Satz 9.41(iii) gilt darum, dass

$$T_{x_0}S^{n-1} = \ker Dg(x_0) = \big\{v \in \mathbb{R}^n \,\big|\, \langle x_0, v\rangle = 0\big\}. \tag{9.27}$$

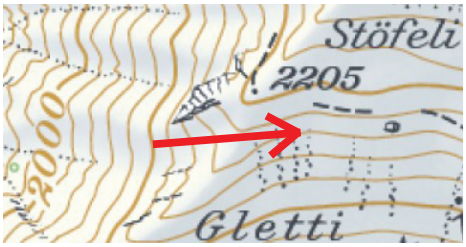


Abbildung 9.17: Der rote Pfeil ist der Gradient $\nabla g(x)$ der Höhenfunktion g in einem Punkt x. Er steht senkrecht auf der Höhenlinie durch x.

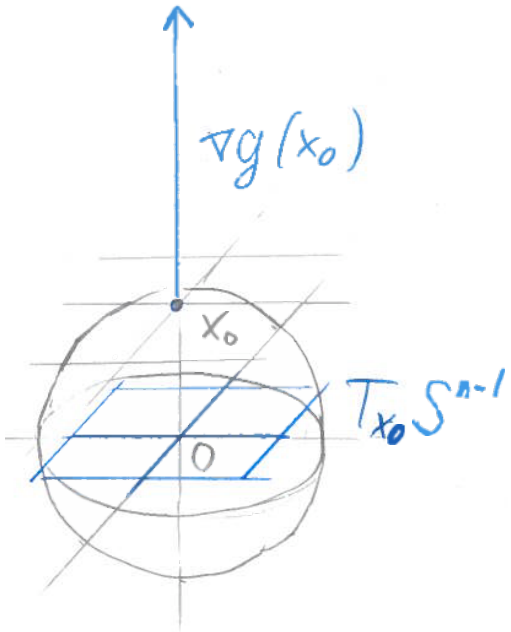


Abbildung 9.18: Der Gradient der Funktion $g(x) := \|x\|^2$ und ein Tangentialraum an die Sphäre.

Bemerkung. Wir können $T_{x_0}S^{n-1}$ auch berechnen, indem wir das Beispiel 9.31 (lokale Parametrisierung der Sphäre) und Satz 9.41(ii) verwenden. Diese Berechnung ist allerdings komplizierter. Das zeigt, dass es empfehlenswert ist, die lokale Darstellung von M gut auszuwählen, wenn wir die Tangentialräume an M berechnen wollen.

Bemerkung 9.44. [Tangentialraum und Gradient] Der Tangentialraum hängt wie folgt mit dem Gradienten zusammen. Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $g : U \to \mathbb{R}$ und $x \in U$. Wir nehmen an, dass g in x differenzierbar ist. Wir schreiben $\langle \cdot, \cdot \rangle$ für das euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Aus der Gleichheit $Dg(x) = \langle \nabla g(x), \cdot \rangle$ folgt, dass

$$\ker Dg(x) = \nabla g(x)^\perp = \big\{ v \in \mathbb{R}^n \,\big|\, \langle \nabla g(x), v \rangle = 0 \big\}.$$

Falls g C^1 ist und $z \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert für g ist, dann ist der Tangentialraum an $M := g^{-1}(z)$ im Punkt x gemäss Satz 9.41(iii) daher gegeben durch

$$T_x M = \ker Dg(x) = \nabla g(x)^\perp, \quad \forall x \in M.$$

Kurzgesagt: Der Gradient einer Funktion steht senkrecht auf jeder Niveaumenge, die zu einem regulären Wert gehört. Siehe Abbildung 9.17.

Beispiel 9.45. [Gradient und Niveaumenge] Wie in Beispiel 9.36 (Sphäre als reguläre Niveaumenge) definieren wir

$$g(x) := \|x\|^2.$$

Es gilt

$$g^{-1}(0) = S^{n-1}, \quad \nabla g(x) = 2x$$

und darum gemäss Bemerkung 9.44, dass

$$T_x S^{n-1} = (2x)^{\perp}.$$

Siehe Abbildung 9.18. Das stimmt mit (9.27) überein.

9.7 Tangentialabbildung = Ableitung einer Funktion zwischen Untermannigfaltigkeiten

In Anwendungen spielen Abbildungen zwischen (Unter-)Mannigfaltigkeiten, insbesondere Funktionen auf Mannigfaltigkeiten, eine wichtige Rolle. Zum Beispiel ist die Oberflächenladungsdichte auf einer metallenen Sphäre (=Kugeloberfläche) eine Funktion

$$\sigma : S^2 \to \mathbb{R}.^{13}$$

Diese Ladungsdichte ist nicht konstant, falls sich in der Nähe der Sphäre eine Ladung befindet. Diese Ladung drängt Elektronen in der Sphäre nämlich auf die weiter weg liegende Seite der Sphäre. Sie induziert also eine nichtkonstante Ladungsdichte auf der Sphäre. Die Oberflächenladungsdichte ist nur auf der Sphäre definiert. Es ist nicht sinnvoll, von $\sigma(x)$ für einen Punkt x ausserhalb der Sphäre zu sprechen. Eine physikalisch relevante Frage ist zum Beispiel:

Frage. *In welchen Punkten ist die Ladungsdichte σ maximal?*

Ein allgemeineres Problem ist folgendes:

Problem. *Wir betrachten eine Funktion, die auf einer Untermannigfaltigkeit des Koordinatenraums definiert ist. Bestimme die Punkte, in denen die Funktion maximal ist.*

Dieses Problem werden wir im Abschnitt 9.8 studieren. Dazu benötigen wir den Begriff der Tangentialabbildung. Die *Tangentialabbildung* einer C^1-Abbildung f zwischen zwei Untermannigfaltigkeiten M und N in einem Punkt $x_0 \in M$ ist eine lineare Abbildung $T_{x_0}M \to T_{f(x_0)}N$. Sie verallgemeinert die Ableitung einer Funktion zwischen Koordinatenräumen. Um die Tangentialabbildung zu definieren, brauchen wir Folgendes. Seien $n, p \in \mathbb{N}_0$, $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : S \to \mathbb{R}^p$, $x_0 \in S$ und $k \in \mathbb{N}$.

[13] Wir nehmen hier an, dass es sich um die Einheitssphäre S^2 handelt, welche Mittelpunkt $x_0 = 0$ ist und Radius $r = 1$ besitzt. Des Weiteren nehmen wir an, dass die Ladungsdichte statisch ist, d. h., sich zeitlich nicht ändert.

Definition 9.46 (C^k-Eigenschaft, allgemeiner Definitionsbereich)**.** *Wir sagen, dass f* um den Punkt x_0 *C^k ist g. d. w. es eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von x_0 und eine Abbildung $F \in C^k(U, \mathbb{R}^p)$ gibt so, dass*

$$F = f \text{ auf } S \cap U. \tag{9.28}$$

Wir sagen, dass f C^k ist g. d. w. diese Bedingung für jeden Punkt $x_0 \in S$ erfüllt ist. Wir definieren

$$C^k(S, \mathbb{R}^p) := \left\{C^k\text{-Abbildung von } S \text{ nach } \mathbb{R}^p\right\}.$$

Bemerkung. Für $k = 0$ ist f C^0 g. d. w. f stetig ist.

Eine *Fortsetzung* einer Funktion f ist eine Funktion F so, dass f eine Einschränkung von F ist. (Siehe (9.2).) Seien jetzt $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $N \subseteq \mathbb{R}^p$ C^1-Untermannigfaltigkeiten, $f : M \to N$ eine C^1-Abbildung und $x_0 \in M$.

Hilfssatz 9.47. *Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von x_0 und $F \in C^1(U, \mathbb{R}^p)$ eine Fortsetzung von $f|_{M\cap U}$. Es gilt*

(i)
$$DF(x_0)(T_{x_0}M) \subseteq T_{f(x_0)}N.$$

(ii) Seien $\widetilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von x_0 und $\widetilde{F} \in C^1(\widetilde{U}, \mathbb{R}^p)$ eine Fortsetzung von $f|_{M\cap\widetilde{U}}$. Dann gilt, dass

$$DF(x_0)\big|_{T_{x_0}M} = D\widetilde{F}(x_0)\big|_{T_{x_0}M}.$$

Beweis: Das folgt aus der Kettenregel.

Definition 9.48. *Wir definieren die* Tangentialabbildung (oder Ableitung) von f im Punkt x_0 *als*

$$Df(x_0) := DF(x_0)\big|_{T_{x_0}M} : T_{x_0}M \to T_{f(x_0)}N, \tag{9.29}$$

wobei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von x_0 und $F \in C^1(U, \mathbb{R}^p)$ eine Fortsetzung von $f|_{M\cap U}$ ist.

Bemerkungen.

- Gemäss Hilfssatz 9.47((i)) nimmt $Df(x_0)$ tatsächlich Werte in $T_{f(x_0)}N$ an. Gemäss Hilfssatz 9.47((ii)) hängt $Df(x_0)$ nicht von der Wahl von F ab. Diese Abbildung ist darum wohldefiniert.
- Falls $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge ist, dann stimmen die Definitionen 9.48 und 8.6 (S. 376, Ableitung einer Funktion zwischen Koordinatenräumen) überein. Definition 9.48 verallgemeinert also Definition 8.6.

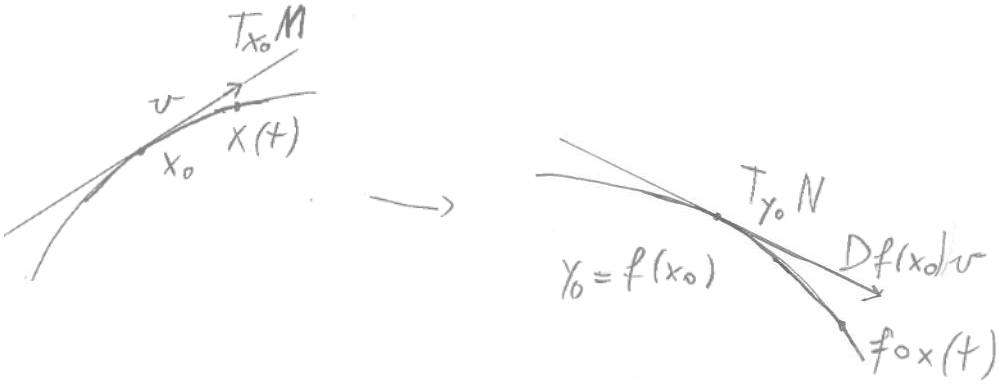


Abbildung 9.19: Tangentialabbildung einer Abbildung zwischen zwei Untermannigfaltigkeiten.

- Im Buch [DK04a, p. 137, Definition 5.2.1] wird die Tangentialabbildung für eine Abbildung definiert, die auf einer offenen Umgebung von x_0 definiert ist. Wir benötigen jedoch die Definition für eine Funktion, die nur auf M definiert ist, wie in Definition 9.48.

Bemerkung. Aus der Kettenregel folgt, dass

$$Df(x_0)v = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f \circ x(t),$$

wobei x ein Weg in M ist so, dass $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v$. Das ist eine alternative Beschreibung der Tangentialabbildung. Abbildung 9.19 verdeutlicht diese Beschreibung.

Beispiel 9.49. [Tangentialabbildung eines Weges] Seien $N \subseteq \mathbb{R}^p$ eine C^1-Untermannigfaltigkeit, $f \in C^1(\mathbb{R}, N)$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$Df(x_0) = f'(x_0)\cdot : \mathbb{R} \to T_{f(x_0)}N.$$

Wir können diese lineare Abbildung mit dem Vektor $f'(x_0) \in T_{f(x_0)}N$ identifizieren. Siehe Abbildung 9.20. Als ein konkretes Beispiel betrachten wir

$$f : \mathbb{R} \to S^1 \subseteq \mathbb{R}^2, \quad f(x) := \big(\cos x, \sin x\big), \quad x_0 \in \mathbb{R}.$$

Es gilt

$$Df(x_0) = f'(x_0)\cdot = \big(-\sin x, \cos x\big)\cdot,$$

siehe Abbildung 9.21.



Abbildung 9.20: Tangentialabbildung eines Weges in einer Untermannigfaltigkeit.

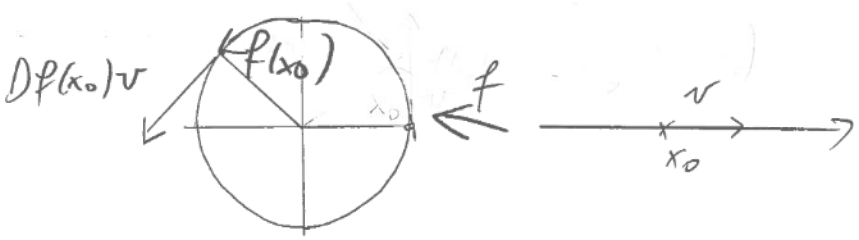


Abbildung 9.21: Tangentialabbildung für eine Parametrisierung des Kreises.

Bemerkung. Falls wir $x = t \in M = \mathbb{R}$ als Zeit und f als den Weg eines Teilchens in N interpretieren, dann ist $\dot{f}(t) = f'(t)$ der *Geschwindigkeitsvektor* zum Zeitpunkt t. Er ist tangential an N. N beschreibt *holonome Zwangsbedingungen* in der klassischen Mechanik.

Beispiel 9.50. [Tangentialabbildung einer auf den Kreis eingeschränkten Potenzfunktion] Seien $m \in \mathbb{Z}$ und

$$f : S^1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to S^1, \quad f\big(\cos t, \sin t\big) := \big(\cos(mt), \sin(mt)\big).$$

Diese Abbildung ist glatt, da sie die Einschränkung der m-ten Potenzfunktion

$$F : \mathbb{R}^2 = \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad F(z) := z^m,$$

auf den Einheitskreis S^1 ist.[14] Seien

$$z \in S^1, \quad v := iz = (-z_2, z_1).$$

Da $\langle z, v\rangle = -z_1 z_2 + z_2 z_1 = 0$, gilt gemäss Beispiel 9.43, dass $v \in T_z S^1$. Die Tangentialabbildung von f bildet diesen Vektor ab auf

$$\begin{aligned} Df(z)v &= DF(z)v \\ &= F'(z)v \qquad \text{(Überprüfen Sie das mit Hilfe der Cauchy-Riemann-Gleichungen!)} \\ &= mz^{m-1}iz \\ &= miz^m \in T_{f(z)}S^1 \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet F' die komplexe Ableitung von F. Siehe Abbildung 9.22.

[14] Das folgt aus der Formel von de Moivre, die besagt, dass $\big(\cos t + i \sin t\big)^m = \cos(mt) + i \sin(mt)$.

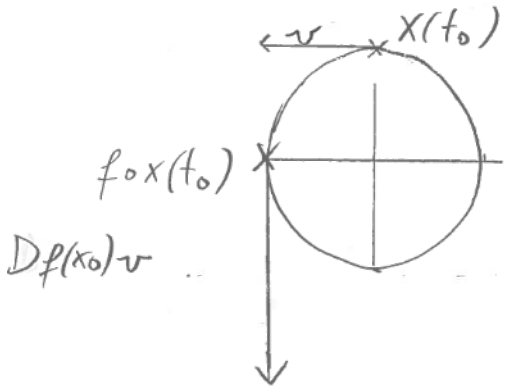


Abbildung 9.22: Tangentialabbildung von $f : S^1 \to S^1$, $f(z) := z^2$.

9.8 Extremum und kritischer Punkt einer Funktion auf einer Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$, Lagrange-Multiplikatorenregel

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96b, 5.5] und [Stra, 7.9]. Wir betrachten folgendes Problem. Seien $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine C^1-Untermannigfaltigkeit und $f : M \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion.

Problem. *Finde das Maximum und das Minimum von f (unter der Annahme, dass f ein Maximum und ein Minimum besitzt)!*

Manchmal ist f die Einschränkung einer Funktion F, die auf einer Umgebung von M definiert ist. Problem 9.8 ist dann das Problem, $F(x)$ unter der *Nebenbedingung* $x \in M$ zu maximieren (oder minimieren).

Problem 9.8 tritt in verschiedenen Kontexten auf. In der Elektrostatik wird zum Beispiel die Oberflächenladungsdichte auf einer metallenen Sphäre (=Kugeloberfläche) betrachtet, welche durch eine Ladung induziert wird, die sich in der Nähe der Sphäre befindet. Ein Spezialfall des Problems 9.8 ist es, das Maximum dieser Ladungsdichte zu bestimmen.

Jeder Punkt, in dem eine Funktion ein Extremum (Maximum oder Minimum) annimmt, ist ein kritischer Punkt der Funktion. Das bedeutet, dass die Tangentialabbildung in diesem Punkt verschwindet. Die Lagrange-Multiplikatorenregel ist eine Methode, um kritische Punkte zu finden. Diese Regel kann daher dazu gebraucht werden, um Problem 9.8 zu lösen.

Definition 9.51. *Ein Punkt $x_0 \in M$ heisst* kritischer *(oder* stationärer*)* Punkt für f *g. d. w. die Tangentialabbildung von f in x_0 verschwindet, d. h.*

$$Df(x_0) = 0.$$

Wir schreiben

$$\operatorname{Crit} f := \big\{\textit{kritische Punkte für } f\big\}.$$

Bemerkungen 9.52. [kritischer Punkt, Extremum]

(i) Falls M eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist, dann ist x_0 kritisch im Sinn der Definition 9.51 g. d. w. x_0 kritisch im Sinn der Definition 8.63 ist. Definition 9.51 verallgemeinert also Definition 8.63.

(ii) Falls f in x_0 ein lokales Maximum oder Minimum annimmt, dann ist x_0 ein kritischer Punkt für f. Das verallgemeinert Satz 8.69(i) (Satz von Fermat über kritische Punkte, mehrdimensionale Situation). Die Aussage folgt aus Satz 5.52(i) (Satz von Fermat über kritische Punkte, *ein*dimensionale Situation), indem wir Wege in M betrachten, die zum Zeitpunkt $t = 0$ durch x_0 gehen. (Überlegen Sie sich das!)

Beispiel 9.53. [kritische Punkte der Höhenfunktion auf der Sphäre] Sei

$$f : M := S^{n-1} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := x_n.$$

Dann gilt

$$\operatorname{Crit} f = \big\{x_\pm := \pm e_n = \big(0, \ldots, 0, \pm 1\big)\big\}.$$

Um das einzusehen, definieren wir

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad F(x) := x_n.$$

Sei $v \in T_{x_+} S^{n-1}$. Da F eine glatte Fortsetzung der Funktion f ist, gilt gemäss Definition 9.48 (Tangentialabbildung), dass

$$\begin{aligned} Df(x_+)v &= DF(x_+)v \\ &= v_n \qquad \text{(gemäss Beispiel 8.8, Ableitung einer affinen Funktion)} \\ &= \langle x_+, v\rangle \\ &= 0 \qquad \text{(gemäss Beispiel 9.43).} \end{aligned}$$

Darum gilt $x_+ \in \operatorname{Crit} f$. Ähnliche Argumente zeigen, dass $x_- \in \operatorname{Crit} f$ und dass $x_\pm$ die einzigen kritischen Punkte von f sind. (Überprüfen Sie das!) Tatsächlich nimmt f in x_+ sein Maximum und in x_- sein Minimum an.

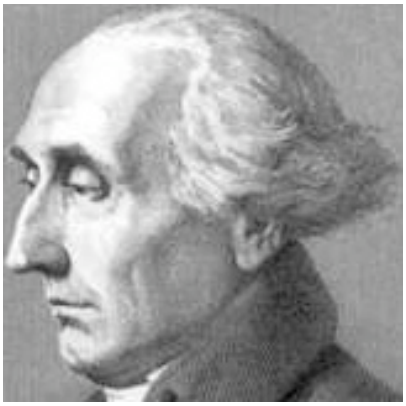


Abbildung 9.23: Joseph-Louis Lagrange, italienischer Mathematiker und Astronom, 1736–1813.

Falls es Funktionen $g : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ und $F : U \to \mathbb{R}$ gibt so, dass $M = g^{-1}(0)$ und $f = F|_M$, dann können wir das Problem 9.8 mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatorenregel lösen. Das folgt aus dem nächsten Satz. Seien $n, p \in \mathbb{N}_0$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $F \in C^1(U, \mathbb{R})$ und $g \in C^1(U, \mathbb{R}^p)$.

Definition 9.54. *Wir definieren die* Lagrangefunktion für (F, g) *als die Funktion*

$$L := L_{F,g} : U \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}, \quad L(x, \lambda) := F(x) - \lambda^T g(x). \tag{9.30}$$

Wir definieren

$$M := g^{-1}(0) \subseteq U, \quad f := F|_M.$$

Satz 9.55 (Lagrange-Multiplikatorenregel)**.** *Wir nehmen an, dass* 0 *ein regulärer Wert von g ist. Sei $x_0 \in U$. Dann gilt $x_0 \in \operatorname{Crit} f$ g. d. w. es ein $\lambda \in \mathbb{R}^p$ gibt so, dass $(x_0, \lambda) \in \operatorname{Crit} L$.*

Der Beweis dieses Satzes basiert auf der Tatsache $\ker Dg(x_0) = T_{x_0}M$ (Satz 9.41) und linearer Algebra.

Der Satz ist nach Joseph-Louis Lagrange benannt, siehe Abbildung 9.23.

Bemerkungen.

- Gemäss dem Satz vom regulären Wert (Satz 9.34) ist $M = g^{-1}(0)$ eine C^1-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ der Dimension $n - p$. Darum ist die Bedingung $x_0 \in \operatorname{Crit} f$ sinnvoll.
- Die Funktion f ist nur auf M definiert. Darum gilt $\operatorname{Crit} f \subseteq M$.
- Die Bedingung $x_0 \in \operatorname{Crit} f$ impliziert *nicht*, dass $x_0 \in \operatorname{Crit} F$.

- Im Buch [DK04a] wird die Notation f für F verwendet.
- Die Bedingung $(x_0, \lambda) \in \operatorname{Crit} L$ gilt genau dann, falls

$$DF(x_0) = \lambda^T Dg(x_0), \tag{9.31}$$
$$g(x_0) = 0. \tag{9.32}$$

  (Bemerkenswerterweise erhalten wir auch noch die zweite Gleichung.)
- Falls $x_0 \in \operatorname{Crit} f$, dann heisst λ wie in Satz 9.55 der *Lagrange-Multiplikator* für x_0. Er ist eindeutig. (Warum?)

Korollar 9.56 (lokales Maximum und Minimum)**.** *Wir nehmen an, dass* 0 *ein regulärer Wert für g ist. Sei $x_0 \in M$ ein Punkt, in dem f ein lokales Maximum oder Minimum annimmt. Dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}^p$ so, dass $DF(x_0) = \lambda^T Dg(x_0)$.*

Beweis: Das folgt aus Bemerkung 9.52(ii) und Satz 9.55. □

Mit Hilfe des Korollars 9.56 können wir Problem 9.8 lösen.

Beispiel 9.57. [Sphäre und Lagrange-Multiplikatoren] Wir definieren

$$\operatorname{pr} : \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \operatorname{pr}(x) := x_n, \qquad f := \operatorname{pr}|_{S^{n-1}}.$$

Wir bestimmen die kritischen Punkte von f mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatorenregel. Dafür definieren wir

$$U := \mathbb{R}^n, \qquad g : U \to \mathbb{R}, \quad g(x) := \|x\|^2 - 1, \qquad F := \operatorname{pr} : U \to \mathbb{R},$$
$$L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{p=1} \to \mathbb{R}, \quad L(x, \lambda) := F(x) - \lambda^T g(x) = x_n - \lambda(\|x\|^2 - 1).$$

Die Gleichungen (9.31,9.32) werden zu

$$\operatorname{pr} = 2\lambda\langle x_0, \cdot\rangle : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x_0 \in S^{n-1}.$$

Die Lösungen dieser Gleichungen sind

$$(x_0, \lambda) = \left(x_+, \frac{1}{2}\right), \quad \left(x_-, -\frac{1}{2}\right), \quad x_\pm := \pm e_n.$$

(Überprüfen Sie das!) Gemäss Satz 9.55 gilt daher $\operatorname{Crit} f = \{x_\pm\}$. Das stimmt mit Beispiel 9.53 überein.

Kapitel 10

Integration im $\mathbb{R}^n$, Satz von Fubini über wiederholte Integration, Jordan-Mass, Substitutionsregel für mehrdimensionale Integrale

Dieses Kapitel entspricht [Bla96b, 4.1, 4.5, 5.4] und [Stra, 8.1, 8.2, 8.3, 8.5]. Das Integral einer Funktion f von n Veränderlichen ist der $(n+1)$-dimensionale Inhalt (mit Vorzeichen) zwischen der $(x_1, \ldots, x_n)$-Hyperebene und dem Graphen von f. Heuristisch ist das Integral von f gleich der Summe

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \sum_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) dx,$$

wobei dx das n-dimensionale Volumen eines unendlich kleinen Quaders um den Punkt x ist.

Das (eigentliche) Riemann-Integral einer Funktion mehrerer Variablen wird definiert, indem wir die Funktion von oben und unten mit Treppenfunktionen annähern. Es verallgemeinert das Riemann-Integral einer Funktion *einer* Variablen. Der Satz von Fubini besagt, dass

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^n} f(y,z) dz\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^m} f(y,z) dy\, dz,$$

falls f Riemann-integrierbar ist und die einzelnen Integrale wohldefiniert sind. Diesen Satz können wir verwenden, um mehrdimensionale Integrale mittels wiederholter eindimensionaler Integration zu berechnen.

In diesem Kapitel werden wir auch das Jordan-Mass behandeln, das die Idee des n-dimensionalen Inhalts präzise macht.

10.1 Riemann-Integral

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96b, 4.5] und [Stra, 8.1]. Um das Riemann-Integral zu definieren, benötigen wir Folgendes: Seien S eine Menge und $A \subseteq S$. Wir definieren die *Indikatorfunktion* (oder *charakteristische Funktion*) *der Menge* A als die Funktion

$$\chi_A : S \to \mathbb{R}, \qquad \chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $f : S \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Erinnerung: f heisst *beschränkt* g. d. w. es eine Konstante $C \in [0, \infty[$ gibt so, dass

$$|f(x)| \leq C, \qquad \forall x \in S. \tag{10.1}$$

Definition 10.1 (eigentliches Riemann-Integral)**.** *(i) Ein* n-dimensionaler (beschränkter) Quader *(oder* Rechtkant*) ist ein Produkt der Form*

$$R = \prod_{i=1}^{n} I_i = I_1 \times \cdots \times I_n,$$

wobei $I_1, \ldots, I_n$ *beschränkte Intervalle sind. Diese dürfen offen, abgeschlossen oder halb-offen sein.*

(ii) Wir schreiben die Länge eines Intervalls I *als* $|I|$*. Wir definieren den* (n-dimensionalen) Inhalt *(oder das* (n-dimensionale) Volumen*) eines Quaders* $R = \prod_{i=1}^{n} I_i$ *als*

$$\mathrm{vol}(R) := \mathrm{vol}_n(R) = |R| := \prod_{i=1}^{n} |I_i| = |I_1| \cdots |I_n|.$$

Sei $R \subseteq \mathbb{R}^n$ *ein Quader.*

(iii) Wir nennen $\varphi : R \to \mathbb{R}$ *eine* Treppenfunktion *g. d. w.* φ *eine endliche Linearkombination von Indikatorfunktionen von* n*-dimensionalen Quadern ist.*

(iv) Sei $\mathcal{R}$ *eine endliche Kollektion (=Menge) von Quadern, die in* R *enthalten sind, und* $c_Q \in \mathbb{R}$ *für* $Q \in \mathcal{R}$*. Wir definieren das* Riemann-Integral *der Treppenfunktion*

$$\varphi := \sum_{Q \in \mathcal{R}} c_Q \chi_Q$$

als

$$\int_R \varphi(x) dx := \sum_{Q \in \mathcal{R}} c_Q |Q|. \tag{10.2}$$

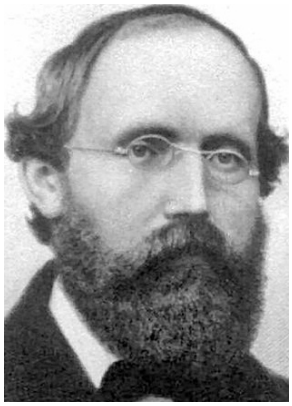


Abbildung 10.1: Bernhard Riemann, deutscher Mathematiker, 1826–1866.

(v) *Sei* $f : R \to \mathbb{R}$ *eine beschränkte Funktion. Wir definieren* das untere und das obere Riemann-Integral von f (über R) *als*

$$\underline{\int_R} f(x)dx := \sup\left\{\int_R \varphi(x)dx \,\middle|\, \varphi : R \to \mathbb{R} \text{ } \textit{Treppenfunktion} \text{ } \leq f\right\}, \quad (10.3)$$

$$\overline{\int_R} f(x)dx := \inf\left\{\int_R \psi(x)dx \,\middle|\, \psi : R \to \mathbb{R} \text{ } \textit{Treppenfunktion} \text{ } \geq f\right\}. \quad (10.4)$$

Wir nennen f eigentlich Riemann-integrierbar (über R) *g. d. w.*

$$\underline{\int_R} f(x)dx \geq \overline{\int_R} f(x)dx. \quad (10.5)$$

In diesem Fall definieren wir das Riemann-Integral von f (über R) *als*

$$\int_R f(x)dx := \underline{\int_R} f(x)dx. \quad (10.6)$$

Dieses Integral ist nach Bernhard Riemann benannt, siehe Abbildung 10.1.

Erklärungen:

Zu (i): Ein Beispiel eines Quaders ist $R = [0,1]\times]0,2] \times [1,3[\times]-1,0[$.

Zu (ii): Zum Beispiel ist das vierdimensionale Volumen von $R := [0,1]\times]0,2] \times [1,3[\times]-1,0[$ gleich $|R| = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$. Das Volumen eines Quaders verallgemeinert die Begriffe *Länge* eines Intervalls, *Oberfläche* eines Rechtecks und *(dreidimensionales) Volumen* eines dreidimensionalen Quaders.

Zu (iii) und (iv): $\varphi : R \to \mathbb{R}$ ist eine Treppenfunktion g. d. w. es eine endliche Kollektion $\mathcal{R}$ von Quadern gibt, die in R enthalten sind, und es Zahlen $c_Q \in \mathbb{R}$ für $Q \in \mathcal{R}$ gibt so, dass

$$\varphi = \sum_{Q \in \mathcal{R}} c_Q \chi_Q. \tag{10.7}$$

Bemerkung: Wir schreiben $\mathcal{R} = \{R_1, \ldots, R_k\}$ mit $R_j \neq R_\ell$ für $j \neq \ell$ und $c_j := c_{R_j}$. Dann gilt

$$\varphi = \sum_{j=1}^{k} c_j \chi_{R_j}, \qquad \int_R \varphi(x)dx = \sum_{j=1}^{k} c_j |R_j|.$$

Ein Vorteil der Notation (10.7) ist, dass wir dafür keinen Index j brauchen. Sei $\varphi : R \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion. Wir können φ als eine endliche Linearkombination von Indikatorfunktionen von Quadern schreiben, die eine Zerlegung von R bilden. Das folgt unmittelbar aus dem nächsten Hilfssatz.

Hilfssatz 10.2 (Verfeinerung einer Kollektion von Quadern)**.** *Sei $R \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und $\mathcal{R}$ eine endliche Kollektion von Quadern, die in R enthalten sind. Dann gibt es eine endliche Kollektion von Quadern $\mathcal{R}'$, die eine Zerlegung von R bilden, mit folgender Eigenschaft:*

Falls ein Quader $Q' \in \mathcal{R}'$ einen Quader $Q \in \mathcal{R}$ schneidet, dann ist Q' in Q enthalten.

Beweis: Im Fall $n = 1$ folgt diese Aussage mittels Induktion. Die allgemeine Situation kann auf den Fall $n = 1$ reduziert werden.

Bemerkungen 10.3. (i) (Zerlegung) Zwei Mengen A und B heissen *disjunkt* g. d. w. sie sich nicht schneiden, d. h., $A \cap B = \emptyset$. Eine *Zerlegung* (oder *Partition*) einer Menge S ist eine Kollektion $\mathcal{P}$ nichtleerer (paarweise) disjunkter Mengen, deren Vereinigung gleich S ist, also

$$S = \bigcup \mathcal{P} = \bigcup_{A \in \mathcal{P}} A.$$

(ii) Wir nennen eine Kollektion $\mathcal{R}'$ wie in Hilfssatz 10.2 eine *Verfeinerung* der Kollektion $\mathcal{R} \cup \{R\}$.

(iii) Im Buch [DK04b] wird das Wort "partition" umdefiniert. In dieser neuen Definition dürfen sich die Quader auf dem Rand überlappen.

Beispiel 10.4. $n = 1$, $R :=]-1, 3[$, $\mathcal{R} := \{]0, 2[,]1, 3[\}$. Die Menge

$$\mathcal{R}' := \{]-1, 0],]0, 1],]1, 2[, [2, 3[\}$$

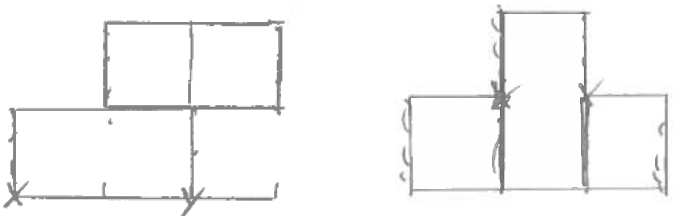


Abbildung 10.2: Aufspalten einer Summe charakteristischer Funktionen. Der Graph der rechten Funktion hat die Form einer Treppe. Das ist der Grund für den Namen "Treppenfunktion".

ist eine Verfeinerung der Kollektion $\mathcal{R} \cup \{R\}$. Wir betrachten die Treppenfunktion

$$\varphi := \chi_{]0,2[} + \chi_{]1,3[}.$$

Mit Hilfe der Verfeinerung $\mathcal{R}'$ können wir φ wie folgt schreiben:

$$\varphi = \chi_{]0,1]} + 2\chi_{]1,2[} + \chi_{[2,3[}, \tag{10.8}$$

siehe Abbildung 10.2. Somit haben wir φ als eine Linearkombination von Indikatorfunktionen von Quadern $Q' \in \mathcal{R}'$ geschrieben, die eine Zerlegung von R bilden.

Zu ((iv)): Der nächste Hilfssatz zeigt, dass das Integral einer Treppenfunktion (gegeben durch (10.2)) wohldefiniert ist, d. h., es hängt nicht davon ab, wie wir φ als eine endliche Linearkombination charakteristischer Funktionen von Quadern schreiben. Seien $\mathcal{R}$ und $\mathcal{R}'$ endliche Kollektionen von Quadern, $c_Q \in \mathbb{R}$ für $Q \in \mathcal{R}$ und $c'_{Q'} \in \mathbb{R}$ für $Q' \in \mathcal{R}'$.

Hilfssatz 10.5 (Integral einer Treppenfunktion)**.** *Falls*

$$\sum_{Q\in\mathcal{R}} c_Q \chi_Q = \sum_{Q'\in\mathcal{R}'} c'_{Q'} \chi_{Q'},$$

dann gilt

$$\sum_{Q\in\mathcal{R}} c_Q |Q| = \sum_{Q'\in\mathcal{R}'} c'_{Q'} |Q'|.$$

Der Beweis dieses Hilfssatzes beruht auf Hilfssatz 10.2.

Sei jetzt R ein Quader und $\varphi = \sum_{Q\in\mathcal{R}} c_Q \chi_Q : R \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion. Gemäss Hilfssatz 10.2 (Verfeinerung einer Kollektion von Quadern) gibt es eine endliche Kollektion $\mathcal{R}'$ *disjunkter* Quader, die in R enthalten sind, und es gibt Zahlen $c'_{Q'} \in \mathbb{R}$ für $Q' \in \mathcal{R}'$ so, dass

$$\varphi = \sum_{Q'\in\mathcal{R}'} c'_{Q'} \chi_{Q'}.$$

Es gilt

$$\int_R \varphi(x)dx = \sum_{Q' \in \mathcal{R}'} c'_{Q'} |Q'|. \tag{10.9}$$

Das ist der $(n+1)$-dimensionale Inhalt (mit Vorzeichen) zwischen der $(x_1, \ldots, x_n)$-Hyperebene[1] und dem Graphen von φ. Darum stimmt unsere Definition des Integrals einer Treppenfunktion mit unserer Intuition überein. Im Beispiel 10.4 gilt gemäss (10.9), dass

$$\begin{aligned}\int_{[0,3]} \varphi(x)dx &= 1 \cdot |]0,1]| + 2|]1,2[| + 1 \cdot |[2,3[| \\ &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ &= 4.\end{aligned}$$

Das ist tatsächlich der $(1+1)$-dimensionale Inhalt[2] zwischen der x_1-Hyperebene[3] und dem Graphen von φ.

Zu ((v)): Das präzisiert die Idee, dass wir das Integral erhalten, indem wir die Funktion von oben und unten mit Treppenfunktionen annähern.

Bemerkungen. Zum Buch [DK04b]:

(i) In [DK04b, Definition 6.2.3, p. 426] wird das untere/ obere Riemann-Integral ein bisschen anders definiert, indem Zerlegungen des Quaders gebraucht werden, worauf f definiert ist. Die Definitionen hier und im Buch sind äquivalent. Daher ist der Begriff der (eigentlichen) Riemann-Integrierbarkeit hier und im Buch äquivalent, und die Integrale stimmen miteinander überein. Die Definition hier scheint mir einfacher, flexibler und brauchbarer: Die Intervalle in der Definition dürfen offen, halb-offen oder abgeschlossen sein. Des Weiteren ist die Summe zweier Treppenfunktionen wieder eine Treppenfunktion. Das folgt sofort aus der Definition. Diese Eigenschaft kann gebraucht werden, um Linearität der Integration zu beweisen.

(ii) In [DK04b, Definition 6.4.1, p. 435] wird der Begriff einer Treppenfunktion ein bisschen anders definiert.

Beispiel 10.6. [Integral der charakteristischen Funktion eines Dreiecks] Die Funktion

$$f : R := [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x_1 \geq x_2, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

[1] Damit meinen wir den Untervektorraum $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ von $\mathbb{R}^n$.
[2] d. h. die Fläche
[3] d. h. der x_1-Achse

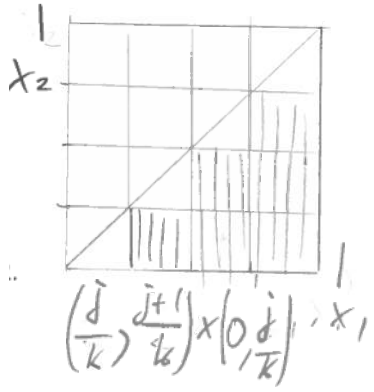


Abbildung 10.3: Die Treppenfunktion φ hat Träger im schraffierten Gebiet.

ist eigentlich Riemann-Integrierbar mit Integral $= \frac{1}{2}$. Beweis: Sei $k \in \mathbb{N}$. Wir definieren

$$\varphi := \sum_{j=1}^{k-1} \chi_{\left]\frac{j}{k}, \frac{j+1}{k}\right[\times]0, \frac{j}{k}[} : R \to \mathbb{R},$$

siehe die Abbildung 10.3. Das ist eine Treppenfunktion, die $\leq f$ ist. (Überprüfen Sie das!) Darum gilt

$$\int \varphi(x)dx \leq \underline{\int}_R f(x)dx.$$

Die linke Seite ist gleich

$$\sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{k} \cdot \frac{j}{k} = \frac{k(k-1)}{2} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2k}.$$

Da k beliebig ist, folgt daraus, dass

$$\underline{\int}_R f(x)dx \geq \frac{1}{2}.$$

Ein ähnliches Argument zeigt, dass

$$\frac{1}{2} \geq \overline{\int}_R f(x)dx, \qquad \text{also} \qquad \underline{\int}_R f(x)dx \geq \overline{\int}_R f(x)dx.$$

Daraus folgt, dass f eigentlich Riemann-integrierbar ist mit

$$\int_R f(x)dx = \frac{1}{2}.$$

Beispiel 10.7. [nicht-Riemann-integrierbare Funktion] Die Funktion $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} : R := [0,1] \to \mathbb{R}$ ist beschränkt, aber nicht Riemann-integrierbar. Dieses Beispiel wurde schon in Analysis 1 in Übungsserie 11 behandelt. (Siehe auch [Stra, Beispiel 6.2.2. ii), S. 134].)

10.2 Eigenschaften des Riemann-Integrals

Dieser Abschnitt entspricht [Stra, 8.1]. Seien $R \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und $f : R \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Die folgende Proposition fasst einige grundlegende Eigenschaften des (unteren und oberen) Riemann-Integrals zusammen.

Proposition 10.8 (Riemann-Integration)**.** *(i) (unteres und oberes Integral) Es gilt*

$$\underline{\int}_R f(x)dx \leq \overline{\int}_R f(x)dx. \tag{10.10}$$

(ii) (Charakterisierung der Riemann-Integrierbarkeit) f ist Riemann-integrierbar g. d. w. es für jedes $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $\varphi, \psi : R \to \mathbb{R}$ gibt so, dass

$$\varphi \leq f \leq \psi, \tag{10.11}$$
$$\textstyle\int_R \psi(x)dx - \int_R \varphi(x)dx < \varepsilon. \tag{10.12}$$

(iii) (Treppenfunktion integrierbar) Jede Treppenfunktion $f = \varphi$ ist Riemann-integrierbar. Ihr Riemann-Integral stimmt mit dem Integral in Definition 10.1(iv) überein.

(iv) (stetige Funktion Riemann-integrierbar) Falls R abgeschlossen (und beschränkt) ist und f stetig, dann ist f Riemann-integrierbar.

Seien jetzt $f, g : R \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbare Funktionen und $c \in \mathbb{R}$.

(v) (Monotonie) Falls $f \leq g$, dann gilt

$$\int_R f(x)dx \leq \int_R g(x)dx. \tag{10.13}$$

(vi) (Linearität) cf und $f + g$ sind Riemann-integrierbar und

$$\int_R cf(x)dx = c\int_R f(x)dx, \tag{10.14}$$
$$\int_R (f+g)(x)dx = \int_R f(x)dx + \int_R g(x)dx. \tag{10.15}$$

(vii) Das Produkt zweier Riemann-integrierbarer Funktionen ist Riemann-integrierbar.

(viii) (Minimum, Maximum, Absolutbetrag) $\min\{f, g\}$, $\max\{f, g\}$ und $|f|$ sind Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\left|\int_R f dx\right| \leq \int_R |f|dx. \tag{10.16}$$

Beweis: (i) folgt mit Hilfe von Hilfssatz 10.2.

(ii) folgt aus der Definition von Riemann-Integrierbarkeit.

(iii) folgt aus der Definition des Riemann-Integrals, indem wir die Treppenfunktion $f = \varphi$ betrachten, und aus (i).

(iv): [Stra, Satz 8.1.1, S. 197]

((v),(vi),(vii),(viii)): [DK04b, Theorem 6.2.8, p. 428]

Bemerkungen. [Riemann-Integration]

- (i) impliziert, dass f genau dann Riemann-integrierbar ist, wenn in (10.5) Gleichheit gilt, d. h. $\underline{\int}_R f(x)dx = \overline{\int}_R f(x)dx$.
- Aussagen ((iii),(iv),(vi)) liefern viele Beispiele für Riemann-integrierbare Funktionen. Zum Beispiel ist

$$f : R := [-1, 1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \left\{ \begin{array}{ll} x, & \text{für } x < 0, \\ x + 2, & \text{für } x \geq 0, \end{array} \right\}$$

  Riemann-integrierbar. Um das einzusehen, definieren wir

$$g, h : R \to \mathbb{R}, \qquad g := 2\chi_{[0,1]}, \qquad h(x) := x.$$

  g ist eine Treppenfunktion und darum gemäss (iii) Riemann-integrierbar. h ist ein Polynom, daher stetig und darum gemäss (iv) Riemann-integrierbar. Es gilt $f = g + h$, daher ist f eine Linearkombination von g und h und darum gemäss (vi) Riemann-integrierbar. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_R f(x)dx &= \int_R g(x)dx + \int_R h(x)dx \qquad \text{(gemäss (vi))} \\ &= 2 \cdot |[0, 1]| + \frac{x^2}{2}\Big|_{x=-1}^{1} \\ &\quad \text{(Definition des Integrals einer Treppenfunktion und Analysis 1)} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Beispiel 10.9. [Quadrat ohne Dreieck] Wir definieren

$$R :=]-1, 2[\times]-1, 2[, \quad \Delta := \big\{x \in [0, 1] \times [0, 1] \,\big|\, x_1 \geq x_2\big\}, \quad S := R \setminus \Delta,$$

siehe Abbildung 10.4. χ_R ist eine Treppenfunktion und daher gemäss Proposition

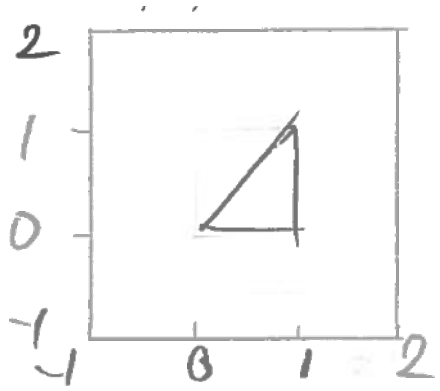


Abbildung 10.4: Die Menge $S := R \setminus \Delta$.

10.8((iii)) Riemann-integrierbar mit Integral $= |R| = 9$. Gemäss Beispiel 10.6 ist χ_Δ Riemann-integrierbar mit Integral $\frac{1}{2}$. Es gilt

$$\chi_S = \chi_R - \chi_\Delta.$$

Gemäss Proposition 10.8((vi)) (Linearität) gilt darum

$$\int_R \chi_S dx = \int_R \chi_R dx - \int_R \chi_\Delta dx = 9 - \frac{1}{2} = \frac{17}{2}.$$

Beispiel 10.10. [integrierbare Funktion] Die Funktion

$$f : R := [0, 2\pi] \times [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \sin\left(x_1 + e^{x_2}\right),$$

ist stetig und daher gemäss Proposition 10.8((iv) Riemann-integrierbar. Es gilt

$$\begin{aligned} \left|\int_R f(x)dx\right| &\leq \int_R |f(x)|dx \qquad \text{(gemäss Proposition 10.8(viii))} \\ &\leq \int_R 1dx \qquad \text{(gemäss Proposition 10.8(v))} \\ &= |R| = 2\pi, \end{aligned}$$

also $\left|\int_R f(x)dx\right| \leq 2\pi$.

Problem. *Finde den genauen Wert des Integrals* $\int_R f(x)dx$.

Wir werden dieses Problem im Beispiel 10.12 mit Hilfe des Satzes von Fubini lösen.

10.3 Satz von Fubini, wiederholte Integration, Vertauschen der Integrationsreihenfolge

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96b, 4.5] und [Stra, 8.2]. Der Satz von Fubini besagt, dass das mehrdimensionale Integral einer integrierbaren Funktion gleich einem zweifachen Integral in tieferen Dimensionen ist. Damit können wir ein mehrdimensionales Integral als ein wiederholtes eindimensionales Integral schreiben. Das ist ein wichtiges Werkzeug zur Berechnung von Integralen. Seien $Q \subseteq \mathbb{R}^m$ und $R \subseteq \mathbb{R}^n$ Quader und $f : Q \times R \to \mathbb{R}$.

Satz 10.11 (Satz von Fubini, wiederholte Integration)**.** *Wir nehmen an, dass f Riemann-integrierbar ist. Dann sind die Funktionen*

$$R \ni z \mapsto \underline{\int}_Q f(y,z)dy \in \mathbb{R}, \tag{10.17}$$

$$R \ni z \mapsto \overline{\int}_Q f(y,z)dy \in \mathbb{R} \tag{10.18}$$

Riemann-integrierbar, und

$$\int_{Q\times R} f(x)dx = \int_R \underline{\int_Q} f(y,z)dy\,dz = \int_R \overline{\int_Q} f(y,z)dy\,dz. \tag{10.19}$$

Beweis: [DK04b, Theorem 6.4.2, p. 436]

Dieser Satz ist nach Guido Fubini benannt, siehe Abbildung 10.5. Abbildung 10.6 verdeutlicht den Satz.

Bemerkung. [Satz von Fubini, wiederholte Integration] Im Allgemeinen können wir $\underline{\int}$ und $\overline{\int}$ nicht durch $\int$ ersetzen. Beispiel:

$$Q := [0,1], \quad R := [0,1], \quad f := \chi_{(\mathbb{Q}\cap[0,1])\times\{0\}}.$$

f ist Riemann-integrierbar (über $Q \times R$), aber für $z = 0$ ist die Funktion $f(\cdot, z) : Q \to \mathbb{R}$ nicht Riemann-integrierbar. (Siehe Analysis 1, Übungsserie 11.) Daher ergibt das Integral $\int_Q f(y,0)dy$ keinen Sinn.

Beispiel 10.12. [Satz von Fubini, wiederholte Integration] Wir definieren

$$Q := [0,2\pi], \quad R := [0,1], \quad f : Q \times R \to \mathbb{R}, \quad f(y,z) := \sin(y + e^z).$$

Gemäss Beispiel 10.10 ist f Riemann-integrierbar. Ein ähnliches Argument zeigt, dass $f(\cdot, z)$ für jedes $z \in R$ Riemann-integrierbar ist. Für jedes $z \in [0,1]$ gilt

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin(y + e^z)dy &= -\cos(y + e^z)\Big|_{y=0}^{2\pi} \\ &= 0 \qquad \text{(da cos } 2\pi\text{-periodisch ist).}\end{aligned}$$



Abbildung 10.5: Guido Fubini, italienischer Mathematiker, 1879–1943.

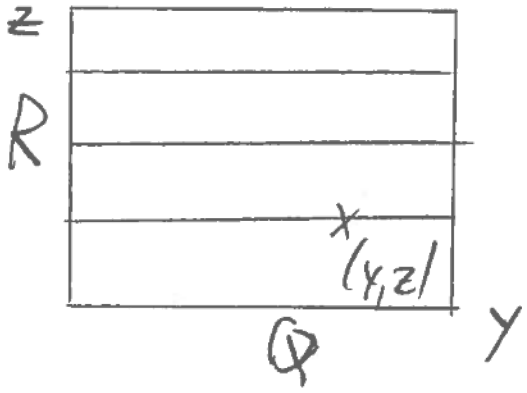


Abbildung 10.6: Im wiederholten Integral $\int_R \underline{\int_Q} f(y,z)\,dy\,dz$ integrieren wir zuerst in horizontale Richtung und dann in vertikale Richtung. Der Satz von Fubini besagt, dass das $\int_{Q\times R} f(x)\,dx$ ergibt.

Gemäss Satz 10.11 gilt darum, dass

$$\int_{Q\times R} f dx = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \sin(y+e^z) dy \right) dz = 0.$$

Korollar 10.13 (Vertauschen der Integrationsreihenfolge)**.** *Falls Q und R abgeschlossen und f stetig sind, dann sind die Funktionen $z \mapsto \int_Q f(y,z)dy$ und $y \mapsto \int_R f(y,z)dz$ Riemann-integrierbar, und*

$$\int_R \left(\int_Q f(y,z)dy \right) dz = \int_{Q\times R} f(x)dx \tag{10.20}$$

$$= \int_Q \left(\int_R f(y,z)dz \right) dy. \tag{10.21}$$

Beweis: Das folgt aus Satz 10.11.

Bemerkung. Gemäss Proposition 10.8(iv) (stetige Funktion Riemann-integrierbar) sind die Integrale $\int_{Q\times R} f(x)dx$, $\int_Q f(y,z)dy$ und $\int_R f(y,z)dz$ wohldefiniert (für alle $z \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$). Die Aussage des Korollars 10.13 ist darum sinnvoll.

Bemerkung. Unter den Annahmen von Korollar 10.13 sind die Funktionen $z \mapsto \int_Q f(y,z)dy$ und $y \mapsto \int_R f(y,z)dz$ sogar stetig und darum Riemann-integrierbar wegen Proposition 10.8(iv).

Beispiel 10.14. Problem: Berechne

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \sin(y + e^z) dz \right) dy!$$

Lösung: Gemäss Korollar 10.13 und Beispiel 10.10 ist dieses Integral gleich

$$\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \sin(y + e^z) dy \right) dz = 0.$$

Bemerkung. Sei $a_i \leq b_i \in \mathbb{R}$, für $i = 1, \ldots, n$, und

$$f : R := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \to \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Gemäss Satz 10.11 (Fubini) gilt

$$\int_R f(x) dx = \int_{a_n}^{b_n} \cdots \left(\int_{a_1}^{b_1} f\big(x_1, \ldots, x_n\big) dx_1 \right) \cdots dx_n.$$

Beispiel 10.15. Für

$$f : R := [0, 1]^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x) := x_1 x_2 x_3$$

gilt

$$\begin{aligned} \int_R f(x) dx &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 x_1 x_2 x_3 \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 x_2 x_3 \, dx_2 \, dx_3 \qquad (\text{da } \int_0^1 t dt = \frac{t^2}{2}\Big|_{t=0}^1 = \frac{1}{2}) \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 x_3 dx_3 \\ &= \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Achtung: f braucht nicht Riemann-integrierbar zu sein, falls die wiederholten Integrale existieren. Falls sie existieren, brauchen die wiederholten Integrale auch nicht gleich zu sein, falls f nicht Riemann-integrierbar ist:

Beispiel 10.16. [wiederholte Integrale sind verschieden] Wir betrachten

$$f :]0, 1[\times]0, 1[\to \mathbb{R}, \quad f(x, y) := \begin{cases} y^{-2}, & \text{falls } x < y, \\ -x^{-2}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für jedes $y \in]0,1[$ ist $f(\cdot, y) :]0,1[\to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, weil diese Funktion beschränkt ist und ihre Einschränkungen auf $]0, y[$ und $[y, 1[$ stetig sind. Es gilt

$$\begin{aligned} g(y) &:= \int_0^1 f(x,y)dx \\ &= \int_0^y y^{-2}dx - \int_y^1 x^{-2}dx \\ &= y^{-2}y + x^{-1}\big|_{x=y}^1 \\ &= y^{-1} + 1 - y^{-1} \qquad\qquad = 1. \end{aligned}$$

Daher ist g über $]0,1[$ Riemann-integrierbar, mit

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 g(y)dy = 1.$$

Indem wir die Rollen von x und y vertauschen und die Gleichheit $f(x,y) = -f(y,x)$ (für $x \neq y$) verwenden, folgt daraus, dass

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx = -1 \neq 1 = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dx\,dy.$$

Die wiederholten Integrale sind also verschieden.

Die Funktion f ist nicht Riemann-integrierbar, da sie nicht beschränkt ist. Daher widerspricht dieses Beispiel dem Satz 10.11 (Fubini) nicht.

Idee des Beweises des Satzes 10.11 (Fubini): Heuristisch sind dx, dy, dz die Volumen unendlich kleiner Quader S_0, Q_0, R_0, wobei $S_0 = Q_0 \times R_0$. Daraus folgt intuitiv, dass $dx = dydz$ und darum, dass

$$\begin{aligned} \int_{Q\times R} f(x)\,dx &= \sum_{x\in Q\times R} f(x)\,dx \\ &\overset{x=(y,z)}{=} \sum_{z\in R}\left(\sum_{y\in Q} f(y,z)\,dy\right)dz \\ &= \int_R \left(\int_Q f(y,z)\,dy\right)dz. \end{aligned}$$

10.4 Jordan-Mass

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96b, 4.1] und [Stra, 8.3]. Mit dem eindimensionalen Inhalt einer Kurve meinen wir ihre Länge, mit dem zweidimensionalen Inhalt einer

Fläche ihren Flächeninhalt und mit dem dreidimensionalen Inhalt eines dreidimensionalen Körpers sein Volumen. Das Jordan-Mass verallgemeinert diesen Begriff eines Inhalts auf beliebige Dimensionen. Um es zu definieren, benötigen wir Folgendes: Seien $S \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : S \to \mathbb{R}$.

Definition 10.17. *Wir nennen f* (eigentlich) Riemann-integrierbar (über S) *g. d. w. es einen Quader R gibt so, dass $f = 0$ auf $S \setminus R$ und die Funktion*

$$F : R \to \mathbb{R}, \quad F(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in S, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \tag{10.22}$$

(eigentlich) Riemann-integrierbar ist. In diesem Fall definieren wir das Riemann-Integral von f (über S) als

$$\int_S f(x)dx := \int_R F(x)dx. \tag{10.23}$$

Bemerkungen.

- Die rechte Seite von (10.23) hängt nicht von der Wahl von R ab. (Überprüfen Sie das!) Daher ist $\int_S f(x)dx$ wohldefiniert.
- Falls $f : S \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist, dann sind f und $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ beschränkt.
- Für $S = \mathbb{R}^n$ wird in [DK04b] eine Funktion f wie in Definition 10.17 *Riemann-integrierbar mit kompaktem Träger (Riemann integrable with compact support)* genannt.

Für $c \in \mathbb{R}$ und $S \subseteq \mathbb{R}^n$ schreiben wir die Funktion auf S, die konstant gleich c ist, als

$$c_S : S \to \mathbb{R}, \qquad c_S(x) := c.$$

Definition 10.18 (Jordan-Mass)**.** *Eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst* Jordan-messbar *(oder* Jordan-Bereich*) g. d. w. 1_S Riemann-integrierbar ist. In diesem Fall definieren wir ihr* Jordan-Mass *(oder ihren* Jordan-Inhalt*) als*

$$\mathrm{vol}(S) := \mathrm{vol}_n(S) := |S| := \int_S 1dx$$

(wie in Definition 10.17).

Dieser Begriff ist nach Camille Jordan benannt, siehe Abbildung 10.7.

Bemerkung. Jede Jordan-messbare Menge ist beschränkt.

Beispiel 10.19. [Quader Jordan-messbar] Jeder Quader in $\mathbb{R}^n$ ist Jordan-messbar mit Jordan-Mass gleich seinem Volumen. (Siehe Definition 10.1(i).) Das folgt unmittelbar aus der Definition.



Abbildung 10.7: Camille Jordan, französischer Mathematiker, 1838–1922.

Beispiel 10.20. [Dreieck Jordan-messbar] Die Menge

$$S := \left\{ x \in [0,1] \times [0,1] \,\middle|\, x_1 \geq x_2 \right\}$$

ist Jordan-messbar mit

$$|S| = \frac{1}{2}.$$

Das folgt aus Beispiel 10.6.

Beispiel 10.21. [nicht-Jordan-messbare Menge] Die Menge $S := \mathbb{Q}^n \cap [0,1]^n$ ist beschränkt, aber nicht Jordan-messbar. (Warum?)

Bemerkung 10.22. [Riemann-Integral über Jordan-messbare Menge] Eine Riemann-integrierbare Funktion ist Riemann-integrierbar über jede Jordan-messbare Menge: Seien $S_0 \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : S_0 \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar (über S_0) und $S \subseteq S_0$ Jordan-messbar. Dann ist die Einschränkung $f|_S$ Riemann-integrierbar über S. Das folgt aus Proposition 10.8(vii), der Gleichheit $f\chi_S = (f\chi_{S_0})\chi_S$ und der Tatsache, dass $f\chi_{S_0}$ und χ_S Riemann-integrierbar sind über jeden Quader R, der $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ und S enthält.

Beispiel 10.23. [Integral über Jordan-messbare Menge] Der Ball $\overline{B}^n = \overline{B}_1^n(0)$ ist Jordan-messbar. (Das folgt aus der Tatsache, dass der Rand von $\overline{B}^n$ eine kompakte glatte Untermannigfaltigkeit der Dimension $n-1 < n$ ist. Siehe [DK04b, Theorem 6.3.2, p. 430, Theorem 6.3.8, p. 434].) Da die Funktion

$$f : [-1,1]^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) := x_1,$$

stetig ist, ist f gemäss Proposition 10.8(iv) Riemann-integrierbar. Daher folgt aus Bemerkung 10.22, dass f über $\overline{B}^n$ Riemann-integrierbar ist.

Frage. *Was ist das Integral?*

Antwort: $\overline{B}^n$ ist symmetrisch bezüglich Spiegelung an der $(x_2, \ldots, x_n)$-Hyperebene. Des Weiteren ist f antisymmetrisch bezüglich dieser Spiegelung. Darum verschwindet das Integral

$$\int_{[-1,1]} x_1 \chi_{\overline{B}^n}(x_1, z) dx_1$$

für jedes $z = (x_2, \ldots, x_n)$. Gemäss Satz 10.11 (Fubini) folgt daraus, dass

$$\begin{aligned} \int_{\overline{B}^n} x_1 \, dx &= \int_{[-1,1]^{n-1}} \int_{[-1,1]} x_1 \chi_{\overline{B}^n}(x_1, z) dx_1 \, dz \\ &= 0. \end{aligned}$$

10.5 Substitutionsregel, Integral einer drehinvarianten Funktion, Transformationssatz für das Volumen

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96b, 4.5, 5.4] und [Stra, 8.5]. Um das Integral einer Funktion auf $\mathbb{R}^n$ zu berechnen, ist es manchmal praktisch, andere Koordinaten als die Standardkoordinaten zu verwenden. Die Substitutionsregel für Integrale besagt, dass das Integral einer Funktion berechnet werden kann, indem die Funktion in den neuen Koordinaten ausgedrückt, mit dem Betrag der Jacobi-Determinante [4] multipliziert und integriert wird. Wir werden folgende Anwendungen der Substitutionsregel behandeln:

- eine Formel für das Integral einer drehinvarianten Funktion zweier Veränderlicher,
- Transformationssatz = eine Formel für das Volumen des Bildes einer Menge unter einem C^1-Diffeomorphismus.

Substitutionsregel

Erinnerung an Analysis 1:

Proposition 10.24 (Substitutionsregel für ein eindimensionales Integral)**.** *Seien $a \leq b$, $\Psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $f : \Psi([a, b]) \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt*

$$\int_{\Psi(a)}^{\Psi(b)} f(x) dx = \int_a^b (f \circ \Psi(y)) \Psi'(y) dy. \tag{10.24}$$

Beweis: [Stra, Satz 6.1.5, S. 122]

[4] Das ist die Determinante der Jacobi-Matrix der Koordinatentransformation.

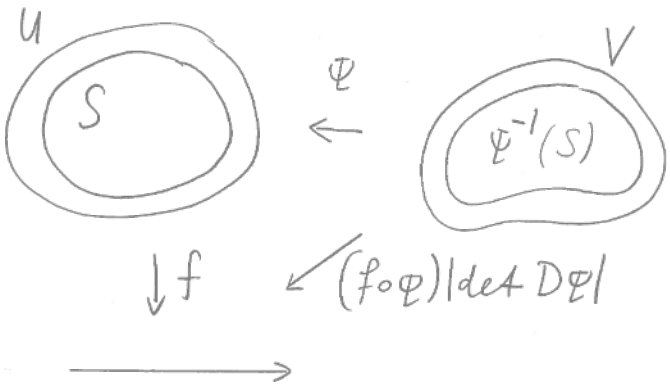


Abbildung 10.8: Die Substitutionsregel.

Bemerkung. Der Beweis beruht auf der Kettenregel und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Diese Formel ist nützlich, um eindimensionale Integrale zu berechnen. Folgender Satz liefert eine Verallgemeinerung der Formel auf höhere Dimensionen.

Satz 10.25 (Substitutionsregel für ein mehrdimensionales Integral)**.** *Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Psi : V \to U$ ein C^1-Diffeomorphismus, $S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Teilmenge so, dass $\overline{S} \subseteq U$* [5]*, und $f : S \to \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(i) f ist Riemann-integrierbar (über S) g. d. w.

$$(f \circ \Psi)\big|\det D\Psi\big| : \Psi^{-1}(S) \to \mathbb{R}$$

Riemann-integrierbar ist.

(ii) In diesem Fall gilt, dass

$$\int_S f(x)dx = \int_{\Psi^{-1}(S)} (f \circ \Psi)(y)\big|\det D\Psi(y)\big|\, dy. \tag{10.25}$$

Beweis: [Stra, Satz 8.5.2, S. 215]

Für die Beweisidee siehe S. 493.

Abbildung 10.8 verdeutlicht Satz 10.25.

[5] $\overline{S}$ bezeichnet den Abschluss von S, siehe Definition 4.19.

Bemerkung. Satz 10.25 impliziert 10.24, falls Ψ eine stetig differenzierbare Funktion einer Veränderlichen ist, deren Ableitung überall (strikt) positiv oder negativ ist. Im negativen Fall gilt $\Psi(a) \geq \Psi(b)$ und daher für die linke Seite von (10.24):

$$\begin{aligned}\int_{\Psi(a)}^{\Psi(b)} f(x)\,dx &= -\int_{\Psi(b)}^{\Psi(a)} f(x)\,dx \\ &= -\int_{S:=\left[\Psi(b),\Psi(a)\right]} f(x)\,dx \\ &= -\int_{\Psi^{-1}(S)=[a,b]} (f\circ\Psi)(y)\big|\det D\Psi(y)\big|\,dy \qquad \text{(wegen Satz 10.25)} \\ &= \int_a^b (f\circ\Psi)(y)\Psi'(y)\,dy.\end{aligned}$$

Daher gilt (10.24). Das ist der Grund für den Betrag in (10.25).

Beispiel 10.26. [affine Transformation] Wir nehmen an, dass Ψ affin ist. Dann gibt es einen linearen Isomorphismus $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ so, dass

$$\Psi(y) = Ty + v.$$

Wir schreiben

$$S - v := \{x - v \mid x \in S\}$$

für die um $-v$ verschobene Menge S. Das Urbild von S unter Ψ ist gegeben durch

$$\Psi^{-1}(S) = T^{-1}(S - v).$$

Die Gleichheit (10.25) besagt daher, dass

$$\int_S f(x)dx = \big|\det T\big| \int_{T^{-1}(S-v)} f(Ty + v)dy. \tag{10.26}$$

Darum unterscheiden sich das "naive Integral von f bezüglich y" vom Integral $\int_S f(x)dx$ um den Korrekturfaktor $\big|\det T\big|$. Wir fixieren jetzt einen Quader $R \subseteq \mathbb{R}^n$ und betrachten den Fall, dass $v = 0$, $S = \Psi(R)$ und $f = \chi_S$. Dann gilt $T^{-1}(S - v) = R$. Gleichheit (10.26) besagt daher, dass

$$|T(R)| = |\det T||R|. \tag{10.27}$$

Im Fall $Ty = cy$ mit $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (zentrische Streckung) folgt das aus der Definition des Volumens. Wir betrachten den Fall $n = 2$ und

$$T = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot, \tag{10.28}$$

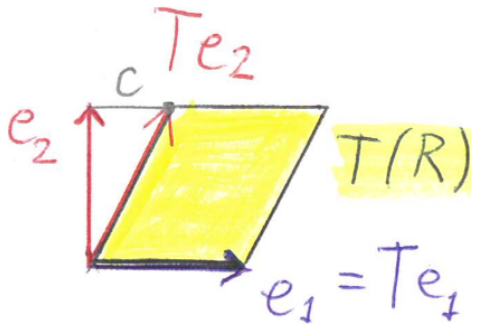


Abbildung 10.9: Die Abbildung T, eine Scherung. Hier sind $R := [0,1] \times [0,1]$, $c = \frac{1}{2}$, $e_1 := (1,0)$, $e_2 := (0,1)$.

wobei $c \in \mathbb{R}$, siehe Abbildung 10.9.

Es gilt, dass $|T(R)| = |R|$. Das folgt, indem wir auf der rechten Seite des Parallelogramms $T(R)$ ein Dreieck abschneiden und dieses auf der linken Seite wieder einfügen. Dadurch erhalten wir wieder das Rechteck R. (Dabei nehmen wir an, dass R die Form $I_1 \times I_2$ besitzt, wobei I_1, I_2 Intervalle sind und I_1 halb-offen ist.) Das beweist (10.27), falls T durch (10.28) gegeben ist.

Integral einer drehinvarianten Funktion

Als Anwendung des Satzes 10.25 erhalten wir eine Formel für das Integral einer drehinvarianten Funktion. Seien $r_0 > 0$ und $\widetilde{f} : [0, r_0] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir definieren

$$f : \overline{B}^2_{r_0} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \widetilde{f}(\|x\|).$$

Bemerkung. Wir definieren

$$R := [-r_0, r_0] \times [-r_0, r_0], \qquad F : R \to \mathbb{R}, \quad F(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in \overline{B}^2_{r_0}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Funktion F ist Riemann-integrierbar. (Das folgt aus der Tatsache, dass der Rand von $\overline{B}^2_{r_0}$ eine kompakte glatte Untermannigfaltigkeit der Dimension $n-1 < n$ ist. Siehe [DK04b, Theorem 6.3.2, p. 430, Theorem 6.3.8, p. 434].) Gemäss Definition 10.17 ist f daher Riemann-integrierbar und

$$\int_{\overline{B}^2_{r_0}} f(x)dx = \int_R F(x)dx.$$

Korollar 10.27 (Integral einer drehinvarianten Funktion)**.** *Es gilt, dass*

$$\int_{\overline{B}^2_{r_0}} f(x)dx = 2\pi \int_0^{r_0} \widetilde{f}(r) r dr. \tag{10.29}$$

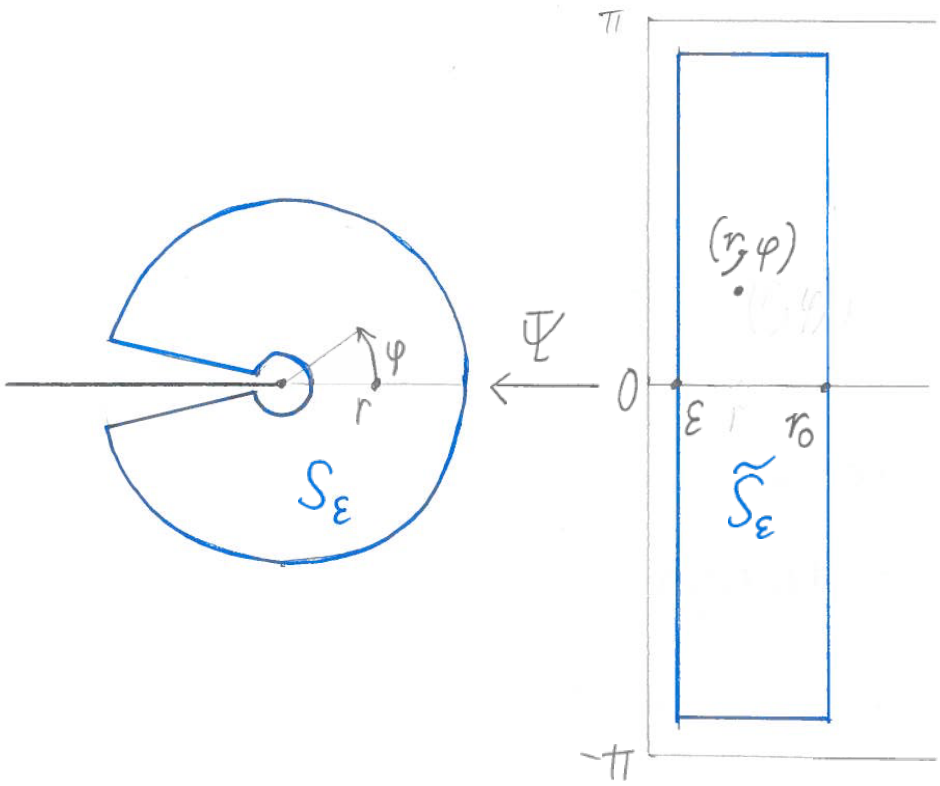


Abbildung 10.10: Polarkoordinaten und die Mengen $\widetilde{S}_\varepsilon$ und S_ε.

Beweis des Korollars 10.27: Wir definieren

$$U := \mathbb{R}^2 \setminus \big(]-\infty, 0] \times \{0\}\big), \quad V :=]0, \infty[\times]-\pi, \pi[$$

und betrachten die Polarkoordinatenabbildung

$$\Psi : V \to U, \qquad \Psi(r, \varphi) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

(Siehe Abbildung 10.10.) Diese Abbildung ist eine glatte Bijektion. (Überprüfen Sie, dass die Abbildung bijektiv ist!) Gemäss der Formel (9.6) in Beispiel 9.9 gilt, dass

$$\det D\Psi(r, \varphi) = r.$$

Gemäss dem Umkehrsatz 9.6 ist Ψ daher ein glatter Diffeomorphismus. Für jedes $\varepsilon > 0$ schreiben wir

$$\widetilde{S}_\varepsilon := [\varepsilon, r_0] \times \big[-\pi + \varepsilon, \pi - \varepsilon\big], \quad S_\varepsilon := \Psi(\widetilde{S}_\varepsilon),$$

siehe Abbildung 10.10. Die Abbildung $f\chi_{S_\varepsilon}$ ist Riemann-integrierbar. Gemäss Satz 10.25 (Substitutionsregel) und Satz 10.11 (Fubini) gilt darum, dass

$$\begin{aligned}\int_{S_\varepsilon} f(x)dx &= \int_{\widetilde{S}_\varepsilon=\Psi^{-1}(S_\varepsilon)} (f\circ\Psi)(y)\big|\det D\Psi(y)\big|\,dy\\ &= \int_{-\pi+\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{r_0} f\big(r\cos\varphi, r\sin\varphi\big)r\,dr\,d\varphi\\ &= \int_{-\pi+\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{r_0} \widetilde{f}(r)r\,dr\,d\varphi\\ &= (2\pi-2\varepsilon)\int_{\varepsilon}^{r_0}\widetilde{f}(r)r\,dr.\end{aligned}$$

Indem wir den Grenzwert $\varepsilon\to 0$ nehmen, folgt daraus (10.29). Überprüfen Sie:

$$\int_{S_\varepsilon} f(x)dx \to \int_{\overline{B}^2_{r_0}} f(x)dx, \quad \text{falls } \varepsilon\to 0$$

Das beweist Korollar 10.27. □

Beispiel 10.28. Korollar 10.27 impliziert, dass für jedes $a\geq 0$ gilt, dass

$$\int_{\overline{B}^2}\|x\|^a dx = 2\pi\int_0^1 r^{a+1}dr = \frac{2\pi}{a+2}r^{a+2}\Big|_{r=0}^1 = \frac{2\pi}{a+2}.$$

Für $a=0$ erhalten wir π, den Flächeninhalt von $\overline{B}^2$.

Beispiel 10.29. [Integral der gaußschen Glockenkurve] Wir betrachten die *gaußsche Glockenkurve*

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad f(t):=e^{-t^2},$$

siehe Abbildung 6.6. Nach Beispiel 6.70 ist diese Funktion uneigentlich Riemann-integrierbar (wie in Definition 6.68) mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx \leq 3.$$

Problem: Berechne $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx$.

Um dieses Problem zu lösen, definieren wir

$$F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, \quad F(x):=e^{-\|x\|^2}.$$

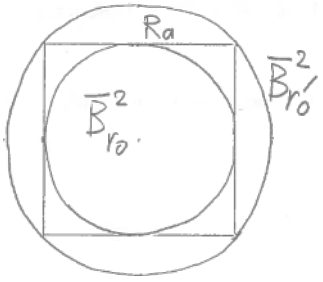


Abbildung 10.11: Die Bälle und Quadrate sind wie abgebildet ineinander enthalten.

Sei $a > 0$. Diese Funktion ist stetig und daher gemäss Proposition 10.8(iv) über $R_a := [-a, a]^2$ Riemann-integrierbar. Gemäss Satz 10.11 (Fubini) gilt darum, dass

$$\begin{aligned}\int_{R_a} F(x)dx &= \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} e^{-x_1^2}e^{-x_2^2}dx_1\,dx_2 \\ &= \int_{-a}^{a} e^{-x_2^2}\left(\int_{-a}^{a} e^{-x_1^2}dx_1\right)dx_2 \\ &= \left(\int_{-a}^{a} f(t)dt\right)^2. \end{aligned} \tag{10.30}$$

Sei $r_0 > 0$. Gemäss Korollar 10.27 gilt, dass

$$\int_{\overline{B}^2_{r_0}} F(x)dx = 2\pi\int_0^{r_0} e^{-r^2} r\,dr = -\pi e^{-r^2}\Big|_{r=0}^{r_0} = -\pi e^{-r_0^2} + \pi. \tag{10.31}$$

Das konvergiert für $r_0 \to \infty$ gegen π. Der Ball $\overline{B}^2_{r_0}$ ist im Quadrat $R_{a=r_0}$ enthalten. Des Weiteren ist das Quadrat R_a im Ball $\overline{B}^2_{r_0'=\sqrt{2}a}$ enthalten, siehe Abbildung 10.11. Daraus folgt, dass $\int_{R_a} F(x)dx$ für $a \to \infty$ gegen denselben Grenzwert wie (10.31) konvergiert.

(Überlegen Sie sich das!) Indem wir das mit (10.30) kombinieren, folgt, dass

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}dt &= \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} f(t)dt \\ &= \lim_{a\to\infty}\sqrt{\int_{R_a} F(x)\,dx} \qquad \text{(wegen (10.30))} \\ &= \sqrt{\lim_{a\to\infty}\int_{R_a} F(x)\,dx} \\ &= \sqrt{\lim_{r_0\to\infty}\int_{\overline{B}^2_{r_0}} F(x)\,dx} \\ &= \sqrt{\pi} \qquad \text{(wegen (10.31))}.\end{aligned}$$

Das löst das obige Problem.

Bemerkungen. (i) Die gaußsche Glockenkurve spielt eine wichtige Rolle in der Stochastik, wo sie als Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Normalverteilung auftritt.

(ii) Es gibt keine "Formel" für die Funktion $F(a) := \int_{-\infty}^{a} e^{-t^2}dt$. Dennoch waren wir im Stande, das Integral über ganz $\mathbb{R}$ zu berechnen. Das ist ein eindimensionales Integral, aber in unserer Berechnung haben wir ein zweidimensionales Integral verwendet. Das zeigt, dass mehrdimensionale Integration auch für die Berechnung gewisser eindimensionaler Integrale nützlich ist.

Transformationssatz für das Volumen

Als Anwendung des Satzes 10.25 (Substitutionsregel) erhalten wir folgendes Korollar.

Korollar 10.30 (Transformationssatz für das Volumen)**.** *Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Psi : V \to U$ ein C^1-Diffeomorphismus und A eine Jordan-messbare Menge so, dass $\overline{A} \subseteq V$. Dann ist $\Psi(A)$ Jordan-messbar mit*

$$|\Psi(A)| = \int_A \big|\det(D\Psi(y))\big| dy. \tag{10.32}$$

Beweis: Jordan-Messbarkeit: [Stra, Satz 8.5.1, p. 212]

Die Formel (10.32) folgt aus Satz 10.25(ii) mit $S := \Psi(A)$ und $f \equiv 1$. □

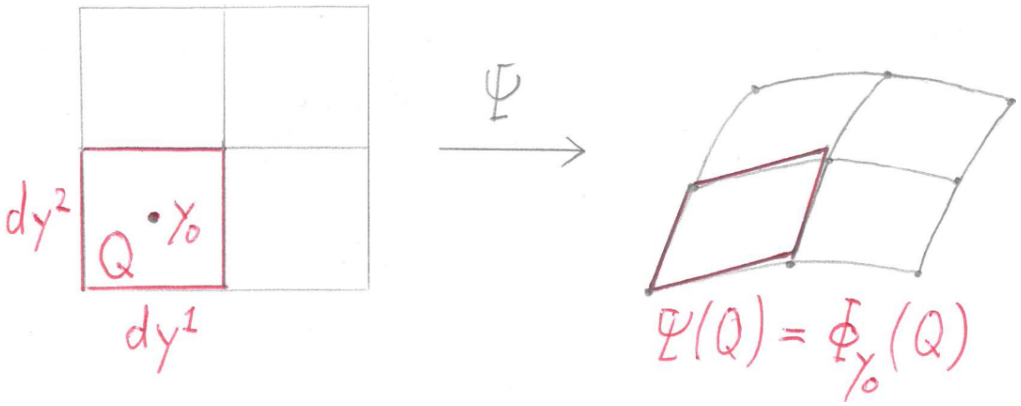


Abbildung 10.12: Wirkung von Ψ auf den infinitesimalen Quader Q.

10.5.1 Beweisidee für die Substitutionsregel

Die Idee des Beweises des Satzes 10.25 ist die folgende. Sei $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein affiner Isomorphismus, d. h., es gibt einen linearen Isomorphismus[6] $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\Phi(x) = T(x) + v$, für jedes $x \in \mathbb{R}^n$. Sei $R \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader. Mittels eines Arguments wie in Beispiel 10.26 und linearer Algebra folgt, dass

$$|\Phi(R)| = |\det T||R|. \tag{10.33}$$

Sei jetzt Ψ ein C^1-Diffeomorphismus und $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Wir definieren

$$\Phi_{y_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad \Phi_{y_0}(y) := D\Psi(y_0)(y - y_0) + \Psi(y_0). \tag{10.34}$$

Das ist die beste affine Näherung von Ψ um y_0. (Vergleiche mit (8.9).) Heuristisch bildet Ψ einen infinitesimalen[7] Quader Q mit Mittelpunkt y_0 auf das infinitesimale Parallelepiped $\Psi(Q) = \Phi_{y_0}(Q)$ ab, siehe Abbildung 10.12. Wir schreiben dy, dx für die Volumen von $Q, \Psi(Q) = \Phi_{y_0}(Q)$. (Falls wir dy^i für die Länge der i-ten Seite von Q schreiben, dann gilt, dass $dy = dy^1 \cdots dy^n$.) Gemäss (10.34,10.33) gilt heuristisch

$$dx = |\Phi_{y_0}(Q)| = \left|\det D\Psi(y_0)\right| dy.$$

Heuristisch folgt daraus, dass

$$\begin{aligned}
\int f\,dx &= \sum_{x_0} f(x_0)dx \\
&= \sum_{y_0} f(\Psi(y_0))\left|\det D\Psi(y_0)\right| dy \qquad (x_0 = \Psi(y_0)) \\
&= \int (f \circ \Psi)\left|\det D\Psi\right| dy,
\end{aligned}$$

[6] d. h. eine bijektive lineare Abbildung

[7] d. h. "unendlich kleinen"

also die im Satz 10.25 (Substitutionsregel) behauptete Gleichheit (10.25).

Kapitel 11

Die Sätze von Green, Stokes und Gauß, Anwendungen in der Elektrodynamik

Dieses Kapitel entspricht [Bla96b, 6.2, 6.3, 6.4] und [Stra, 8.4, 8.6, 8.7, 8.8]. Ein Vektorfeld ist eine Abbildung X von einer Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$. In der Physik spielt X die Rolle einer vektorwertigen Grösse, zum Beispiel des Geschwindigkeitsvektorfeldes einer Flüssigkeit oder des elektrischen Feldes. Die Sätze von Green, Stokes und Gauß besagen, dass das Integral einer gewissen Art von Ableitung eines Vektorfeldes über ein Gebiet gleich einer Art Integral des Vektorfeldes über den Rand des Gebietes ist. Im Fall von Green ist das Gebiet eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, für Stokes ist es eine Fläche in $\mathbb{R}^3$, und für Gauß ist es eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.

Die drei Sätze (Green, Stokes und Gauß) spielen eine wichtige Rolle in der Physik. Sie werden in der Strömungslehre und Elektrodynamik angewandt. Der Satz von Stokes wird zum Beispiel verwendet, um das faradaysche Induktionsgesetz aus einer der vier Maxwellgleichungen herzuleiten. Der Satz von Gauß wird verwendet, um das gaußsche Gesetz der Elektrostatik aus einer anderen Maxwellgleichung herzuleiten. (Siehe die Vorlesung *Elektromagnetische Felder und Wellen*.)

Die drei Sätze verallgemeinern den zweiten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Dieser besagt, dass das Integral der Ableitung einer stetig differenzierbaren Funktion einer reellen Veränderlichen gleich dem Unterschied der Werte der Funktion in den Endpunkten des Intervalls ist.

Der Satz von Green ist der Spezialfall des Satzes von Stokes, in dem die Fläche eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist.

11.1 Kurvenintegral, Orientierung einer Kurve, C^k-Gebiet

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96b, 6.3]. Der Satz von Green besagt, dass das Integral der Rotation eines Vektorfeldes über ein C^1-Gebiet in der Ebene gleich dem Kurvenintegral des Vektorfeldes über den positiv orientierten Rand des Gebietes ist. In diesem Abschnitt definieren wir diese Begriffe. Die Definition des Kurvenintegrals beruht auf folgender Definition und Proposition. Seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Definition. *Eine* (eingebettete) C^k-Kurve in $\mathbb{R}^n$ *ist eine C^k-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ der Dimension 1.*

Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte[1] C^1-Kurve.

Lemma 11.1 (Kurvenintegral einer Funktion)**.** *Es gilt:*

(i) Es gibt ein $\ell \in \mathbb{N}_0$ und für jedes $j = 1, \dots, \ell$ ein kompaktes Intervall I_j positiver Länge und eine Immersion $x_j \in C^1(I_j, \mathbb{R}^n)$ so, dass

$$\bigcup_{j=1}^{\ell} x_j(I_j) = C$$

und so, dass die Abbildung

$$\bigcup_j \{j\} \times \operatorname{Int} I_j \ni (j,t) \mapsto x_j(t) \in C$$

injektiv ist. (Dabei bezeichnet $\operatorname{Int} I_j$ *das Innere von I_j, siehe Definition 4.12.)*

Seien jetzt $f : C \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und ℓ und $(I_j, x_j)_{j=1,\dots,\ell}$ wie in (i). Wir definieren

$$I\big(f, (I_j, x_j)_j\big) := \sum_{j=1}^{\ell} \int_{I_j} f \circ x_j(t) \|\dot{x}_j(t)\| \, dt. \tag{11.1}$$

(ii) Die Zahl $I\big(f, (I_j, x_j)_j\big)$ hängt nicht von $(I_j, x_j)_j$ ab.

Bemerkung. Die Ableitung von x_j ist auf dem ganzen Intervall I_j definiert, auch in den Randpunkten. Daher ergibt die Bedingung, dass x_j eine Immersion ist, Sinn.

[1] Gemäss Definition 4.30 bedeutet das, dass C abgeschlossen und beschränkt ist.

Beweis des Lemmas 11.1: (i) folgt aus der Klassifikation der eindimensionalen C^k-Untermannigfaltigkeiten, welche besagt, dass jede weg-zusammenhängende eindimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ C^k-diffeomorph[2] zur Geraden $\mathbb{R}$ oder zum Kreis S^1 ist.

(ii) folgt aus der Tatsache, dass der Ausdruck $I\big(f,(I_j,x_j)_j\big)$ gleich dem Integral über die Untermannigfaltigkeit C ist. Siehe Definition 11.26 und Korollar 11.29.

Definition 11.2 (Kurvenintegral einer Funktion)**.** *Sei $f : C \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir definieren das* (Kurven-)Integral von f über C *als*

$$\int_C f\,ds := I\big(f,(I_j,x_j)_j\big), \tag{11.2}$$

wobei $(I_j,x_j)_j$ wie in Lemma 11.1(i) ist und $I\big(f,(I_j,x_j)_j\big)$ durch (11.1) *gegeben ist.*

Bemerkungen. [Kurvenintegral]

- Gemäss Lemma 11.1(i) gibt es tatsächlich eine solche Kollektion $(I_j,x_j)_j$ von Parametrisierungen. Gemäss Lemma 11.1(ii) hängt die rechte Seite von (11.2) nicht von der Wahl von $(I_j,x_j)_j$ ab. Daher ist das Kurvenintegral $\int_C f\,ds$ wohldefiniert.

- Wir können das Kurvenintegral wie folgt heuristisch interpretieren. Sei $t_0 \in I_j$. Wir definieren

$$\Psi_{t_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \qquad \Psi_{t_0}(t) := \dot{x}_j(t_0)(t-t_0) + x_j(t_0).$$

  Das ist die beste affine Näherung von x_j um t_0. (Vergleiche mit (8.9).) Für jedes Intervall J gilt:

$$\text{Länge von } \Psi_{t_0}(J) \;= \|\dot{x}_j(t_0)\||J|. \tag{11.3}$$

  Heuristisch bildet x_j ein infinitesimales[3] Intervall J mit Mittelpunkt t_0 auf die infinitesimale Strecke $x_j(J) = \Psi_{t_0}(J)$ ab. Wir schreiben dt, ds für die Längen von J, $x_j(J) = \Psi_{t_0}(J)$.

  Heuristisch ist ds die Länge des Bildes unter x_j eines infinitesimalen Zeitintervalls der Länge dt. Gemäss (11.3) gilt

$$ds = \|\dot{x}_j(t_0)\|dt, \tag{11.4}$$

  siehe Abbildung 11.1.

[2]Zwei Untermannigfaltigkeiten heissen C^k-diffeomorph, falls es einen C^k-Diffeomorphismus zwischen ihnen gibt, d. h. eine bijektive C^k-Abbildung deren Umkehrung ebenfalls C^k ist.

[3]d. h. "unendlich kleines"

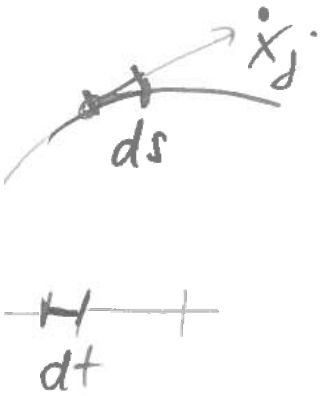


Abbildung 11.1: Die infinitesimale Bogenlänge ds.

Das Kurvenintegral von f ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\int_C f\,ds &= \sum_j \int f\circ x_j \|\dot{x}_j\|\,dt \qquad \text{(gemäss der Definition (11.2))}\\ &= \sum_j \sum_{t_0} f(x_j(t_0))\|\dot{x}_j(t_0)\|\,dt \qquad \text{(heuristisch)}\\ &= \sum_{x_0\in C} f(x_0)ds \qquad \text{(heuristisch gemäss (11.4) mit } x_0 = x_j(t_0)),\end{aligned}$$

und das ist intuitiv gleich dem Flächeninhalt (mit Vorzeichen) der Fläche, die durch $C\times\{0\}\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ und den Graphen von f aufgespannt wird.

- Für $f\equiv 1$ nennen wir
$$\ell(C) := \int_C 1\,ds$$
die *(Bogen-)Länge von C*. Das stimmt mit unserer Intuition überein, dass die Bogenlänge die Summe der Längen der "infinitesimalen Bögen" ist, woraus C besteht.

Beispiel 11.3. [Kurvenintegral einer Funktion] Wir betrachten

$$C := S^1, \quad f\in C(S^1,\mathbb{R}).$$

Es gilt

$$\int_{S^1} f\,ds = \int_0^{2\pi} f(\cos t,\sin t)\,dt.$$

Um das zu sehen, definieren wir

$$\ell = 1, \quad I_1 := [0,2\pi], \quad x_1 : I_1\to\mathbb{R}^2,\ x_1(t) := (\cos t,\sin t).$$

Es gilt, dass

$$\dot{x}_1 = (-\sin t, \cos t), \quad \|\dot{x}_1\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t} = 1.$$

Insbesondere erhalten wir für die Bogenlänge des Einheitskreises

$$\ell(S^1) = \int_{S^1} 1 ds = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Ein anderes Beispiel ist[4]

$$\int_{S^1} x^1 \, ds = \int_0^{2\pi} \cos(t) = \sin t|_{t=0}^{2\pi} = 0.$$

Das folgt auch aus einem Symmetrie-Argument. (Wie?)

Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine C^1-Kurve.

Definition 11.4 (Einheitstangentialvektorfeld)**.** *Ein* Einheitstangentialvektorfeld längs C *(oder eine* Orientierung von C*) ist eine stetige Abbildung* $T : C \to \mathbb{R}^n$ *so, dass*

$$T(x) \in T_x C, \, \|T(x)\| = 1, \quad \forall x \in C.$$

Beispiel 11.5. [Orientierungen des Kreises] Die Abbildungen

$$T : S^1 \to \mathbb{R}^2, \quad T(x) := (-x_2, x_1),$$

und $-T$ sind Orientierungen des Kreises.

Bemerkung. Falls C eine wegzusammenhängende C^1-Kurve ist, dann gibt es genau zwei Orientierungen auf C (T und $-T$). Grund: Falls T und $\widetilde{T}$ Orientierungen sind, dann gilt $T \cdot \widetilde{T} : C \to \{\pm 1\}$. Diese Abbildung ist stetig. Da C wegzusammenhängend ist, folgt daraus, dass das Bild von $T \cdot \widetilde{T}$ wegzusammenhängend ist. Daraus folgt, dass $T \cdot \widetilde{T} \equiv 1$ oder -1 und darum, dass $T \equiv \widetilde{T}$ oder $T \equiv -\widetilde{T}$.

Sei T eine Orientierung von C. Ein stetiges *Vektorfeld längs* C ist eine stetige Abbildung $X : C \to \mathbb{R}^n$. Sei X ein solches Vektorfeld. Wir bezeichnen mit

$$v \cdot w := \sum_{i=1}^n v^i w^i$$

das Standardskalarprodukt zweier Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$.

[4]Hier bezeichnet x^1 die erste Koordinate von $x \in \mathbb{R}^2$.

Definition 11.6 (Kurvenintegral eines Vektorfeldes)**.** *Wir nehmen an, dass C kompakt ist. Wir definieren das* (Kurven)-Integral *(oder das* Ringintegral *oder* die Zirkluation*)* von X über C bezüglich T *als*

$$\int_{C,T} X \cdot d\boldsymbol{s} := \int_C X \cdot T \, ds, \tag{11.5}$$

wobei die rechte Seite das Kurvenintegral der Funktion $X \cdot T : C \to \mathbb{R}$ bezeichnet. (Siehe Definition 11.2.)

Bemerkungen.

- Seien $\ell \in \mathbb{N}_0$, $I_1, \ldots, I_\ell$ kompakte Intervalle und $x_j \in C^1(I_j, \mathbb{R}^n)$ Wege wie in Definition 11.2 so, dass

  $$\frac{\dot{x}_j}{\|\dot{x}_j\|} = T \circ x_j, \quad \forall j.$$

  Es gilt

  $$\int_{C,T} X \cdot d\mathbf{s} = \sum_{j=1}^{\ell} \int_{I_j} \big(X \circ x_j(t)\big) \cdot \dot{x}_j(t) dt. \tag{11.6}$$

  Das folgt aus (11.5,11.2,11.1).

- Heuristisch gilt, dass

  $$d\mathbf{s} = T ds.$$

  Das ist ein "infinitesimaler Vektor". Der Ausdruck $X \cdot d\mathbf{s}$ ist das Skalarprodukt von X mit diesem Vektor. Heuristisch können wir das Kurvenintegral von X daher als die Summe aller dieser Skalarprodukte auffassen,

  $$\int_{C,T} X \cdot d\mathbf{s} = \sum_x X(x) \cdot d\mathbf{s}.$$

- Seien U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, X ein stetiges Vektorfeld auf U, I ein kompaktes Intervall und γ ein C^1-Weg auf I in U, d. h. eine C^1-Abbildung $\gamma : I \to U$. In Definition 8.28 haben wir das *Wegintegral von X längs γ* definiert als

  $$\int X \cdot d\gamma := \int_a^b X(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) \, dt.$$

  Das stimmt mit der Formel (11.6) für das Kurvenintegral wie in Definition 11.6 überein, falls C mittels eines einzigen Weges $\gamma = x_1$ parametrisiert wird.

Beispiel 11.7. [Kurvenintegral eines Vektorfeldes] Wir betrachten

$$C := S^1, \quad X \in C(S^1, \mathbb{R}^2),$$

und T wie in Beispiel 11.5, d. h.

$$T(x) := (-x_2, x_1).$$

Es gilt

$$\int_{S^1,T} X \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} X(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t)\, dt.$$

Das folgt aus (11.6) mit

$$x_1 : I_1 := [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad x_1(t) := (\cos t, \sin t).$$

Insbesondere erhalten wir für $X(x) := (-x_2, x_1)$ dass

$$\int_{S^1,T} X(x) \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} \big((-\sin t)^2 + \cos^2 t\big)\, dt = 2\pi,$$

und für $X(x) \equiv e_1$ dass

$$\int_{S^1,T} X(x) \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} (-\sin t) dt = \cos t|_{t=0}^{2\pi} = 0.$$

Um den Satz von Green zu formulieren, benötigen wir Folgendes. Seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Definition 11.8 (C^k-Gebiet)**.** *Ein* (n-dimensionales) C^k-Gebiet *ist eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ so, dass es für jeden Punkt $x_0 \in \partial U$ eine offene Umgebung U' von x_0 und eine C^k-Submersion $g : U' \to \mathbb{R}$ gibt so, dass*

$$g(x_0) = 0, \quad U \cap U' = g^{-1}(]-\infty, 0[) = \big\{x \in U' \,\big|\, g(x) < 0\big\}. \tag{11.7}$$

Abbildung 11.2 verdeutlicht diese Definition.

Bemerkung.

- Seien U' und g wie oben. Es gilt, dass

$$\partial U \cap U' = g^{-1}(0), \tag{11.8}$$

  und das ist eine C^k-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ der Dimension $n-1$. Das folgt aus dem *Submersionssatz*, der besagt, dass g lokal in geeigneten Koordinaten durch die Projektion auf die letzte Koordinate gegeben ist. (Siehe [DK04a, Theorem 4.5.2, p. 121].)

- In [DK04b, Definition 7.5.2, S. 515] wird definiert, was es bedeutet, dass eine offene Teilmenge U "auf *einer* Seite ihres Randes liegt". Die Bedingung ist äquivalent dazu, dass U ein C^k-Gebiet ist.

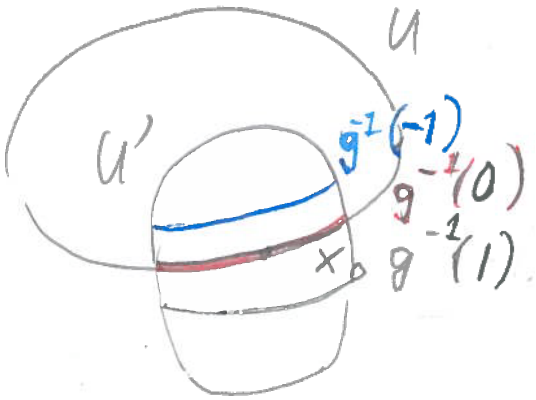


Abbildung 11.2: Ein C^k-Gebiet.

Beispiel 11.9. Jeder offene Ball in $\mathbb{R}^n$ ist ein C^∞-Gebiet.

Beispiel 11.10. Die offene Menge $U := \mathbb{R}^2 \setminus \big(\{0\} \times \mathbb{R}\big)$ ist kein C^1-Gebiet. Das Problem ist, dass U auf beiden Seiten seines Randes $\partial U = \{0\} \times \mathbb{R}$ liegt.

Eine Basis $v_1, \dots, v_n$ von $\mathbb{R}^n$ heisst *positiv* g. d. w.

$$\det\big(v_1 \cdots v_n\big) > 0.$$

Wir betrachten den Fall $n = 2$.

Definition 11.11 (positive Orientierung des Randes)**.** *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ein C^1-Gebiet. Wir definieren die* positive Orientierung von ∂U (bezüglich U)*,*

$$T : \partial U \to \mathbb{R}^2,$$

wie folgt. Seien $x_0 \in \partial U$ und U', g wie in Definition 11.8. Wir definieren $T(x_0) \in T_{x_0}\partial U$ als den eindeutigen Vektor der Länge 1 so, dass das (geordnete) Paar $\big(\nabla g(x_0), T(x_0)\big)$ eine positive Basis von $\mathbb{R}^2$ ist.

Bemerkung.

- $\nabla g = (D_1 g, D_2 g)$ = Gradient von g.
- Die Bedingung bedeutet, dass U "links von $T(x)$ liegt".
- Sie hängt nicht von der Wahl von g ab.

Beispiel. Für den Ball $U = B^2$ ist die positive Orientierung des Randes gegeben durch

$$T(x) = (-x_2, x_1).$$

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ein C^1-Gebiet. Mit einem *C^1-Vektorfeld auf $\overline{U}$* meinen wir eine Abbildung $X \in C^1(\overline{U}, \mathbb{R}^2)$ (wie in Definition 9.46). Sei X ein solches Vektorfeld. Wir definieren die (skalare) Rotation von X wie in Definition 8.47(i), d. h.

$$\operatorname{rot} X := D_1 X^2 - D_2 X^1 : \overline{U} \to \mathbb{R}.^5$$

Bemerkung. Weil U ein C^1-Gebiet ist, ist DX (und daher $\operatorname{rot} X$) wohldefiniert und stetig auf $\overline{U}$, nicht nur auf U.

11.2 Satz von Green, Interpretation der Rotation als Zirkulation pro eingeschlossene Fläche

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96b, 6.2] und [Stra, 8.4]. Wir bezeichnen mit $\cdot$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Das erste Hauptresultat dieses Kapitels ist folgender Satz.

Satz 11.12 (Green)**.** *Seien $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ein beschränktes C^1-Gebiet und X ein C^1-Vektorfeld auf $\overline{U}$. Dann ist das Integral der Rotation von X über U gleich dem Integral von X über den Rand von U, d. h.*

$$\int_U \operatorname{rot} X \, dx = \int_{\partial U, T} X \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{\partial U} X \cdot T \, ds, \tag{11.9}$$

wobei T die positive Orientierung von ∂U ist.

Beweis: S. 533 oder [Stra, Satz 8.4.1, S. 207] oder [DK04b, Theorem 8.3.5, p. 554]

Der Beweis des Satz beruht auf dem Satz von Gauß (Satz 11.44). Der Satz ist nach George Green benannt (britischer Mathematiker und Physiker, 1793–1841).

Bemerkungen.

- Die Funktion $\operatorname{rot} X$ ist eigentlich Riemann-integrierbar über U, d. h., die linke Seite von (11.9) ist wohldefiniert.
- Da U beschränkt ist, ist ∂U kompakt. Darum ist die rechte Seite von (11.9) wohldefiniert.
- Der Satz von Green ist eine einfache Version des Satzes von Stokes, in dem eine Fläche in $\mathbb{R}^3$ vorkommt. (Siehe Abschnitt 11.6.) Das ist die Hauptmotivation für den Satz von Green.

[5] $\overline{U}$ bezeichnet den Abschluss von U, siehe Definition 4.19.

Beispiel 11.13. [Flächeninhalt und Satz von Green] Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ein beschränktes C^1-Gebiet und

$$X : \overline{U} \to \mathbb{R}^2$$

ein C^1-Vektorfeld so, dass $\operatorname{rot} X \equiv 1$. Gemäss Satz 11.12 (Green) gilt, dass

$$|U| = \int_{\partial U,T} X \cdot d\mathbf{s}.$$

Das liefert eine Methode, um den Flächeninhalt von U zu berechnen. Wir betrachten zum Beispiel

$$U := B^2, \quad X(x) := \frac{1}{2}(-x_2, x_1).$$

Dann gilt $\operatorname{rot} X \equiv 1$. Wir betrachten die Parametrisierung

$$x : [0, 2\pi] \to S^1, \quad x(t) := \big(\cos t, \sin t\big).$$

Wir bezeichnen mit T die positive Orientierung von S^1 als Rand von $B^2 = B_1^2(0)$. (Siehe Beispiel 11.1.) Gemäss Satz 11.12 gilt

$$\begin{aligned}
|B^2| &= \int_{B^2} \operatorname{rot} X \, dx \\
&= \int_{S^1,T} X \cdot d\mathbf{s} \\
&= \int_0^{2\pi} X \circ x(t) \cdot \dot{x}(t) \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\big(-\sin t, \cos t\big) \cdot \big(-\sin t, \cos t\big) \, dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \big((-\sin t)^2 + \cos^2 t\big) \, dt \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

(Vergleichen Sie das mit einer Aufgabe in Übungsserie 7 (Volumen des Einheitsballes) und Beispiel 10.28.)

Bemerkungen. [Rotation = Zirkulation pro eingeschlossene Fläche]

- Mittels des Satzes von Green können wir die Rotation eines Vektorfeldes als die *Zirkulation des Vektorfeldes pro eingeschlossenen Flächeninhalt* auffassen. Sei nämlich $U_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge, X ein C^1-Vektorfeld auf U_0 und $x_0 \in U_0$. Sei $r \in]0, \infty[$ so, dass der Ball $U_r := B_r^2(x_0)$ in U_0 enthalten ist. Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|U_r|} \int_{\partial U_r} X \cdot d\mathbf{s} &= \frac{1}{|U_r|} \int_{U_r} \operatorname{rot} X \, dx \qquad \text{(gemäss Satz 11.12, Green)} \\
&\to \operatorname{rot} X(x_0) \qquad \text{für } r \to 0.
\end{aligned}$$

Der Grund für diese Konvergenz ist, dass die Werte von $\operatorname{rot} X$ im Ball U_r "immer weniger von $\operatorname{rot} X(x_0)$ abweichen", wenn $r > 0$ kleiner wird. Das Integral $\int_{\partial U_r} X \cdot d\mathbf{s}$ ist die Zirkulation von X längs der Kurve $C_r := \partial U_r = S_r^1(x_0)$. $|U_r|$ ist der Inhalt der durch C_r eingeschlossenen Fläche U_r. Wir können daher den Grenzwert

$$\operatorname{rot} X(x_0) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{|U_r|} \int_{\partial U_r} X \cdot d\mathbf{s}$$

als die *Zirkulation von X pro eingeschlossenen Flächeninhalt im Punkt x_0* interpretieren, wie behauptet.

- Wir können in dieser Interpretation anstelle von U_r ein allgemeines C^1-Gebiet U zulassen, falls wir den Grenzwert für $r \to 0$ durch einen "Grenzwert für $U \to \{x_0\}$" ersetzen. Dazu müssen wir zuerst den Begriff eines "Grenzwertes für $U \to \{x_0\}$" definieren.

11.3 Untermannigfaltigkeit mit Rand, Koorientierung einer Hyperfläche, induzierte Orientierung des Randes einer Fläche

Der Satz von Stokes verallgemeinert den Satz von Green, indem das C^1-Gebiet in $\mathbb{R}^2$ durch eine Fläche in $\mathbb{R}^3$ mit Rand ersetzt wird. Er besagt, dass der Fluss der Rotation eines Vektorfeldes durch eine Fläche in $\mathbb{R}^3$ gleich dem Integral des Vektorfeldes längs des Randes der Fläche ist. Eine Fläche mit Rand ist ein Spezialfall einer Untermannigfaltigkeit mit Rand. Dieser Begriff ist wie folgt definiert. Seien $d, n \in \mathbb{N}_0$ so, dass $d \le n$, und seien $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $M \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definition 11.14 (Parametrisierung, Untermannigfaltigkeit mit Rand)**.** *Eine* lokale innere C^k-Parametrisierung von M (der Dimension d) *ist ein Paar (V, ψ), wobei $V \subseteq \mathbb{R}^d$ eine offene Teilmenge und $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ eine C^k-Einbettung ist so, dass es eine offene Teilmenge U von $\mathbb{R}^n$ mit $\psi(V) = M \cap U$ gibt. Eine* lokale C^k-Randparametrisierung von M *ist ein Paar (V, ψ), wobei*

$$V \subseteq \mathbb{R}^d_{\ge 0} := \mathbb{R}^{d-1} \times [0, \infty[$$

eine (relativ) offene Teilmenge ist und $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ eine C^k-Einbettung ist so, dass es eine offene Teilmenge U von $\mathbb{R}^n$ mit $\psi(V) = M \cap U$ gibt. Eine lokale C^k-Parametrisierung von M *ist eine lokale innere oder Randparametrisierung von M der Klasse C^k.*

Wir nennen M eine C^k-Untermannigfaltigkeit der Dimension d mit Rand *g. d. w. es für jeden Punkt $x_0 \in M$ eine lokale C^k-Parametrisierung (V, ψ) mit $x_0 \in \psi(V)$ gibt.*

Sei M eine solche Untermannigfaltigkeit. Wir definieren den intrinsischen Rand von *M als die Menge*

$$\partial M := \bigcup \big\{ \psi\big(V \cap (\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\})\big) \,\big|\, (V,\psi) \text{ lokale } C^k \text{ Randparametrisierung von } M \big\}.$$

Bemerkungen. [Untermannigfaltigkeit mit Rand]

(i) Erinnerung an Definition 4.37: Seien $S \subseteq \mathbb{R}^m$ und $V \subseteq S$. V heisst (relativ) offen in S g. d. w. es eine offene Teilmenge $\widetilde{V} \subseteq \mathbb{R}^m$ gibt so, dass $V = S \cap \widetilde{V}$. Wenn also (V,ψ) eine Randparametrisierung ist, dann kann V den Rand $\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$ von $\mathbb{R}^d_{\geq 0}$ schneiden. In diesem Fall ist V nicht offen in $\mathbb{R}^d$.

(ii) Eine C^k-Einbettung $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ ist eine injektive C^k-Immersion, die eine stetige Umkehrung besitzt. Im "Randfall" $V \subseteq \mathbb{R}^d_{\geq 0}$ ist $D\psi$ auf ganz V definiert (einschliesslich $V \cap (\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\})$). Daher ist es sinnvoll zu verlangen, dass $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ eine "Immersion" ist.

Sei jetzt $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine C^k-Untermannigfaltigkeit der Dimension d mit Rand.

(iii) Der intrinsische Rand von M ist wohldefiniert, d. h., er hängt nicht von k ab. (k tritt in C^k auf.)

(iv) Falls (V,ψ) und (V',ψ') lokale C^k Randparametrisierungen von M sind, dann gilt

$$\psi'^{-1}\Big(\psi\big(V \cap (\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\})\big)\Big) \subseteq \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\},$$

d. h., falls ein Punkt $x_0 \in M$ ein Randpunkt bezüglich einer lokalen C^k-Randparametrisierung (ψ, V) ist, dann gilt dasselbe bezüglich aller anderen lokalen C^k-Randparametrisierungen, deren Bild x_0 enthält.

(v) Falls M (in $\mathbb{R}^n$) abgeschlossen ist und $d < n$, dann ist das Innere von M leer und daher der *topologische Rand* von M gleich M. Der topologische Rand und der intrinsische Rand von M unterscheiden sich daher. Aus dem Kontext wird jeweils deutlich werden, um welche Art Rand es geht.

(vi) Die Dimension d von M is eindeutig, d. h., falls M eine C^k-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ mit Rand der Dimension d und der Dimension d' ist, dann ist $d = d'$. Das folgt aus derselben Aussage für eine Untermannigfaltigkeit ohne Rand. (Siehe Proposition 9.18.)

(vii) Falls V eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{d-1} \times]0,\infty[$ ist, dann ist (V,ψ) eine innere Parametrisierung g. d. w. es eine Randparametrisierung ist. Das Bild $\psi(V)$ braucht den intrinsischen Rand von M daher nicht zu schneiden, falls ψ eine Randparametrisierung ist.

(viii) Wir wählen einen glatten Diffeomorphismus $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ (zum Beispiel $f := \log$) und definieren

$$\chi : \mathbb{R}^{d-1} \times]0, \infty[\to \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}, \quad \chi(z,t) := \big(z, f(t)\big).$$

Falls (V, ψ) eine innere Parametrisierung für M ist, dann ist $\big(\chi^{-1}(V), \psi \circ \chi\big)$ eine Randparametrisierung für M. Daraus folgt, dass eine Teilmenge M von $\mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit mit Rand ist g. d. w. es *Rand*-Parametrisierungen gibt, deren Bilder M überdecken.

Beispiel. [Untermannigfaltigkeit mit Rand] Jede C^k-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ der Dimension d ist eine C^k-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ der Dimension d mit Rand. Das folgt aus Satz 9.30 (Charakterisierung von Untermannigfaltigkeiten). In diesem Fall ist der intrinsische Rand leer.

Andere Beispiele von Untermannigfaltigkeiten mit Rand sind global parametrisierbare Untermannigfaltigkeiten: Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge.

Definition 11.15 (parametrisierbare Untermannigfaltigkeit)**.** *Eine (globale) C^k-Parametrisierung von M ist ein Paar (V, ψ), wobei $V \subseteq \mathbb{R}^d$ ein beschränktes offenes C^k-Gebiet ist und $\psi : \overline{V} \to \mathbb{R}^n$ eine C^k-Einbettung mit Bild M ist. Wir nennen $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine* kompakte (global) parametrisierbare C^k-Untermannigfaltigkeit der Dimension d mit Rand *g. d. w. es eine globale C^k-Parametrisierung von M gibt.*

Bemerkung 11.16. [parametrisierbare Untermannigfaltigkeit] Jede kompakte parametrisierbare C^k-Untermannigfaltigkeit M mit Rand ist eine C^k-Untermannigfaltigkeit mit intrinsischem Rand

$$\partial M = \psi(\partial V),$$

wobei (V, ψ) eine C^k-Parametrisierung von M ist und ∂V der topologische Rand von V ist.

Beispiel. [Hemisphäre] Die abgeschlossene Hemisphäre

$$M := \big\{ x \in S^{n-1} \,\big|\, x_n \geq 0 \big\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

ist eine glatte parametrisierbare Untermannigfaltigkeit der Dimension $n-1$ mit intrinsischem Rand gegeben durch den Äquator

$$\partial M = S^{n-2} \times \{0\}.^6$$

Um das einzusehen, definieren wir $V := B^{n-1}$ und $\psi : \overline{V} \to \mathbb{R}^n$ als die Einschränkung der Umkehrung der steregraphischen Projektion durch den Südpol auf den abgeschlossenen Einheitsball. (Siehe die Übungsserien 4 und 5.)

[6] $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ ist die Einheitssphäre.

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine C^1-Untermannigfaltigkeit der Dimension d mit Rand. Für jedes $x \in M$ definieren wir den Tangentialraum an M im Punkt x als

$$T_x M := D\psi(\psi^{-1}(x))(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathbb{R}^n,$$

wobei (V, ψ) eine lokale C^1-Parametrisierung von M ist so, dass $x \in \psi(V)$.

Bemerkung. Im Fall $x \in M \setminus \partial M$ stimmt das gemäss Satz 9.41 (Charakterisierung des Tangentialraumes) mit unserer früheren Definition des Tangentialraumes überein.

Für jeden Untervektorraum W von $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit

$$W^\perp = \big\{ v \in \mathbb{R}^n \,\big|\, \langle v, w\rangle = 0,\ \forall w \in W \big\}$$

das orthogonale Komplement von W bezüglich des Standardskalarprodukts. Wir nehmen jetzt an, dass $\dim M = d = n - 1$.

Definition 11.17 (Einheitsnormalvektorfeld)**.** *Eine* Koorientierung von M *(oder ein* Einheitsnormalvektorfeld auf M*) ist eine Abbildung $\nu \in C(M, \mathbb{R}^n)$ so, dass*

$$\nu(x) \in T_x M^\perp,\ \|\nu(x)\| = 1, \quad \forall x \in M. \tag{11.10}$$

Bemerkung. Manchmal wird ein solches ν auch eine *Orientierung von M* genannt.

Beispiel 11.18. [Koorientierungen der Sphäre] Die Abbildungen

$$\nu : M := S^{n-1} \to \mathbb{R}^n, \quad \nu(x) := x$$

und $-\nu$ sind Koorientierungen, siehe Abbildung 11.3.

Beispiel 11.19. [Möbiusband] Das Möbiusband $M \subseteq \mathbb{R}^3$ ist nicht koorientierbar, d. h., es gibt keine Koorientierung auf M. Abbildung 11.5 verdeutlicht das.

Das Möbiusband ist nach August Ferdinand Möbius benannt, siehe Abbildung 11.4.

Bemerkungen.

- Eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ der Dimension $n - 1$ mit Rand heisst ein *Hyperfläche*.
- Jede kompakte (global) parametrisierbare C^1-Hyperfläche $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist koorientierbar. Sei nämlich $\psi : \overline{V} \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Parametrisierung von M. Wir definieren die *durch ψ induzierte Koorientierung* $\nu : M \to \mathbb{R}^n$, indem wir fordern, dass $\nu(x) \in T_x M^\perp$ der eindeutige Vektor der Länge 1 ist so, dass

  $$D_1\psi(\psi^{-1}(x)), \ldots, D_{n-1}\psi(\psi^{-1}(x)), \nu(x)$$

  eine positive Basis von $\mathbb{R}^n$ ist. (Überlegen Sie sich, dass ν existiert und stetig ist!) Falls $n = 3$, dann gilt

  $$\nu(x) = \frac{D_1\psi \times D_2\psi}{\big\|D_1\psi \times D_2\psi\big\|}\big(\psi^{-1}(x)\big), \qquad \forall x \in M. \tag{11.11}$$

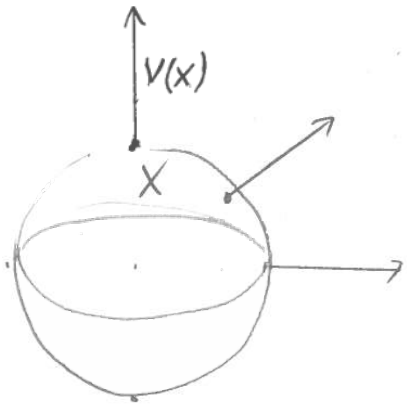


Abbildung 11.3: Koorientierung der Sphäre.

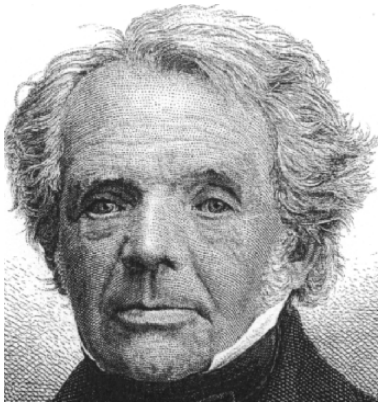


Abbildung 11.4: August Ferdinand Möbius, deutscher Mathematiker, 1790–1868.

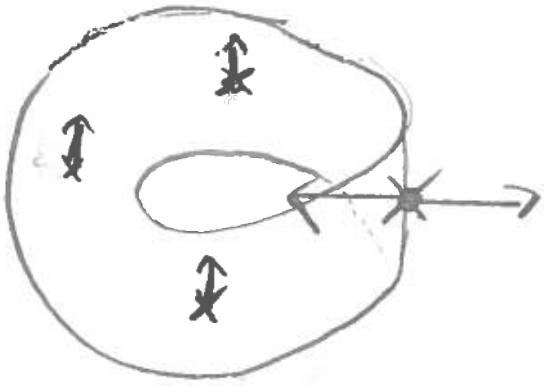


Abbildung 11.5: Es gibt keine Koorientierung des Möbiusbandes: Wir nehmen widerspruchsweise an, dass es eine solche Koorientierung gibt. Wir betrachten den Fall, dass diese Koorientierung auf der rechten Seite des Bildes nach links zeigt. (Den andere Fall können wir analog behandeln.) Wir gehen um das Möbiusband herum. Die Koorientierung dreht dabei mit. Sobald wir wieder am Ausgangspunkt angekommen sind, zeigt die Koorientierung jetzt nach rechts. Das ist ein Widerspruch. Daher gibt es keine Koorientierung des Möbiusbandes.

Beispiel 11.20. [Koorientierung der Hemisphäre] Wir betrachten die Abbildung

$$\psi : B^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \psi(y) := \big(y, \sqrt{1 - \|y\|^2}\big).$$

Das ist eine glatte Einbettung mit Bild gegeben durch die obere Hemisphäre (ohne Rand)

$$S^2_+ := \big\{x \in S^2 \,\big|\, x_3 > 0\big\}.$$

Wir haben

$$D_1\psi(y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\dfrac{y_1}{\sqrt{1-\|y\|^2}} \end{pmatrix}, \qquad D_2\psi(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\dfrac{y_2}{\sqrt{1-\|y\|^2}} \end{pmatrix},$$

$$D_1\psi(y) \times D_2\psi(y) = \begin{pmatrix} 0 + \dfrac{y_1}{\sqrt{1-\|y\|^2}} \\ 0 + \dfrac{y_2}{\sqrt{1-\|y\|^2}} \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{11.12}$$

$$\big\|D_1\psi(y) \times D_2\psi(y)\big\| = \sqrt{\frac{\|y\|^2}{1-\|y\|^2} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1-\|y\|^2}}, \tag{11.13}$$

$$\begin{aligned} \nu(\psi(y)) &= \frac{D_1\psi(y) \times D_2\psi(y)}{\big\|D_1\psi(y) \times D_2\psi(y)\big\|} \qquad \text{(gemäss (11.11))} \\ &= \big(y, \sqrt{1-\|y\|^2}\big) = \psi(y) \qquad \text{(gemäss (11.12,11.13)).} \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$\nu(x) = x, \quad \forall x \in S^2_+.$$

Das stimmt mit der Koorientierung aus Beispiel 11.18 überein.

Seien $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ eine C^1-Fläche[7] mit Rand und ν eine Koorientierung von Σ.

Definition 11.21 (induzierte Orientierung)**.** *Wir definieren die* durch ν induzierte Orientierung T von $\partial\Sigma$ *wie folgt. Seien $x \in \partial\Sigma$ und (V, ψ) eine lokale C^1-Randparametrisierung von Σ, deren Bild x enthält und die* (11.11) *erfüllt. . Wir definieren $y := \psi^{-1}(x) \in \big(V \cap \mathbb{R} \times \{0\}\big) \subseteq \mathbb{R}^2_{\geq 0}$ und*

$$T(x) := \frac{D_1\psi(y)}{\|D_1\psi(y)\|} \in \mathbb{R}^3.$$

Bemerkungen 11.22. [induzierte Orentierung]

[7] d. h. eine zwei-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$

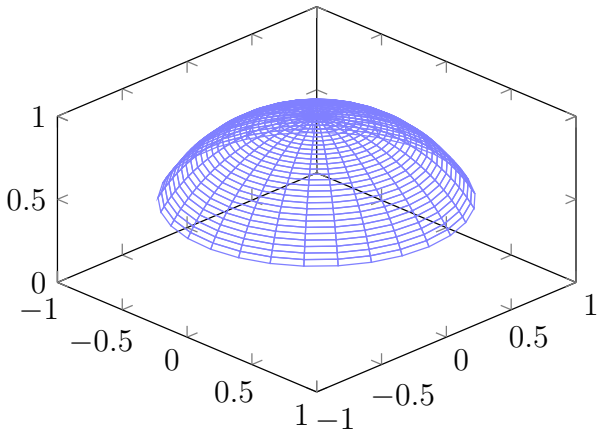


Abbildung 11.6: eine Kugelkappe

(i) Die Orientierung T ist wohldefiniert, d. h., sie hängt nicht von der Wahl von (V, ψ) ab. (Überlegen Sie sich das!)

(ii) Falls (V, ψ) eine globale C^1-Parametrisierung von Σ ist, die ν induziert, d. h. (11.11) erfüllt, dann ist diese Orientierung gegeben durch

$$T = \left(\frac{D\psi\, \widetilde{T}}{\|D\psi\, \widetilde{T}\|} \right) \circ \psi^{-1} : \partial\Sigma \to \mathbb{R}^3,$$

wobei $\widetilde{T}$ die positive Orientierung von $\partial V \subseteq \mathbb{R}^2$ ist. (Siehe Definition 11.11. Überlegen Sie sich das!)

Beispiel 11.23. [Kugelkappe und induzierte Orientierung] Für $a \in]-1, 1[$ betrachten wir die Kugelkappe

$$\Sigma_a := \big\{ x \in S^2 \,\big|\, x_3 \geq a \big\}.$$

Siehe Abbildung 11.6. Σ_a ist eine glatte Fläche mit Rand. Um das im Fall $a > 0$ [8] einzusehen, betrachten wir $V := B^2_{\sqrt{1-a^2}}$ und die Abbildung

$$\psi : \overline{V} \to \mathbb{R}^3, \quad \psi(y) := \big(y, \sqrt{1 - \|y\|^2}\big).$$

Das ist eine globale glatte Parametrisierung von Σ_a. Gemäss Bemerkung 11.16 ist Σ_a daher tatsächlich eine glatte Fläche mit Rand gegeben durch

$$\partial\Sigma_a = \psi\left(\partial V = S^1_{\sqrt{1-a^2}}\right) = S^1_{\sqrt{1-a^2}} \times \{a\}.$$

(Überlegen Sie sich die letzte Gleichheit!) Wir betrachten die Koorientierung von Σ_a gegeben durch

$$\nu : \Sigma_a \to \mathbb{R}^3,\ \nu(x) := x.$$

[8] Im Fall $a \leq 0$ folgt die Aussage mit Hilfe der stereographischen Projektion durch den Südpol.



Abbildung 11.7: Jørgen Pedersen Gram, dänischer Mathematiker und Aktuar, 1850–1916.

Die Orientierung von $\partial\Sigma_a = S^1_{\sqrt{1-a^2}} \times \{a\}$ induziert durch ν ist

$$T : \partial\Sigma_a \to \mathbb{R}^3, \quad T(x) = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\big(-x_2, x_1, 0\big).$$

Im Fall $a > 0$ folgt das aus Beispiel 11.20 (Koorientierung der Hemisphäre) und Bemerkung 11.22((ii)). (Wie?) In der allgemeinen Situation folgt das aus einem ähnlichen Argument, indem wir stereographische Projektion durch den Südpol als Parametrisierung verwenden. Im Fall $a = 0$ ist Σ_0 die abgeschlossene obere Hemisphäre, und es gilt, dass

$$T(x) = \big(-x_2, x_1, 0\big).$$

11.4 Integral einer Funktion über eine Untermannigfaltigkeit, Zusammenhang mit dem Kurvenintegral

Für die Definition des Integrals einer Funktion über eine Untermannigfaltigkeit benötigen wir Folgendes. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times d}$.

Definition (Gramsche Matrix)**.** *Wir definieren die zu A gehörige* gramsche Matrix *als die Matrix A^TA. Wir definieren die zu A gehörige* gramsche Determinante *als* $\det(A^TA)$*, die Determinante der gramschen Matrix.*

Diese Matrix ist nach Jørgen Pedersen Gram benannt, siehe Abbildung 11.7.

Hilfssatz 11.24 (gramsche Determinante)**.** *(i) Es gilt* $\det(A^TA) \geq 0$.

(ii) Falls die Abbildung $\mathbb{R}^d \ni v \mapsto Av \in \mathbb{R}^n$ *injektiv ist, dann gilt* $\det(A^T A) > 0$.

Beweis: Das folgt aus dem Spektralsatz für symmetrische Matrizen. (Siehe lineare Algebra.)

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte C^1-Untermannigfaltigkeit der Dimension d mit Rand.

Proposition 11.25 (Integral einer Funktion über Untermannigfaltigkeit)**.** *Es gilt:*

(i) Es gibt ein $\ell \in \mathbb{N}_0$*, und für jedes* $j = 1, \dots, \ell$ *gibt es eine lokale* C^1*-Parametrisierung* (V_j, ψ_j) *von* M *und eine Jordan-messbare Menge* S_j *so, dass*

$$\begin{gathered} \overline{S_j} \subseteq V_j, \\ \psi_j(S_j) \cap \psi_k(S_k) = \emptyset, \quad \forall j \neq k, \\ \textstyle\bigcup_{j=1}^{\ell} \psi_j(S_j) = M. \end{gathered} \tag{11.14}$$

Seien jetzt $f \in C(M, \mathbb{R})$ *und* ℓ*,* $(\psi_j, S_j)_j := (V_j, \psi_j, S_j)_{j=1,\dots,\ell}$ *wie in (i). Wir definieren*

$$\begin{aligned} I\big(f, \psi_j, S_j\big) &:= I\big(f, (\psi_j, S_j)_j\big) \\ &:= \sum_{j=1}^{\ell} \int_{S_j} f \circ \psi_j \sqrt{\det\left((D\psi_j)^T D\psi_j\right)}\, dy.^{9} \end{aligned} \tag{11.15}$$

(ii) Die Zahl $I\big(f, \psi_j, S_j\big)$ *hängt nicht von* $(\psi_j, S_j)_j$ *ab.*

Der Beweis von (ii) beruht auf der Kettenregel und dem Produktsatz für die Determinante, welcher besagt, dass $\det(AB) = \det A \det B$, für alle $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Bemerkung. Gemäss Hilfssatz 11.24(i) ist $\det\left((D\psi_j)^T D\psi_j\right)$ nicht negativ. Darum existiert die Quadratwurzel dieser Zahl (und ist reell). Daher ist der Integrand auf der rechten Seite von (11.15) sinnvoll. Da dieser Integrand auf V_j stetig ist und S_j Jordan-messbar ist, ist der Integrand Riemann-integrierbar über S_j. Die rechte Seite von (11.15) ist daher sinnvoll.

Definition 11.26 (Integral über kompakte Untermannigfaltigkeit mit Rand)**.** *Für jedes* $f \in C(M, \mathbb{R})$ *definieren wir das* Riemann-Integral von f (über M) *als*

$$\int_M f\, dA := I\big(f, \psi_j, S_j\big),$$

[9] Wir identifizieren hier die Ableitung von ψ_j an der Stelle y, d. h. die lineare Abbildung $D\psi_j(y)$, mit der Jacobimatrix $J_{\psi_j}(y)$.

wobei die rechte Seite durch (11.15) *gegeben ist mit einer beliebigen Kollektion* $(\psi_j, S_j)_j$ *wie in Proposition 11.25((i)). Wir definieren das d-dimensionale Volumen von* M *als*

$$\mathrm{Vol}_d(M) := \int_M 1\, dA. \tag{11.16}$$

Bemerkung. Gemäss Proposition 11.25 ist dieses Integral wohldefiniert.

Beispiel 11.27. Wir berechnen das 1-dimensionale Volumen des Einheitskreises $M = S^1$, d. h. seine Länge, gemäss der Definition 11.26. Dazu setzen wir $\ell := 2$ und

$$V_1 :=]0, 2\pi[, \quad \psi_1 : V_1 \to \mathbb{R}^2,\ \psi_1(y) := \begin{pmatrix} \cos y \\ \sin y \end{pmatrix}, \quad S_1 := \left[\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3\pi}{2}\right],$$

$$V_2 :=]-\pi, \pi[, \quad \psi_2 : V_2 \to \mathbb{R}^2,\ \psi_2(y) := \begin{pmatrix} \cos y \\ \sin y \end{pmatrix}, \quad S_2 := \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[.$$

Für $j = 1, 2$ haben wir $D\psi_j(y) = \begin{pmatrix} -\sin y \\ \cos y \end{pmatrix} \cdot$, daher

$$D\psi_j(y)^T D\psi_j(y) = (-\sin y)^2 + (\cos y)^2 = 1,$$

$$\text{also} \quad \sqrt{\det\left(D\psi_j(y)^T D\psi_j(y)\right)} = 1. \tag{11.17}$$

Gemäss Definition 11.26 gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}_1(S^1) &= \int_{S^1} 1\, dA \\ &= I\big(1, \psi_j, S_j\big) \\ &= \sum_{j=1}^{2} \int_{S_j} 1 \cdot 1\, dy \qquad \text{(gemäss (11.15,11.17))} \\ &= |S_1| + |S_2| \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

Die Länge des Einheitskreises ist also 2π. Das stimmt mit dem überein, was wir in Beispiel 11.3 berechnet haben.

Bemerkungen. [Integral über kompakte Untermannigfaltigkeit mit Rand, geometrische Interpretation]

(i) Falls $d = n$, dann gilt

$$\sqrt{\det\left((D\psi_j)^T D\psi_j\right)} = \sqrt{\left|\det(D\psi_j)^T\right| \left|\det(D\psi_j)\right|} = \left|\det(D\psi_j)\right|.$$

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned}\int_M f\,dA &= \sum_{j=1}^{\ell} \int_{S_j} f\circ\psi_j \big|\det D\psi_j\big|\,dy \\ &= \sum_{j=1}^{\ell} \int_{\psi_j(S_j)} f\,dx \qquad \text{(gemäss Satz 10.25, Substitutionsregel)} \\ &= \int_M f(x)\,dx\end{aligned}$$

(gewöhnliches mehrdimensionales Riemann-Integral). Diese Rechnung ergibt für $d < n$ keinen Sinn, da $D\psi_j(y)$ eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{R}^n$ ist und daher nur dann eine Determinante besitzt, falls $d = n$.

(ii) Im Fall $d = 1$ stimmt das Integral über eine Untermannigfaltigkeit überein mit dem Kurvenintegral, siehe Proposition 11.28. Die Idee des Beweises davon ist wie folgt. Seien $M = C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine C^1-Kurve mit Rand und $f : C \to \mathbb{R}$ stetig. Wir betrachten den Fall, in dem es ein offenes Intervall V und eine globale C^1-Parametrisierung $\psi = x : \overline{V} \to C$ gibt. Dann gilt $Dx = \dot{x}$, darum

$$(Dx)^T Dx = \dot{x}^T\dot{x} = \|\dot{x}\|^2$$

und daher

$$\sqrt{\det\left((Dx)^T Dx\right)} = \|\dot{x}\|.$$

Daher gilt in diesem Fall, dass

$$\begin{aligned}\int_C f\,dA &= \int_{I:=\overline{V}} f\circ x\,\sqrt{\det\left((Dx)^T Dx\right)}\,dy \\ &= \int_I f\circ x\,\|\dot{x}\|\,dt \\ &= \int_C f\,ds.\end{aligned}$$

(Siehe Definition 11.2, Kurvenintegral. Strikt genommen haben wir die rechte Seite nur im Fall ohne Rand definiert, aber dieselbe Definition funktioniert auch mit Rand.)

(iii) Wir betrachten jetzt die allgemeine Situation. Intuitiv ist $\int_M f\,dA$ das $(d+1)$-dimensionale Volumen (mit Vorzeichen) des Gebietes in $\mathbb{R}^{n+1}$ zwischen $M \times \{0\}$ und dem Graphen von f. Um das verstehen, sei P ein Parallelepiped der Dimension $\leq d$ in $\mathbb{R}^n$, dass den Ursprung 0 enthält. Wir definieren das d-dimensionale Volumen von P als

$$\mathrm{Vol}_d(P) := \mathrm{Vol}_d(O(P)), \tag{11.18}$$

wobei $O : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine orthogonale Transformation ist so, dass $O(P) \subseteq \mathbb{R}^d \times \{0\}$, wobei wir $\mathbb{R}^d \times \{0\}$ mit $\mathbb{R}^d$ identifizieren. $\mathrm{Vol}_d(P)$ ist wohldefiniert, d. h., es gibt ein solches O, und die rechte Seite von (11.18) hängt nicht von O ab.

Betrachten wir zum Beispiel den Fall, dass $d = 1$, $n = 3$ und P ein 1-dimensionales Parallelepiped, also eine Strecke, in $\mathbb{R}^3$ ist. Dann können wir O als eine Drehung in $\mathbb{R}^3$ wählen, die P parallel zur x^1-Achse ausrichtet. $\mathrm{Vol}_1(P)$ ist in diesem Fall die Länge der Strecke.

Die Definition (11.18) ist dadurch motiviert, dass das d-dimensionale Volumen einer Menge intuitiv gleich bleibt, wenn wir die Menge drehen.

Sei jetzt $\Psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung und $Q \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Quader. Das Bild von Q unter Ψ ist ein Parallelepiped in $\mathbb{R}^n$ der Dimension $\leq d$.

Behauptung. *Es gilt*

$$\mathrm{Vol}_d(\Psi(Q)) = \sqrt{\det(\Psi^T \Psi)}\, \mathrm{Vol}_d(Q). \tag{11.19}$$

Beweis der Behauptung: Wir wählen eine orthogonale Transformation $O : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ so, dass

$$O \operatorname{im} \Psi \subseteq \mathbb{R}^d \times \{0\}.$$

Gemäss (11.18) gilt

$$\mathrm{Vol}_d(\Psi(Q)) = \mathrm{Vol}_d\big(O(\Psi(Q))\big). \tag{11.20}$$

Wir schreiben

$$O\Psi = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix},$$

mit $B \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. Es gilt $O(\Psi(Q)) = B(Q) \times \{0\}$ und daher

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}_d\big(O(\Psi(Q))\big) &= \mathrm{Vol}_d(B(Q)) \\ &= |\det B|\, \mathrm{Vol}_d(Q) \qquad \text{(Transformationssatz, Korollar 10.30).} \end{aligned} \tag{11.21}$$

Es gilt[10]

$$B^T B = \Psi^T O^T O \Psi = \Psi^T \Psi, \tag{11.22}$$

$$\begin{aligned} |\det B| &= \sqrt{(\det B)^2} \\ &= \sqrt{\det B^T B} \\ &= \sqrt{\det(\Psi^T \Psi)} \qquad \text{(wegen (11.22)).} \end{aligned} \tag{11.23}$$

[10]Hierbei fassen wir B etc. als Matrizen auf.

(Gemäss Hilfssatz 11.24(i) ist $\det(B^T B) \geq 0$ und daher die Wurzel dieser Zahl eine wohldefinierte reelle Zahl.) Indem wir (11.20,11.21,11.23) kombinieren, erhalten wir

$$\mathrm{Vol}_d(\Psi(Q)) = \sqrt{\det(\Psi^T \Psi)}\,\mathrm{Vol}_d(Q),$$

d. h. die Gleichheit (11.19). Das beweist die Behauptung. □

Sei jetzt $y_0 \in V_j$. Wir definieren

$$\Phi_{j,y_0} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n, \qquad \Phi_{j,y_0}(y) := D\psi_j(y_0)(y - y_0) + \psi_j(y_0). \tag{11.24}$$

Das ist die beste affine Näherung von ψ_j um y_0. (Vergleiche mit (8.9).) Heuristisch bildet ψ_j einen infinitesimalen Quader Q mit Mittelpunkt y_0 auf das infinitesimale d-dimensionale Parallelepiped $\psi_j(Q) = \Phi_{y_0}(Q)$ in $\mathbb{R}^n$ ab. Wir schreiben:

$$\begin{aligned} dy &:= \mathrm{Vol}_d(Q), \\ dA &:= \mathrm{Vol}_d(\psi_j(Q)) = \mathrm{Vol}_d\left(\Phi_{j,y_0}(Q)\right). \end{aligned}$$

(Falls wir dy^i für die Länge der i-ten Seite von Q schreiben, dann gilt, dass $dy = dy^1 \cdots dy^n$.) Gemäss (11.24,11.19) mit $\Psi := D\psi_j(y_0)$ gilt heuristisch

$$dA = \sqrt{\det\left(D\psi_j(y_0)^T D\psi_j(y_0)\right)}dy. \tag{11.25}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \int_M f\,dA &= \sum_j \int_{S_j} (f \circ \psi_j)\sqrt{\det\left((D\psi_j)^T D\psi_j\right)}dy \qquad \text{(gemäss Definition 11.26)} \\ &= \sum_j \sum_{y_0 \in S_j} f(\psi_j(y_0))\sqrt{\det\left(D\psi_j(y_0)^T D\psi_j(y_0)\right)}dy \qquad \text{(heuristisch)} \\ &= \sum_{x_0 \in M} f(x_0)dA \qquad \text{(heuristisch gemäss (11.25) mit } x_0 = \psi_j(y_0)), \end{aligned}$$

und das ist intuitiv das $(d+1)$-dimensionale Volumen (mit Vorzeichen) des Gebietes in $\mathbb{R}^{n+1}$ zwischen $M \times \{0\}$ und dem Graphen von f.

(iv) Im Buch [DK04b] wird das Integral einer Funktion über eine Untermannigfaltigkeit mit Hilfe einer Zerlegung der eins definiert, siehe [DK04b, Definition 7.1.2, p. 490]. Diese Definition ist äquivalent zur Definition 11.26. In konkreten Beispielen ist Definition 11.26 allerdings einfacher anzuwenden.

(v) Im Buch [DK04b] wird für $\int_M f\,dA$ die Notation $\int_M f(x)d_d x$ verwendet, siehe [DK04b, Definition 7.3.1, p. 495].

Im Fall $d = 1$ stimmt das Integral über eine Untermannigfaltigkeit mit dem Kurvenintegral überein:

Proposition 11.28 (Kurvenintegral, Integral über Untermannigfaltigkeit)**.** *Seien C eine kompakte C^1-Kurve in $\mathbb{R}^n$ (ohne Rand), $f : C \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $\big(I_j = [a_j, b_j], x_j\big)_{j=1,\dots,\ell}$ wie in Definition 11.2 (Kurvenintegral). Dann gibt es eine Kollektion $\big(V_j, \psi_j, S_j\big)$ wie in Proposition 11.25((i)) (Integral über Untermannigfaltigkeit) mit $M = C$ so, dass*

$$I\big(f, (I_j, x_j)_j\big) = I\big(f, (\psi_j, S_j)_j\big),$$

wobei die linke Seite wie in (11.1) *definiert ist und die rechte Seite wie in* (11.15)*.*

Die Idee des Beweises dieser Proposition wurde in Bemerkung 11.4(ii) erklärt.

Korollar 11.29 (Kurvenintegral)**.** *Das Kurvenintegral $\int_C f\,ds$ ist wohldefiniert, d. h., es hängt nicht von der Wahl der Kollektion $(I_j, x_j)_j$ ab.*

Beweis des Korollars 11.29: Gemäss Proposition 11.25(ii) (Integral über Untermannigfaltigkeit) hängt $I\big(f, \psi_j, S_j\big)$ nicht von der Wahl der Kollektion (ψ_j, S_j) ab. Gemäss Proposition 11.28 hängt $I\big(f, (I_j, x_j)_j\big)$ darum nicht von der Kollektion $(I_j, x_j)_j$ ab. Das beweist Korollar 11.29. □

11.5 Integral über parametrisierbare Untermannigfaltigkeit, zweidimensionaler Fall, Fluss eines Vektorfeldes durch Hyperfläche

Dieser Abschnitt entspricht [Stra, 8.6]. Für eine Funktion auf einer global parametrisierbaren Untermannigfaltigkeit können wir das Integral mit Hilfe einer globalen Parametrisierung berechnen. Das ist der Inhalt folgender Bemerkung.

Bemerkung 11.30. [Integral über parametrisierbare Untermannigfaltigkeit] Seien $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine d-dimensionale kompakte parametrisierbare C^1-Untermannigfaltigkeit, $\psi : \overline{V} \to M$ eine (globale) C^1-Parametrisierung und $f \in C(M, \mathbb{R})$. Es gilt

$$\int_M f\,dA = \int_{\overline{V}} f \circ \psi(y) \sqrt{\det\big(D\psi(y)^T D\psi(y)\big)}\,dy. \tag{11.26}$$

Das folgt aus der Tatsache, dass die Einschränkung $\psi|_V$ eine lokale innere Parametrisierung von M ist.

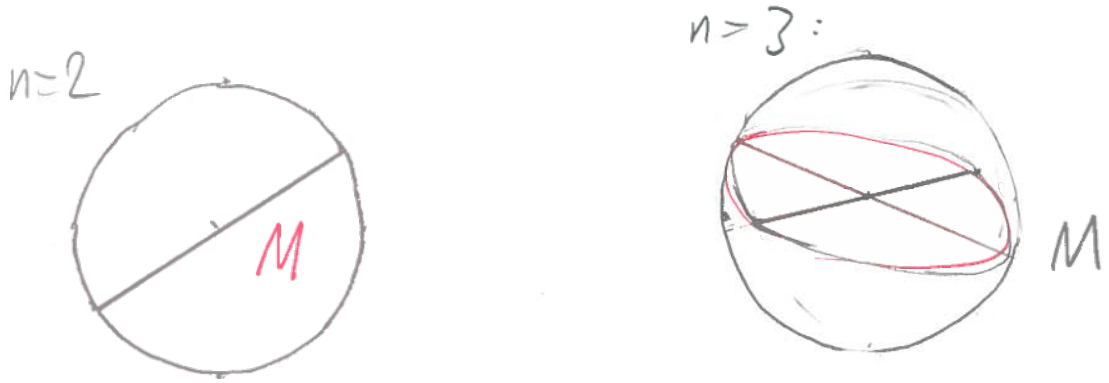


Abbildung 11.8: Durchschnitt eines d-dimensionalen Untervektorraumes mit einem Ball.

Im folgenden Beispiel wenden wir Bemerkung 11.30 an.

Beispiel 11.31. [Integral über Untervektorraum] Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ der Durchschnitt eines d-dimensionalen Untervektorraumes $W \subseteq \mathbb{R}^n$ mit dem abgeschlossenen Einheitsball $\overline{B}^n$, siehe Abbildung 11.8. Um das Volumen von M zu berechnen, wählen wir eine orthogonale Transformation $O : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ so, dass $O\big(\mathbb{R}^d \times \{0\}\big) = W$. (Überlegen Sie sich, dass es ein solches O gibt!) Wir definieren

$$\iota : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n, \quad \iota(y) := (y, 0), \quad \psi := O \circ \iota : \overline{B}^d \to \mathbb{R}^n.$$

Es gilt

$$M = \psi(\overline{B}^d),$$
$$D\psi(y) = O\iota, \Rightarrow h_\psi := \sqrt{\det\left(D\psi(y)^T D\psi(y)\right)} = \sqrt{\det\left(\iota^T O^T O \iota\right)} = 1.$$

Gemäss Bemerkung 11.30 gilt daher, dass

$$\mathrm{Vol}_d(M) = \int_M dA = \int_{\overline{B}^d} h_\psi \, dy = |\overline{B}^d|.$$

(Die rechte Seite wird in Übungsserie 5 berechnet.) Das stimmt mit unserer Intuition überein, dass das d-dimensionale Volumen gleich bleibt, wenn wir eine orthogonale Transformation auf M anwenden.

Im Fall $d = 2$ und $n = 3$ können wir das Integral über eine Fläche wie folgt berechnen.

Hilfssatz 11.32 (gramsche Determinante für eine 3×2-Matrix)**.** *Für jedes $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ gilt, dass*

$$\det(A^T A) = \|A_1 \times A_2\|^2,$$

wobei A_j die j-te Spalte von A bezeichnet.

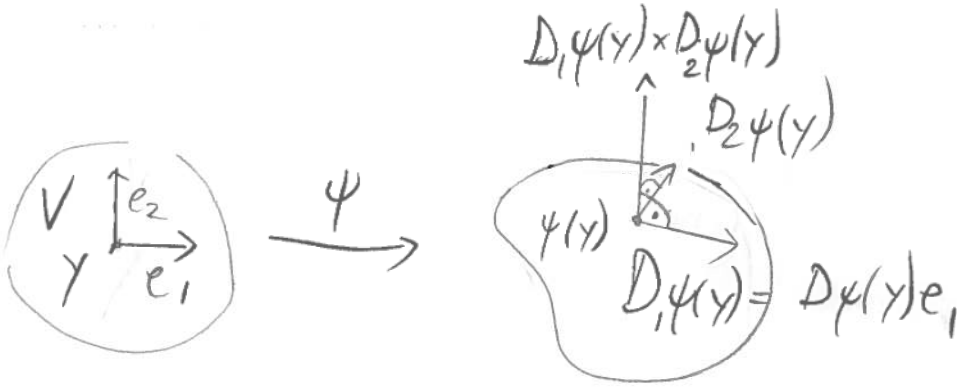


Abbildung 11.9: Der Vektor $D_1\psi(y) \times D_2\psi(y)$.

Beweis: Übungsserie 8

Bemerkung. Aus diesem Hilfssatz folgt, dass im Fall $d = 2$ und $n = 3$ gilt, dass

$$\sqrt{\det\big((D\psi)^T D\psi\big)} = \big\|D_1\psi \times D_2\psi\big\|, \tag{11.27}$$

siehe Abbildung 11.9.

Beispiel 11.33. [Flächeninhalt der Kugelkappe und der zweidimensionalen (Hemi-)Sphäre] Für $a > 0$ betrachten wir die Kugelkappe

$$\Sigma_a := \big\{x \in S^2 \,\big|\, x_3 \geq a\big\}.$$

Siehe Abbildung 11.6. Wir berechnen den Flächeninhalt von Σ_a. Dazu betrachten wir die globale glatte Parametrisierung von Σ_a gegeben durch

$$\psi : \overline{B}^2_{\sqrt{1-a^2}} \to \mathbb{R}^3, \quad \psi(y) := \big(y, \sqrt{1 - \|y\|^2}\big).$$

Gemäss Beispiel 11.20 (siehe (11.13)) gilt

$$\big\|D_1\psi(y) \times D_2\psi(y)\big\| = \frac{1}{\sqrt{1 - \|y\|^2}}. \tag{11.28}$$

Der Flächeninhalt von Σ_a ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
|\Sigma_a| &= \mathrm{Vol}_2(\Sigma_a) \\
&= \int_{\Sigma_a} 1\, dA \\
&= \int_{\overline{B}^2_{\sqrt{1-a^2}}} \frac{1}{\sqrt{1-\|y\|^2}}\, dy \qquad \text{(gemäss Bemerkung 11.30, (11.27,11.28))} \\
&= 2\pi \int_0^{\sqrt{1-a^2}} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} r\, dr \text{ (gemäss Korollar 10.27, Integral einer drehinvarianten Funktion)} \\
&= -2\pi\sqrt{1-r^2}\Big|_{r=0}^{r=\sqrt{1-a^2}} \\
&= 2\pi(1-a).
\end{aligned}$$

Im Limes $a \to 0$ erhalten wir den Flächeninhalt der oberen abgeschlossenen Hemisphäre $\Sigma_+ = \big\{x \in S^2 \,\big|\, x_3 \geq 0\big\}$, nämlich

$$|\Sigma_+| = \lim_{a\to 0} |\Sigma_a| = \lim_{a\to 0} 2\pi(1-a) = 2\pi.$$

Das ist gleich dem Flächeninhalt der unteren abgeschlossenen Hemisphäre $\Sigma_- := \big\{x \in S^2 \,\big|\, x_3 \leq 0\big\}$, da diese durch Drehung aus Σ_+ hervorgeht. Die Sphäre S^2 ist die Vereinigung der beiden Hemisphären $\Sigma_\pm$. Der Durchschnitt dieser Hemisphären ist der Äquator $\big\{x \in S^2 \,\big|\, x_3 = 0\big\}$, welcher Flächeninhalt gleich 0 besitzt. Daher beträgt der Flächeninhalt der Sphäre S^2

$$|S^2| = \mathrm{Vol}_2(S^2) = |\Sigma_+| + |\Sigma_-| = 2 \cdot 2\pi = 4\pi.$$

Bemerkung. Heuristisch gilt im Fall $n = 3$ und $d = 2$ gemäss Definition 11.26 und (11.25,11.27) mit $\psi_j = \psi$, dass

$$dA = \big\|D_1\psi \times D_2\psi\big\|\, dy.$$

Wir können das als den Flächeninhalt eines "infinitesimalen Flächenstücks" auffassen. Der Ausdruck $\big\|D_1\psi \times D_2\psi\big\|$ ist der Flächeninhalt des Parallelogramms, das durch $D_1\psi$ und $D_2\psi$ aufgespannt wird.

Seien $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte C^1-Hyperfläche mit Rand, $X \in C(M, \mathbb{R}^n)$ ein Vektorfeld und $\nu : M \to \mathbb{R}^n$ eine Koorientierung.

Definition 11.34 (Fluss durch Hyperfläche)**.** *Wir definieren den* Fluss von X durch M bezüglich ν *als das Integral*

$$\int_{M,\nu} X \cdot d\boldsymbol{A} := \int_M X \cdot \nu\, dA, \tag{11.29}$$

wobei die rechte Seite wie in Definition 11.26 (Integral über eine kompakte Unternannigfaltigkeit) definiert ist.

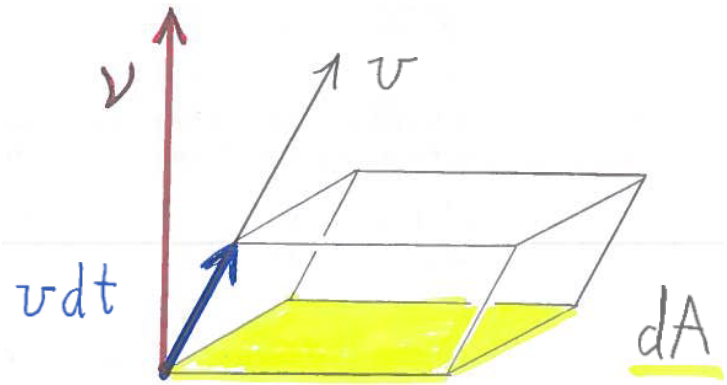


Abbildung 11.10: ρ mal das Volumen des Parallelepipeds, das durch ein infinitesimales Flächenstück mit Flächeninhalt dA und durch vdt aufgespannt wird, ist gleich der Anzahl Teilchen, die in der Zeitspanne dt durch das infinitesimale Flächenstück fliessen. Diese Anzahl ist gleich $\rho(v\,dt)\cdot\nu\,dA = X\cdot\nu\,dA\,dt = X\cdot d\mathbf{A}\,dt$.

Bemerkungen 11.35. [Fluss durch eine Hyperfläche]

(i) Heuristisch ist $d\mathbf{A} = \nu dA$ ein infinitesimaler Normalenvektor und

$$\int_{M,\nu} X\cdot d\mathbf{A} = \sum_{x\in M} X\cdot d\mathbf{A}. \tag{11.30}$$

(ii) Im **Fall** $n=3$ heisst der Fluss $\int_{M,\nu} X\cdot d\mathbf{A}$ auch das *(Ober-)Flächenintegral* von X durch $\Sigma = M$.

(iii) Der Name *Fluss* wird durch die folgende anschauliche strömungsmechanische Interpretation motiviert. Wir betrachten eine stationär[11] strömende Flüssigkeit. Wir schreiben $\rho(x)$ für die Teilchenzahldichte[12] der Flüssigkeit im Punkt $x\in\mathbb{R}^3$ und $v(x)$ für ihren Geschwindigkeitsvektor im Punkt x. Das Produkt von ρ und v ist ein Vektorfeld $X := \rho v : \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$. Der Fluss von X durch eine Fläche $\Sigma\subseteq\mathbb{R}^3$ ist die Anzahl Teilchen der Flüssigkeit, die pro Zeitspanne durch Σ fliessen.[13] Das folgt aus der heuristischen Gleichheit (11.30) und Abbildung 11.10.

(iv) Der Fluss $\int_{M,\nu} X\cdot d\mathbf{A}$ eines Vektorfeldes X *durch eine Hyperfläche* M wie in Definition 11.34 unterscheidet sich vom *Fluss* φ_X, den wir in Bemerkung 8.48 kennengelernt hatten. Im Englischen wird diese Unterscheidung auch sprachlich gemacht. $\int_{M,\nu} X\cdot d\mathbf{A}$ wird dort nämlich *flux* und φ_X *flow* genannt.

[11] Das bedeutet, dass ihre Geschwindigkeit in jedem Punkt zeitlich konstant bleibt.
[12] Diese Grösse wird auch *Teilchendichte* genannt.
[13] Die Einheit dieses Flusses ist $\sec^{-1}$.

(v) Falls (V, ψ) eine globale C^1-Parametrisierung von Σ ist so, dass (11.11) gilt, dann gilt

$$\int_{\Sigma,\nu} X \cdot d\mathbf{A} = \int_{\overline{V}} (X \circ \psi) \cdot \big(D_1\psi \times D_2\psi\big)\, dy. \tag{11.31}$$

Das folgt aus Bemerkung 11.30 (Integral über parametrisierbare Untermannigfaltigkeit) und (11.27).

Beispiel 11.36. [Fluss durch Kugelkappe] Für $a > 0$ betrachten wir die Kugelkappe

$$\Sigma_a := \big\{x \in S^2 \,\big|\, x_3 \geq a\big\}$$

und die Koorientierung ν von Σ_a und das Vektorfeld X auf Σ_a gegeben durch

$$\nu : \Sigma_a \to \mathbb{R}^3,\ \nu(x) := x, \qquad X \equiv e_3.$$

Frage:

$$\int_{\Sigma_a,\nu} X \cdot d\mathbf{A} = ?$$

Um diese Frage zu beantworten, betrachten wir die globale Parametrisierung von Σ_a gegeben durch

$$\psi : \overline{B}^2_{\sqrt{1-a^2}} \to \mathbb{R}^3, \quad \psi(y) := \big(y, \sqrt{1 - \|y\|^2}\big).$$

Gemäss Beispiel 11.20 (siehe (11.12)) gilt

$$D_1\psi(y) \times D_2\psi(y) = \begin{pmatrix} \dfrac{y}{\sqrt{1-\|y\|^2}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

und stimmt die Koorientierung von Σ_a induziert durch ψ mit ν überein. Gemäss (11.31) folgt daraus, dass

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_a,\nu} X \cdot d\mathbf{A} &= \int_{B^2_{\sqrt{1-a^2}}} e_3 \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{y}{\sqrt{1-\|y\|^2}} \\ 1 \end{pmatrix} dy \\ &= \int_{B^2_{\sqrt{1-a^2}}} 1\, dy \\ &= \pi(1 - a^2). \end{aligned} \tag{11.32}$$

Indem wir den Grenzwert für $a \to 0$ nehmen, erhalten wir daraus:

$$\text{Fluss von } X \text{ durch die obere Hemisphäre } \Sigma_0 \ = \int_{\Sigma_0,\nu} X \cdot d\mathbf{A} = \pi.$$

11.6 Satz von Stokes, Anwendung: Maxwellgleichung, faradaysches Induktionsgesetz der Elektrodynamik

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96b, 6.4] und [Stra, 8.7]. Der Satz von Stokes besagt, dass der Fluss der Rotation eines Vektorfeldes über eine kompakte Fläche in $\mathbb{R}^3$ gleich dem Integral des Vektorfeldes über den Rand der Fläche ist. Erinnerung an Definition 8.47(ii): Seien $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und X ein differenzierbares Vektorfeld auf U. Erinnerung an Definition 8.47: Die *Rotation von* X ist das Vektorfeld

$$\vec{\mathrm{rot}} X := \nabla \times X := \begin{pmatrix} D_2X^3 - D_3X^2 \\ D_3X^1 - D_1X^3 \\ D_1X^2 - D_2X^1 \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}^3.$$

Beispiel 11.37. [Rotation] Wir betrachten

$$X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad X(x) := \frac{1}{2}\big(-x_2, x_1, 0\big).$$

Es gilt

$$\nabla \times X(x) \equiv (0, 0, 1) = e_3.$$

Bemerkung. Für eine Motivation des Namens *Rotation* siehe die Bemerkungen 8.50.

Das Hauptresultat dieses Abschnitts ist folgender Satz.

Satz 11.38 (Stokes)**.** *Seien $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ eine kompakte C^2-Fläche, $\nu : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ eine Koorientierung, $U \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene Umgebung von Σ und $X \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$. Dann gilt, dass*

$$\int_{\Sigma,\nu} (\nabla \times X) \cdot d\boldsymbol{A} = \int_{\Sigma} (\nabla \times X) \cdot \nu \, dA = \int_{\partial\Sigma,T} X \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{\partial\Sigma} X \cdot T \, ds, \tag{11.33}$$

wobei T die durch ν induzierte Orientierung von $\partial\Sigma$ ist.

Abbildung 11.11 verdeutlicht diesen Satz. In Worten besagt er: Der Fluss der Rotation eines Vektorfeldes durch eine koorientierte Fläche ist gleich dem Kurvenintegral des Vektorfeldes über den Rand der Fläche.

Beweis: [Stra, Satz 8.7.1, S. 221] oder [DK04b, Theorem 8.4.4, p. 560]

Bemerkungen.

- Der Satz von Stokes kann aus dem Satz von Green (Satz 11.12) hergeleitet werden, falls Σ global parametrisierbar ist.

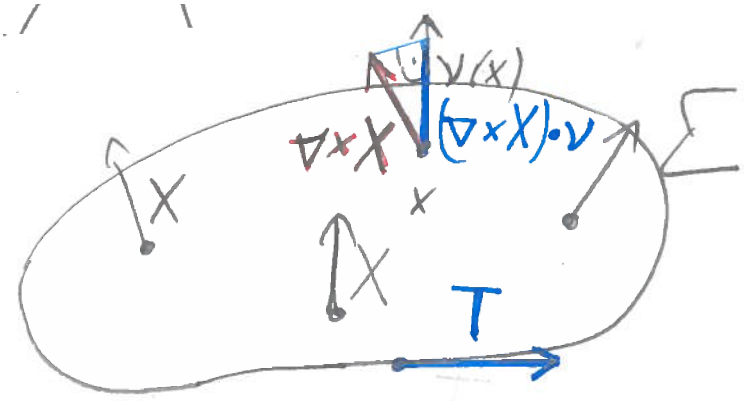


Abbildung 11.11: Satz von Stokes.

- Der Satz von Stokes besitzt wichtige Anwendungen in der Physik, insbesondere in der Strömungslehre und in der Elektrodynamik. Er wird zum Beispiel verwendet, um zu zeigen, dass das faradaysche Induktionsgesetz zu einer der vier Maxwellgleichungen äquivalent ist. (Siehe Beispiel 11.40 und Übungsserie 9.) Dieses Gesetz besagt, dass ein sich ändernder magnetischer Fluss in einer geschlossenen Kurve im Raum eine elektrische Spannung induziert, die gleich der zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses durch die von der Kurve eingeschlossene Fläche ist.[14] (Siehe [DK04b, Exercise 8.26 (iii) (Faraday's law), p. 748].)

- Der Satz von Green 11.12 ist der Spezialfall des Satzes von Stokes, in dem $\Sigma = \overline{V} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

- Der Satz von Stokes wurde durch William Thomson = Lord Kelvin gefunden. (Siehe Abbildung 11.12.) Er erzählte George Stokes davon. (Siehe Abbildung 11.13). Stokes stellte den Satz als ein Problem im *Smith's Prize exam* an der Universität Cambridge. (Siehe Abbildung 11.14.)

Beispiel 11.39. [Fluss durch Kugelkappe mittels des Satzes von Stokes]Sei $a > 0$. Wir betrachten

$$\Sigma := \left\{x \in S^2 \,\middle|\, x_3 \geq a\right\}, \quad \nu : \Sigma \to \mathbb{R}^3, \quad \nu(x) := x.$$

Im Beispiel 11.36 berechneten wir den Fluss

$$\int_{\Sigma,\nu} e_3 \cdot d\mathbf{A}$$

[14]Die Spannung ist dieser Änderung entgegengerichtet.

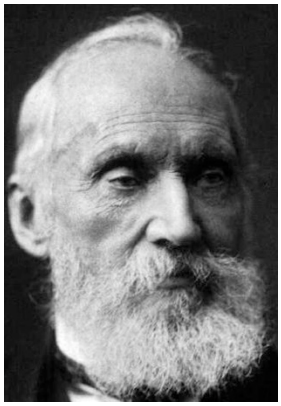


Abbildung 11.12: William Thomson = Lord Kelvin, britischer Physiker und Ingenieur, 1824–1907.

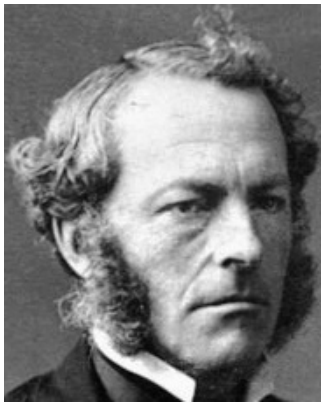


Abbildung 11.13: George Stokes, irischer Mathematiker und Physiker, 1819–1903.

8. If X, Y, Z be functions of the rectangular co-ordinates x, y, z, dS an element of any limited surface, l, m, n the cosines of the inclinations of the normal at dS to the axes, ds an element of the bounding line, shew that

$$\iint \left\{ l\left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}\right) + m\left(\frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}\right) + n\left(\frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}\right) \right\} dS$$
$$= \int \left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds} \right) ds,$$

the differential coefficients of X, Y, Z being partial, and the single integral being taken all round the perimeter of the surface*.

Abbildung 11.14: Die von Stokes gestellte Aufgabe zum Satz von Stokes im *Smith's Prize exam* des Jahres 1854.

mittels der Definition. Wir berechnen diesen Fluss noch einmal, mittels des Satzes von Stokes. Dazu definieren wir

$$X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad X(x) := \frac{1}{2}\big(-x_2, x_1, 0\big),$$
$$T : \partial\Sigma \to \mathbb{R}^3, \quad T(x) = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\big(-x_2, x_1, 0\big),$$

wie in den Beispielen 11.37 und 11.23. Gemäss Satz 11.38 (Stokes) und den Beispielen

11.37 (Rotation) und 11.23 (induzierte Orientierung) gilt

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma,\nu} e_3 \cdot d\mathbf{A} &= \int_{\Sigma,\nu} (\nabla \times X) \cdot d\mathbf{A} \\ &= \int_{\partial\Sigma,T} X \cdot d\mathbf{s} \\ &= \int_{\partial\Sigma} X \cdot T \, ds \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1-a^2}} \int_{S^1_{\sqrt{1-a^2}}\times\{a\}} \left((-x_2)^2 + x_1^2\right) ds \\ &= \frac{(1-a^2)2\pi\sqrt{1-a^2}}{2\sqrt{1-a^2}} \\ &= \pi(1-a^2).\end{aligned}$$

Das stimmt mit unserer Berechnung in Beispiel 11.36 überein.

Bemerkung. In diesem Beispiel ersparte uns der Satz von Stokes Rechenarbeit.

Im folgenden Beispiel wenden wir den Satz von Stokes an, um aus einer der vier Maxwellgleichungen der Elektrodynamik das faradaysche Induktionsgesetz herzuleiten.

Beispiel 11.40. [Maxwellgleichung, faradaysches Induktionsgesetz, Satz von Stokes] Wir betrachten das elektrische Feld $\mathbf{E}$ und das magnetische Feld $\mathbf{B}$ als Funktionen der Zeit $t \in \mathbb{R}$ und des Ortes $x \in \mathbb{R}^3$. Eine der vier Maxwellgleichungen besagt, dass

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{11.34}$$

Diese Gleichung ist nach James Clerk Maxwell benannt, siehe Abbildung 12.4. Das faradaysche Induktionsgesetz besagt, dass ein sich ändernder magnetischer Fluss in einer geschlossenen Kurve im Raum eine elektrische Spannung induziert, die gleich der zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses durch die von der Kurve eingeschlossene Fläche ist.[15] Um das zu präzisieren, nehmen wir an, dass $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ von der Klasse C^1 sind. Wir fixieren eine kompakte C^2-Fläche Σ in $\mathbb{R}^3$ und eine Koorientierung ν von Σ. Wir schreiben T für die durch ν induzierte Orientierung des Randes $\partial\Sigma$. Das faradaysche Induktionsgesetz besagt, dass

$$\text{(Spannung längs der Kurve } C := \partial\Sigma) \; = \int_{C,T} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \int_{\Sigma,\nu} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}. \tag{11.35}$$

[15] Die Spannung ist dieser Änderung entgegengerichtet.



Abbildung 11.15: James Clerk Maxwell, 1831–1879, schottischer Physiker.

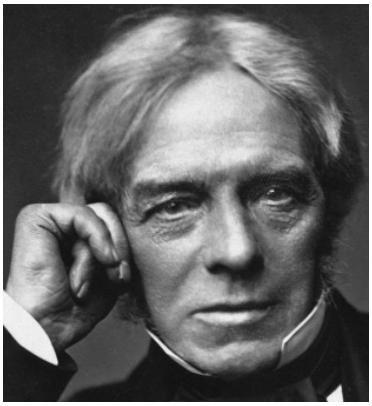


Abbildung 11.16: Michael Faraday, 1791–1867, englischer Experimentalphysiker.

Dieses Gesetz ist nach Michael Faraday benannt, siehe Abbildung 11.16. Wir leiten dieses Gesetz aus der Maxwellgleichung (11.34) mittels des Satzes von Stokes her: Es gilt

$$\begin{aligned}\int_{C,T} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} &= \int_{\Sigma,\nu} (\nabla\times\mathbf{E})\cdot d\mathbf{A} \qquad \text{(gemäss Satz 11.38, Stokes)}\\ &= -\int_{\Sigma,\nu} \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{A} \qquad \text{(gemäss der Maxwellgleichung (11.34))}\\ &= -\frac{d}{dt}\int_{\Sigma,\nu} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A}.\end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit folgt aus dem Satz von Lebesgue über dominierte Konvergenz. Dieser Satz gehört zur sogenannten *Masstheorie*.

Das zeigt das faradaysche Induktionsgesetz (11.35). Das faradaysche Induktionsgesetz ist also die *integrale* (oder *globale*) Form eines physikalischen Gesetzes, die Maxwellgleichung (11.34) ist die *differentielle*[16] Form davon.

Bemerkungen.

- Das Faradaysche Induktionsgesetz impliziert, dass ein sich ändernder magnetischer Fluss durch eine Fläche, die von einem Draht umspannt wird, einen Strom im Draht induziert. Dieses Prinzip bildet eine der Grundlagen für Elektromotoren und Generatoren.

- Für eine ausführliche Behandlung der Maxwellgleichungen und des faradayschen Induktionsgesetzes siehe die Vorlesung *Elektromagnetische Felder und Wellen*.

[16] d. h., mittels Ableitung formulierte

11.7 Divergenz, Satz von Gauß, strömungsmechanische Interpretation der Divergenz, Anwendung: Maxwellgleichung, Gaußsches Gesetz der Elektrostatik

Dieser Abschnitt entspricht [Bla96b, 6.2, 6.3] und [Stra, 8.8]. Der Satz von Gauß besagt, dass das Integral der Divergenz eines Vektorfeldes über ein C^1-Gebiet in $\mathbb{R}^n$ gleich dem Fluss des Vektorfeldes durch den Rand des Gebietes ist. Dieser Satz spielt eine wichtige Rolle in der Physik, zum Beispiel in der Strömungslehre und der Elektrostatik. Mit Hilfe dieses Satzes werden wir das n-dimensionale Volumen der Sphäre S^n berechnen. Um den Satz zu formulieren, brauchen wir Folgendes. Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein offenes C^1-Gebiet und X ein C^1-Vektorfeld auf $\overline{U}$.

Definition 11.41. *Wir definieren die* Divergenz *(oder* Quellendichte*) von X als die Funktion*

$$\operatorname{div} X := \nabla \cdot X := \sum_{i=1}^{n} D_i X^i.$$

Bemerkung. Formal ist $\nabla \cdot X$ das Standardskalarprodukt von $\nabla = \big(D_1, \ldots, D_n\big)$ mit X. Das ist der Grund für die Notation $\nabla \cdot X$.

Beispiel 11.42. [Divergenz] Wir betrachten das Euler-Vektorfeld

$$X := \mathrm{id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad X(x) := x.$$

Die Divergenz von X ist gegeben durch

$$\nabla \cdot X = \sum_{i=1}^{n} D_i x_i \equiv n.$$

Definition 11.43 (Koorientierung des Randes)**.** *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein C^1-Gebiet. Wir definieren die* nach aussen weisende Koorientierung[17] *von ∂U als die Abbildung*

$$\nu : \partial U \to \mathbb{R}^n, \qquad \nu(x_0) := \frac{\nabla g(x_0)}{\|\nabla g(x_0)\|}, \tag{11.36}$$

wobei $U' \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von x_0 ist und $g \in C^1(U', \mathbb{R})$ eine Submersion ist so, dass

$$U \cap U' = g^{-1}(]-\infty, 0[).$$

Bemerkungen.

- (U', g) existiert gemäss der Definition eines C^1-Gebietes.

[17] (oder das *nach aussen weisende Einheitsnormalvektorfeld*)



Abbildung 11.17: Carl Friedrich Gauß, deutscher Mathematiker, 1777–1855.

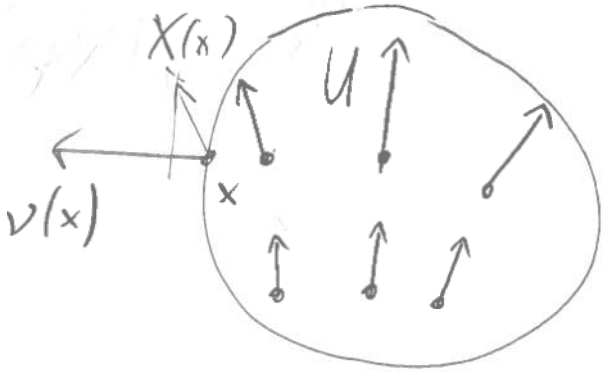


Abbildung 11.18: Satz von Gauß.

- $\nu(x_0)$ besitzt die Länge 1 und ist orthogonal zu $T_{x_0}\partial U$, da für jeden Vektor $v \in T_{x_0}\partial U$ gilt, dass

$$\langle \nu(x_0), v \rangle = \frac{Dg(x_0)v}{\|\nabla g(x_0)\|} = 0.$$

  Das folgt aus aus der Gleichheit $g^{-1}(0) = U' \cap \partial U$ und Satz 9.41 (Charakterisierung des Tangentialraumes).

- $\nu(x_0)$ hängt nicht von der Wahl von (U', g) ab.

Satz 11.44 (Divergenzsatz von Gauß)**.** *([DK04b, Theorem 7.8.5, p. 529]) Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1-Gebiet und $X \in C^1(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$. Dann ist das Integral der Divergenz von X über U gleich dem Fluss von X durch den Rand von U, d. h.*

$$\int_U \nabla \cdot X \, dx = \int_{\partial U,\nu} X \cdot d\boldsymbol{A} = \int_{\partial U} X \cdot \nu \, dA, \tag{11.37}$$

wobei ν die nach aussen weisende Koorientierung von ∂U ist.

Beweis: [DK04b, Theorem 7.8.5, p. 529] oder [Stra, Satz 8.8.1, S. 224] (Fall $n = 3$)

Dieser Satz ist nach Carl Friedrich Gauß benannt, siehe Abbildung 11.17. Abbildung 11.18 verdeutlicht den Satz.

Beispiel. [Satz von Gauß für $n = 1$, zweiter Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung]Wir betrachten den Fall $n = 1$ und schreiben $]a, b[:= U$, $f := X$. Dann

besagt Satz 11.44 (Gauß), dass

$$\begin{aligned}\int_a^b f'\,dx &= \int_U D_1X^1\,dx\\ &= \int_U \nabla\cdot X\,dx\\ &= \int_{\partial U} X\cdot\nu\,dA\\ &= f(b)\cdot 1 + f(a)\cdot(-1)\\ &= f(b)-f(a).\end{aligned}$$

Das ist der zweite Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Bemerkung. [Beweis des Satzes von Gauß] Der Beweis des Satzes von Gauß beruht auf dem zweiten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Die Idee ist, den Satz von Gauß mittels des Satzes von Fubini auf den eindimensionalen Fall zu reduzieren und dann den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung anzuwenden. Siehe den Beweis von [DK04b, Theorem 7.8.5, p. 529].

Beispiel 11.45. [Satz von Gauß und Volumen der Sphäre] Wir berechnen das $(n-1)$-dimensionale Volumen der Sphäre $S^{n-1} := S_1^{n-1}(0)$, indem wir den Satz von Gauß auf das Euler-Vektorfeld

$$X := \mathrm{id} : \overline{B}^n := \overline{B}_1^n(0) \to \mathbb{R}^n, \quad X(x) := x$$

anwenden. Die nach aussen weisende Koorientierung von $\partial B^n = S^{n-1}$ ist durch $\nu(x) = x$ gegeben. (Vergleichen Sie das mit Beispiel 11.18.) Es gilt, dass

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}_{n-1}(S^{n-1}) &= \int_{S^{n-1}} 1\,dA\\ &= \int_{S^{n-1}=\partial B^n} X\cdot\nu\,dA\\ &= \int_{B^n} \nabla\cdot X\,dx \qquad \text{(gemäss Satz 11.44, Gauß)}\\ &= \int_{B^n} n\,dx \qquad \text{(wegen Beispiel 11.42)}\\ &= n\,\mathrm{Vol}_n(B^n)\\ &= \begin{cases} \dfrac{2\pi^k}{(k-1)!}, & \text{falls } n=2k,\\ \dfrac{2\pi^k}{\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}}, & \text{falls } n=2k+1,\end{cases}\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt eine Aufgabe aus Übungsserie 7 (Volumen des Einheitsballs) verwendet haben. Insbesondere erhalten wir

$$\mathrm{Vol}_1(S^1) = \frac{2\pi^1}{(1-1)!} = 2\pi, \quad \mathrm{Vol}_2(S^2) = \frac{2\pi^1}{\frac{1}{2}} = 4\pi.$$

Das stimmt mit den Resultaten der Beispiele 11.3, 11.27 und 11.33 überein. Wir stellen fest, dass

$$\mathrm{Vol}_n(B^n) \to 0, \quad \mathrm{Vol}_n(S^n) \to 0, \quad \text{für } n \to \infty.$$

(Überlegen Sie sich das!)

Bemerkung 11.46. [strömungsmechanische Interpretation der Divergenz, Motivation für den Namen] Wegen des Satzes von Gauß besitzt die Divergenz folgende anschauliche strömungsmechanische Interpretation als die Anzahl Teilchen einer Flüssigkeit oder eines Gases, die pro Volumen und Zeitspanne aus einem "infinitesimalen Gebiet" herausfliessen und daher in verschiedene Richtungen *divergieren*. Um das zu verstehen, betrachten wir eine stationärströmende Flüssigkeit. (Vergleiche mit Bemerkung 11.35(iii).) Wir schreiben $\rho(x)$ für die Teilchenzahldichte der Flüssigkeit im Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ und $v(x)$ für ihren Geschwindigkeitsvektor im Punkt x. Das Produkt von ρ und v ist ein Vektorfeld $X := \rho v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Seien $x_0 \in \mathbb{R}^3$ und $r \in]0, \infty[$. Wir definieren $U_r := B_r^3(x_0)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|U_r|} \cdot \text{ Anzahl Teilchen, die insgesamt pro Zeitspanne aus } U_r \text{ herausströmen} \\
&= \frac{1}{|U_r|} \int_{\partial U_r} X \cdot d\mathbf{A} \qquad \text{(siehe Abbildung 11.10)} \\
&= \frac{1}{|U_r|} \int_{U_r} \nabla \cdot X \, dx \qquad \text{(gemäss Satz 11.44)} \\
&\to \nabla \cdot X(x_0) \qquad \text{für } r \to 0.
\end{aligned}$$

Der intuitive Grund für diese Konvergenz ist, dass die Werte von $\nabla \cdot X$ im Ball U_r "immer weniger von $\nabla \cdot X(x_0)$ abweichen", wenn $r > 0$ kleiner wird. Anschaulich gilt daher:

$$\begin{aligned}
&\nabla \cdot X(x_0) \qquad (11.38) \\
&= \text{Divergenz von } X = \rho v \text{ im Punkt } x_0 \\
&= \text{Anzahl Teilchen, die pro Volumen und Zeitspanne aus einem "infinitesimalen Ball" herausfliessen, also in verschiedene Richtungen } \textit{divergieren}
\end{aligned}$$

Das motiviert auch den Namen "Divergenz". Falls die Divergenz in x_0 positiv ist, dann strömt mehr Flüssigkeit oder Gas aus einem kleinen Ball um x_0 heraus als hinein. Das

passiert zum Beispiel, wenn sich Luft erwärmt. Wir können uns diese Divergenz von Teilchen am Beispiel des Euler-Vektorfeldes $X(x) := x$ und $x_0 = 0$ veranschaulichen. (Zeichnen Sie dieses Vektorfeld! Vergleichen Sie mit Beispiel 11.42!)

Wir nehmen jetzt an, dass die Flüssigkeit keine Quellen und Senken besitzt, d. h. nirgends entsteht oder verschwindet. Gemäss (11.38) gilt dann

$$\nabla \cdot (\rho v) = 0.$$

Des Weiteren nehmen wir an, dass die Flüssigkeit *inkompressibel* ist, d. h. nicht zusammengedrückt werden kann. Das bedeutet, dass ρ zeitlich und räumlich konstant ist. In diesem Fall gilt

$$\rho \nabla \cdot v = \nabla \cdot (\rho v) = 0, \qquad \text{also} \qquad \nabla \cdot v = 0.$$

Die Divergenz des Geschwindigkeitsvektorfeldes einer inkompressiblen quellfreien Flüssigkeit verschwindet also. Eine solche Flüssigkeit ist zum Beispiel in guter Näherung durch Wasser gegeben, in dem keine chemischen Reaktionen stattfinden. Die Gleichung $\nabla \cdot v = 0$ spielt in der Strömungslehre eine wichtige Rolle. Strömungslehre wird in den Vorlesungen des Studienganges RW *Fluiddynamik I* (4. Semester, Grundlagenfach) und *Fluiddynamik II* (5. Semester, Vertiefungsgebiet) behandelt.

Mit Hilfe des Satzes von Gauß sind wir jetzt im Stande, Satz 11.12 (Green) zu beweisen.

Beweis des Satzes 11.12 (Green): Seien U, X wie in diesem Satz vorausgesetzt. Wir bezeichnen mit $T : \partial U \to \mathbb{R}^2$ die positive Orientierung des Randes ∂U und mit $\nu : \partial U \to \mathbb{R}^2$ die nach aussen weisende Koorientierung. Für jedes $x \in \partial U$ ist $\nu(x)$ gleich dem um $\frac{\pi}{2}$ im Uhrzeigersinn gedrehten Vektor $T(x)$, d. h.

$$\nu = (T^2, -T^1). \tag{11.39}$$

Das folgt aus den Definitionen von T und ν mit Hilfe einer Submersion $g : U' \to \mathbb{R}$, die U lokal beschreibt. (Überlegen Sie sich das!) Wir definieren

$$Y := (X^2, -X^1) : \overline{U} \to \mathbb{R}^2.$$

Das ist X um $\frac{\pi}{2}$ im Uhrzeigersinn gedreht. Y ist ein C^1-Vektorfeld mit Divergenz

$$\nabla \cdot Y = D_1 X^2 - D_2 X^1 = \operatorname{rot} X.$$

Aus Satz 11.44 (Gauß) folgt daher, dass

$$\begin{aligned}\int_U \operatorname{rot} X\, dx &= \int_U \nabla \cdot Y\, dx \\ &= \int_{\partial U} Y \cdot \nu\, ds \\ &= \int_{\partial U} \big(X^2 T^2 - X^1(-T^1)\big)\, ds \qquad \text{(wegen (11.39))} \\ &= \int_{\partial U} X \cdot T\, ds,\end{aligned}$$

wie behauptet. Das beweist Satz 11.12. □

Im folgenden Beispiel wenden wir den Satz von Gauß an, um aus einer der vier Maxwellgleichungen der Elektrodynamik das Gaußsche Gesetz herzuleiten.

Beispiel 11.47. [Maxwellgleichung, Gaußsches Gesetz, Satz von Gauß] Wir betrachten das elektrische Feld $\mathbf{E}$ und die elektrische Ladungsdichte ρ als Funktionen des Ortes $x \in \mathbb{R}^3$. Wir schreiben

$\varepsilon_0 :=$ elektrische Feldkonstante $\approx 8.9 \cdot 10^{-12}\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{m}^{-3}\mathrm{sec}^4\mathrm{A}^2$

Eine der vier Maxwellgleichungen besagt, dass

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{11.40}$$

Das *Gaußsche Gesetz* besagt, dass der Fluss des elektrischen Feldes über den Rand eines Gebietes proportional zur Ladung im Gebiet ist. Um das zu präzisieren, nehmen wir an, dass $\mathbf{E}$ von der Klasse C^1 ist. Wir fixieren ein beschränktes C^1-Gebiet $U \subseteq \mathbb{R}^3$. Wir schreiben $\nu : \partial U \to \mathbb{R}^3$ für die nach aussen weisende Koorientierung des Randes ∂U und

$Q :=$ elektrische Ladung im Gebiet U.

Das Gaußsche Gesetz besagt:

$$\text{Fluss des elektrischen Feldes durch den Rand } \partial U \;= \int_{\partial U,\nu} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}. \tag{11.41}$$

Wir leiten dieses Gesetz aus der Maxwellgleichung (12.11) mittels des Satzes von Gauß

her: Es gilt

$$\begin{aligned}\int_{\partial U,\nu} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} &= \int_U \nabla\cdot\mathbf{E}\,dx \qquad \text{(gemäss Satz 11.44, Gauß)}\\ &= \frac{1}{\varepsilon_0}\int_U \rho\,dx \qquad \text{(gemäss der Maxwellgleichung (12.11))}\\ &= \frac{Q}{\varepsilon_0}.\end{aligned}$$

Das zeigt das Gaußsche Gesetz (11.41).

Das Gaußsche Gesetz ist also die *integrale* Form eines physikalischen Gesetzes, die Maxwellgleichung (12.11) ist die *differentielle* Form davon. Diese Gleichung wird in der Vorlesung *Elektromagnetische Felder und Wellen* ausführlich behandelt (ITET: 4. Semester, RW: Wahlfach, 6. Semester).

Kapitel 12

Ausblick auf Analysis 3: partielle Differentialgleichungen, Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik und Wellengleichung

12.1 Einleitung

In diesen letzten Vorlesungsstunden möchte ich Ihnen einen Ausblick auf Analysis 3 geben, worin partielle Differentialgleichungen behandelt werden. Grob gesagt, ist eine *partielle Differentialgleichung (PDG)* eine Gleichung für eine gesuchte Funktion, in der die Funktion und ihre partiellen Ableitungen (auch höherer Ordnung) auftreten. Solche Gleichungen beschreiben zahlreiche physikalische und chemische Gesetze. Dabei spielt die gesuchte Funktion die Rolle einer physikalischen oder chemischen Grösse, die vom Ort und manchmal von der Zeit abhängt.

Ein Beispiel aus der Physik ist die **Wellengleichung**, die unter anderem die Ausbreitung von Schallwellen und elektromagnetischen Wellen beschreibt. (Siehe die Vorlesungen *Physik I* (ITET, RW) und *Elektromagnetische Felder und Wellen* (ITET: 4. Semester, RW: Wahlfach, 6. Semester). Ein weiteres Beispiel ist die **Diffusionsgleichung**, die beschreibt, wie sich die räumliche Verteilung einer Stoffmengenkonzentrationen zeitlich entwickelt. Die **Schrödingergleichung** beschreibt die Zeitentwicklung eines quantenmechanischen Systems. (Siehe die Vorlesung *Physics II* (ITET).)

Die **Maxwell-Gleichungen** sind ein *System* partieller Differentialgleichungen, welche die Zeitentwicklung des elektrischen und des magnetischen Feldes beschreiben. (Siehe Abschnitt 12.4.)

Ein Ziel der Theorie der partiellen Differentialgleichungen ist es, eine gegebene Differentialgleichung zu lösen. Im besten Fall wird die Lösung durch eine Formel gegeben. Ein Ziel der Vorlesung Analysis 3 ist es, solche Formeln für die Wellengleichung, die Diffusionsgleichung und die Laplace-Gleichung (siehe Abschnitt 12.3) zu behandeln. Ein weiteres Ziel ist es, Eigenschaften der Lösungen einer gegebenen PDG zu beschreiben. Zum Beispiel konvergiert die Lösung der Diffusionsgleichung bei isolierenden Randbedingungen gegen den Mittelwert der Anfangsbedingung, wenn die Zeit gegen unendlich geht. (Die Lösung gibt die zeitliche Entwicklung der Stoffmengenkonzentration einer diffundierenden Substanz an. Die Anfangsbedingung gibt die Konzentration zum Beginnzeitpunkt an.)

Die Vorlesung *Analysis 3* bildet unter anderem die Grundlage für die Vorlesung *Numerical Methods for Partial Differential Equations* (RW, Grundlagenfach, 4. Semester).

12.2 Partielle und gewöhnliche Differentialgleichung, Beispiel: Transportgleichung

Um den Begriff einer PDG präzise zu machen, erinnern wir uns, dass $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen ohne 0 bezeichnet. Wir fixieren $n \in \mathbb{N}$ und eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ (zum Beispiel $U = \mathbb{R}^n$). Wir betrachten eine Funktion

$$u : U \to \mathbb{R},$$

d. h. eine Abbildung, die jedem Punkt $x \in U$ eine reelle Zahl zuordnet. Wir schreiben

$$x = \big(x_1, \ldots, x_n\big) = \big(x^1, \ldots, x^n\big).$$

u ist also eine reellwertige Funktion der n Variablen $x_1, \ldots, x_n$.[1] Wir fixieren eine natürliche Zahl k.

Definition 12.1. *Eine* partielle Differentialgleichung (PDG) der Ordnung k für u *ist eine Gleichung der Form*

$$F\Big(x, u(x), \textit{partielle Ableitungen von } u \textit{ bis zur Ordnung } k \textit{ im Punkt } x\Big) = 0, \ \forall x \in U, \tag{12.1}$$

[1] Manchmal werden wir für die i-te Variable einen unteren Index verwenden, also x_i schreiben. Manchmal werden wir dafür stattdessen einen oberen Index verwenden, also x^i schreiben. Wenn die Gefahr besteht, den oberen Index mit einer Potenz zu verwechseln, werden wir einen unteren Index verwenden.

wobei F eine feste Funktion ist.[2]

Bemerkungen. Im Englischen heisst eine partielle Differentialgleichung *partial differential equation*, abgekürzt *PDE*.

Für $i = 1, \dots, n$ ist die *partielle Ableitung* von u nach der i-ten Variablen x_i die Funktion $u_{x_i} : U \to \mathbb{R}$, die definiert ist durch

$$u_{x_i}(x) := f'(x_i), \qquad \text{wobei}$$
$$f(t) := u\Big(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n\Big).$$

Wir schreiben für diese Ableitung auch

$$\partial_i u := \partial_{x_i} u := \frac{\partial u}{\partial x_i} := u_{x_i}.$$

Beispiel. [(höhere) partielle Ableitung] Wir betrachten den Fall $n = 2$ und die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u(x) := x_1 x_2$. Die partiellen Ableitungen von F sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \partial_1 u(x) = u_{x_1}(x) = u(\bullet, x_2)'(x_1) = x_2, \\ \partial_2 u(x) = u_{x_2}(x) = u(x_1, \bullet)'(x_2) = x_1, \\ \partial_2 \partial_1 u(x) = u_{x_1 x_2}(x) = (u_{x_1})_{x_2}(x) = 1 = u_{x_2 x_1}(x). \end{aligned}$$

(Hier bezeichnet $u(\bullet, x_2)$ die Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ gegeben durch $u(\bullet, x_2)(t) := u(t, x_2)$.) Alle anderen (höheren) partiellen Ableitungen sind gleich 0.

Wir betrachten jetzt zuerst den eindimensionalen Fall, also $n = 1$. Dann hängt die Funktion u nur von einer reellen Variablen ab. Eine PDG ist dann dasselbe wie eine gewöhnliche Differentialgleichung (GDG).

Beispiele. [gewöhnliche Differentialgleichung] Betrachte zum Beispiel den Fall $U = \mathbb{R}$ und $k = 1$, d. h. eine GDG der Ordnung 1.

- Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und die Funktion F gegeben durch

  $$F\big(x, y_0, y_1\big) := y_1 - f(x).$$

  Gemäss 12.1 entspricht diese Funktion der GDG

  $$\begin{aligned} F\big(x, u(x), u'(x)\big) = u'(x) - f(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}, \\ \text{d. h. } u'(x) = f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{12.2}$$

[2] Wir nehmen an, dass diese Funktion nicht bezüglich aller partiellen Ableitungen k-ter Ordnung konstant ist.

Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt, dass für jede Konstante $c \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$u(x) = \int_0^x f(t)\,dt + c$$

die Gleichung (12.2) löst und dass das die einzigen Lösungen dieser Gleichung sind. Das haben Sie in Analysis 1 gelernt.

- Sei $a \in \mathbb{R}$ und die Funktion F gegeben durch

$$F\big(x, y_0, y_1\big) := y_1 - a y_0.$$

Gemäss 12.1 entspricht diese Funktion der GDG

$$\begin{aligned} F\big(x, u(x), u'(x)\big) = u'(x) - a u(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}, \\ \text{d. h. } u'(x) = a u(x),\ \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{12.3}$$

Diese GDG beschreibt zum Beispiel radioaktiven Zerfall. Dabei spielt x die Rolle der Zeit t. Die allgemeine Lösung ist gegeben durch

$$u(x) = c e^{ax},$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist. Dass diese Funktion die Gleichung (12.3) löst, folgt durch Nachrechnen. (Rechnen Sie das nach!) Dass sie die einzige Lösung der Gleichung ist, folgt aus dem Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf für GDG. Siehe [Stra, Satz 6.5.1, p. 145].

Sei jetzt $n \in \mathbb{N}$ allgemein.

Beispiel. [Transportgleichung]

- Eine einfache partielle Differentialgleichung, die keine GDG ist, ist die Transportgleichung mit konstanten Koeffizienten. Wir schreiben die Standardkoordinaten in $U := \mathbb{R}^{n+1}$ als $t, x_1, \ldots, x_n$ und kürzen ab $x = \big(x_1, \ldots, x_n\big)$.[3] Für eine partiell differenzierbare Funktion $u : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit

$$\nabla u := \nabla_x u := \begin{pmatrix} u_{x_1} \\ \vdots \\ u_{x_n} \end{pmatrix}$$

[3] Wir schreiben also einen Punkt in $\mathbb{R}^{n+1}$ als $\big(t, x_1, \ldots, x_n\big) = (t, x)$. Die Standardkoordinaten sind kartesische Koordinaten.

den Gradienten bezüglich x. Erinnerung an Lineare Algebra: Das *euklidische innere Produkt auf* $\mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$v \cdot w := \sum_{i=1}^{n} v_i w_i = v_1 w_1 + \dots v_n w_n.$$

Sei $v \in \mathbb{R}^n$. Die *Transportgleichung zum Vektor* v ist gegeben durch

$$u_t + v \cdot \nabla u = 0. \tag{12.4}$$

Sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion.[4] Wir definieren die Funktion

$$u : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}, \qquad u(t, x) := g(x - tv). \tag{12.5}$$

Diese Funktion löst die Transportgleichung (12.4). Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} u_t + v \cdot \nabla u = & - \sum_{i=1}^{n} g_{x_i}(x - tv) v_i + v \cdot \nabla g(x - tv) \\ & \text{(mit Hilfe der Kettenregel aus Analysis 2)} \\ = & - \nabla g(x - tv) \cdot v + v \cdot \nabla g(x - tv) \\ = & 0. \end{aligned}$$

(Für Details zur Kettenregel siehe Übungsserie 2.)

Bemerkungen. [Transportgleichung]

- Wir betrachten den Fall $n = 3$ und interpretieren die Koordinate t als die Zeit. Die Gleichung (12.4) beschreibt dann den Transport einer chemischen Substanz u in einer Strömung mit konstanter Geschwindigkeit v, ohne Quellen, Senken und Diffusion. u spielt hierbei die Rolle der Stoffmengenkonzentration. In dieser Situation ist $g = u(0, \bullet)$, also die Konzentrationsverteilung zum Zeitpunkt $t = 0$. Gemäss der Lösungsformel (12.5) gilt darum, dass $u(t, \bullet)$, die Konzentrationsverteilung zum Zeitpunkt t, durch die um tv *transportierte* (d. h. verschobene) Anfangsverteilung g gegeben ist. (Siehe Abbildung 12.1.) Das rechtfertigt den Namen *Transportgleichung* für (12.4).

- In einer allgemeineren Form der Transportgleichung darf der Vektor v vom Zeitpunkt t und vom Ort x abhängen. Das bedeutet, dass v dann ein sogenanntes *zeitabhängiges Vektorfeld auf* $U = \mathbb{R}^m$ ist. Die allgemeinere Transportgleichung beschreibt den Transport einer chemischen Substanz in der Strömung, die durch die zeit- und ortsabhängige Geschwindigkeit $v(t, x)$ gegeben ist. Das gilt, falls die transportierende Flüssigkeit *inkompressibel*, d. h. nicht zusammendrückbar ist.

[4] Das bedeutet, dass die ersten partiellen Ableitungen von g existieren und stetig sind.

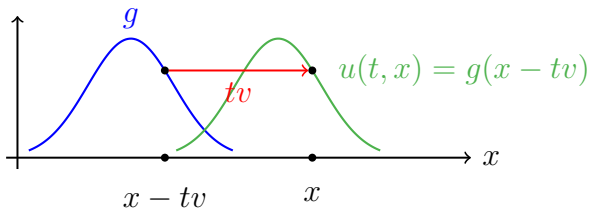


Abbildung 12.1: Anfangsverteilung: blau, transportierte Verteilung: grün.

Beispiel. [keine PDG] Die Gleichung

$$u'(x) = u(x-1)$$

ist keine partielle Differentialgleichung[5], weil sie nicht die Form (12.1) hat. Das Problem ist, dass das Argument $(x-1)$ der Funktion u sich vom Argument (x) ihrer Ableitung unterscheidet. Diese Gleichung ist eine sogenannte *retardierte Differentialgleichung* (English *delay differential equation*).

12.3 Laplace-, Wellen-, Wärmeleitungsgleichung

In der Vorlesung Analysis 3 werden die *drei grossen partiellen Gleichungen* behandelt, nämlich:

- die Laplace-Gleichung
- die Wellengleichung
- die Wärmeleitungsgleichung = Diffusionsgleichung

Um diese Gleichungen aufzuschreiben, brauchen wir die folgende Definition.

Definition 12.2. *Der* Laplace-Operator Δ *ist gegeben durch*

$$\Delta u := \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} u. \tag{12.6}$$

Sei jetzt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die *inhomogene Laplace-Gleichung* mit *Inhomogenität* f (oder *Poisson-Gleichung*) ist gegeben durch

$$\Delta u = f. \tag{12.7}$$



Abbildung 12.2: Pierre-Simon Laplace, 1749–1827, französischer Mathematiker, Physiker und Astronom.

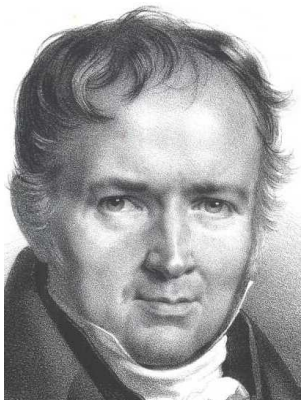


Abbildung 12.3: Siméon Denis Poisson, 1781–1840, französischer Physiker und Mathematiker.

Diese Gleichung ist nach Pierre-Simon Laplace und Siméon Denis Poisson benannt, siehe die Abbildungen 12.2, 12.3. Sie ist eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung. Wir definieren nämlich die Funktion F durch

$$F\Big(x, y, y_1, \dots, y_n, y_{11}, \dots, y_{1n}, y_{n1}, \dots, y_{nn}\Big) := \left(\sum_{i=1}^{n} y_{ii}\right) - f(x).^{6}$$

Dann ist die inhomogene Laplacegleichung (12.7) gegeben durch

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta u(x) - f(x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}(x) - f(x) \\ &= F\Big(x, u(x), u_{x_1}(x), \dots, u_{x_n}(x), u_{x_1 x_1}(x), \dots, u_{x_1 x_n}(x), u_{x_n x_1}(x), \dots, u_{x_n x_n}(x)\Big). \end{aligned}$$

(Wir setzen hier $u_{x_i x_j}(x)$ für die Variable y_{ij} ein.) D. h., die Gleichung (12.7) hat die gewünschte Form (12.1). Die (inhomogene) Laplacegleichung ist der Prototyp einer *elliptischen* PDG. Sie bestimmt zum Beispiel das elektrostatische Potential u, das durch eine Ladungsverteilung ρ erzeugt wird. In diesem Fall ist $f = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$, wobei ε_0 die elektrische Feldkonstante ist. Der Fall $f = 0$ entspricht der *(homogenen) Laplace-Gleichung* PDG

$$\Delta u = 0. \tag{12.8}$$

Im Fall $n = 3$ beschreibt diese Gleichung zum Beispiel den Gleichgewichtszustand einer chemischen Substanz. Dabei ist u die Stoffmengenkonzentration. (Siehe die Bemerkun-

[5] im Sinn der Vorlesung Analysis 3

[6] Hier kommen Variablen y_{ij} vor, die von zwei Indizes i und j abhängen.

gen unten nach der Diffusionsgleichung (12.10).)

Wir schreiben jetzt $(t, x) = \big(t, x_1, \ldots, x_n\big)$ für die Koordinaten in $\mathbb{R}^{n+1}$ und fassen t als die Zeit und x als den Ort auf. Die Wellengleichung ist die PDG

$$u_{tt} = c^2 \Delta u,^{7} \tag{12.9}$$

wobei $c > 0$ eine reelle Konstante ist, die *Ausbreitungsgeschwindigkeit* genannt wird. Diese Gleichung ist der Prototyp einer *hyperbolischen* PDG. Im Fall $n = 3$ beschreibt die Gleichung zum Beispiel die Ausbreitung einer Schallwelle. Dabei ist u der Schalldruck. Die Gleichung (12.9) beschreibt auch die Schwingung einer Saite.

Die *Wärmeleitungsgleichung* (oder *Diffusionsgleichung*) ist die PDG

$$u_t = a \Delta u, \tag{12.10}$$

wobei $a > 0$ eine reelle Konstante ist. Diese Gleichung ist der Prototyp einer *parabolischen* PDG. Die Gleichung bestimmt, wie sich die räumliche Temperaturverteilung in einem Gebiet zeitlich entwickelt. Dabei ist $n = 3$, u die Temperatur und a die Temperaturleitfähigkeit. Die Gleichung beschreibt auch die Zeitentwicklung der (Stoffmengen-)Konzentration einer diffundierenden chemischen Substanz, wobei dann $n = 3$, u die Konzentration und a der Diffusionskoeffizient sind.[8]

Das System ist genau dann im Gleichgewicht, wenn sich die Konzentration (in der Zeit) nicht ändert, d. h. wenn $u_t \equiv 0$. In diesem Fall wird die Diffusionsgleichung (12.10) zur Laplacegleichung (12.8).

Die Lösungen der drei Typen von PDG (elliptisch, hyperbolisch, parabolisch) haben verschiedene Eigenschaften. Zum Beispiel konvergiert die Lösung der Wärmeleitungsgleichung bei isolierenden Randbedingungen gegen den Mittelwert der Anfangsbedingung, wenn die Zeit gegen unendlich geht. Das bedeutet, dass sich Temperatur- und Konzentrationsunterschiede über die Zeit hinweg ausgleichen. Für eine Lösung der Wellengleichung gilt diese Eigenschaft nicht. Stattdessen pflanzt sich eine solche Lösung immer weiter fort.

[7] Hier und im Folgenden ist Δu immer noch die Summe der zweiten partiellen Ableitungen nach allen Variablen x_i, wie in (12.6). Δu enthält also keine Ableitungen nach t.

[8] Wir nehmen hier an, dass die Substanz nicht chemisch reagiert.

12.4 Systeme partieller Differentialgleichungen, Beispiel: Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik, Zusammenhang mit der Wellengleichung

Unter einem *System partieller Differentialgleichungen* verstehen wir eine Gleichung der Form (12.1), wobei jetzt $m \in \mathbb{N}$ und die gesuchte Funktion u eine Abbildung

$$u = \big(u_1, \dots, u_m\big) : U \to \mathbb{R}^m$$

ist. Die **Maxwell-Gleichungen** sind ein System partieller Differentialgleichungen, welche die Zeitentwicklung der elektrischen Feldstärke $\mathbf{E}$ und des magnetischen Feldes $\mathbf{B}$ beschreiben. Sie sind gegeben durch (in SI-Einheiten):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{Gaußsches Gesetz für das elektrische Feld} \tag{12.11}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{Gaußsches Gesetz für das magnetische Feld} \tag{12.12}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0 \quad \text{Faradaysches Induktionsgesetz} \tag{12.13}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \mathbf{E} = \mu_0 \mathbf{j} \quad \text{Ampèresches Gesetz mit Maxwellschem Verschiebungsstrom} \tag{12.14}$$

$t :=$ Zeit

$\partial_t := \frac{\partial}{\partial t}$

$x = (x_1, x_2, x_3) :=$ Ort

$$\nabla := \nabla_x := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \text{räumlicher Gradient}$$

$\mathbf{E} :=$ elektrische Feldstärke (gesuchte Funktion von t und x)

$\mathbf{B} :=$ Magnetfeld = magnetische Flussdichte (gesuchte Funktion von t und x)

$\rho :=$ Ladungsdichte

$\mathbf{j} :=$ elektrische Stromdichte

$\varepsilon_0 :=$ elektrische Feldkonstante $\approx 9 \cdot 10^{-12} F/m$

$\mu_0 :=$ magnetische Feldkonstante $\approx 1.3 \cdot 10^{-6} N/A^2$

(Siehe die Vorlesungen *Physik II* (RW) und *Elektromagnetische Felder und Wellen* (ITET: 4. Semester, RW: Wahlfach, 6. Semester).) Die Maxwell-Gleichungen sind nach James Clerk Maxwell benannt, siehe Abbildung 12.4.



Abbildung 12.4: James Clerk Maxwell, 1831–1879, schottischer Physiker.

Bemerkungen. [Maxwellgleichungen]

- Die Maxwellgleichungen beschreiben zusammen mit dem Lorentzkraftgesetz die (klassische) Elektrodynamik. Die Elektrodynamik ist das Teilgebiet der Physik, das bewegte elektrische Ladungen und zeitlich veränderliche elektrische und magnetische Felder beschreibt. Sie bildet die Grundlage für die Elektrotechnik.
- Die Gleichung (12.12) besagt physikalisch, dass es keine magnetischen Ladungen gibt.

Im Vakuum folgt aus den Maxwell-Gleichungen die Wellengleichung. Das ist der Inhalt des folgenden Satzes.

Satz 12.3 (Maxwellgleichungen und Wellengleichung)**.** *Wir nehmen an, dass* $\rho = 0$ *und* $\mathbf{j} = 0$*. Sei* $(\mathbf{E}, \mathbf{B}) \in C^2\big(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3\big)$ *eine Lösung der Maxwellgleichungen. Dann lösen* $\mathbf{E}$ *und* $\mathbf{B}$ *die Wellengleichung*

$$u_{tt} = c^2 \Delta u$$

mit

$$c := (\varepsilon_0 \mu_0)^{-\frac{1}{2}}. \tag{12.15}$$

Bemerkung. Damit meinen wir, dass alle Komponenten von $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ diese Wellengleichung lösen.

Im Beweis dieses Satzes werden wir Folgendes verwenden.

Bemerkung 12.4. [vektoranalytische Identität] Für jedes $X \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ gilt

$$\nabla \times (\nabla \times X) = \nabla(\nabla \cdot X) - \Delta X.$$

(Siehe Übungsserie 9. Der Laplace-Operator wird hier auf jede Komponente von X angewandt.)

Beweis des Satzes 12.3: Gemäss dem Ampèreschen Gesetz mit Maxwellschem Verschiebungsstrom und $\mathbf{j} = 0$ gilt

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{E} &= (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1} \nabla \times \mathbf{B} \\ &= c^2 \nabla \times \mathbf{B} \qquad \text{(gemäss (12.15))}\end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}\partial_t^2 \mathbf{E} &= c^2 \partial_t \nabla \times \mathbf{B} \\ &= c^2 \nabla \times \partial_t \mathbf{B} \qquad \text{(gemäss dem Satz von Schwarz 8.52)} \\ &= c^2 \nabla \times (-\nabla \times \mathbf{E}) \qquad \text{(gemäss dem Faradayschen Induktionsgesetz)} \\ &= c^2 \big(-\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) + \Delta \mathbf{E} \big) \qquad \text{(gemäss Bemerkung 12.4)} \\ &= 0 + c^2 \Delta \mathbf{E} \qquad \text{(gemäss dem Gaußschen Gesetz für } \mathbf{E} \text{ mit } \rho = 0)\end{aligned}$$

Also löst $\mathbf{E}$ die Wellengleichung $u_{tt} = c^2 \Delta u$.

Ein ähnliches Argument zeigt, dass $\mathbf{B}$ diese Gleichung löst. (Siehe Übungsserie 10.) Das beweist Satz 12.3. □

Bemerkung. [elektrische Feldkonstante:

`https://de.wikipedia.org/wiki/Elektrische_Feldkonstante`

magnetische Feldkonstante:

`https://de.wikipedia.org/wiki/Magnetische_Feldkonstante`

Lichtgeschwindigkeit:

`https://de.wikipedia.org/wiki/Lichtgeschwindigkeit`

google: `(8.854187818814*10^(-12) * 1.2566370612720*10^(-6))^(-1/2)`

] Es gilt $c = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-\frac{1}{2}} \approx 299'792'458 \mathrm{m\,sec}^{-1}$. Das ist gleich der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Licht ist eine elektromagnetische Strahlung. (Manchmal wird nur der sichtbare Teil dieser Strahlung "Licht" genannt.) Dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit für die hergeleitete Wellengleichung gerade die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist, ist daher kein Zufall.

12.5 Ein paar allgemeine Bemerkungen

Der Satz von Picard-Lindelöf garantiert, dass jede *gewöhnliche* DG eine Lösung besitzt, mindestens für kurze Zeit. (Siehe [Stra, Satz 6.5.1, p. 145].) Im Gegensatz dazu gibt es partielle Differentialgleichungen, wofür keine Lösung existiert. Des Weiteren ist für einige PDG nicht bewiesen, dass es eine Lösung gibt. Ein berühmtes Beispiel dafür ist die Navier-Stokes-Gleichung, die viskose Flüssigkeiten beschreibt. Das Clay Mathematics Institute hat eine Million US-Dollar für einen Beweis ausgelobt, dass diese Gleichung eine glatte Lösung besitzt.

Für die meisten PDG gibt es keine konkrete Lösungsformel. Für viele PDG gibt es aber einen Beweis dafür, dass eine Lösung existiert. Da Analysis 3 sich nur PDG beschäftigt, wofür es eine Lösungsformel gibt, wird sie also nur mit einem kleinen Teil der Theorie der PDG behandeln.

12.6 Linearität einer PDG, Superpositionsprinzip

Eine GDG heisst *linear* g. d. w. [9] nach Verschieben von Termen die linke Seite der GDG durch eine Linearkombination der gesuchten Funktion und ihrer Ableitungen gegeben ist und die rechte Seite durch eine feste Funktion. Die folgende Definition macht das präzise.

Definition 12.5 (lineare PDG)**.** *Wir nennen eine PDG*[10] linear *g. d. w. sie in die folgende Form gebracht werden kann, indem wir Terme auf die linke oder rechte Seite verschieben:*

$$\left(\begin{array}{l} \textit{endliche Summe von Produkten der Form:} \\ \textit{Funktion von } x \textit{ mal } u \textit{ oder (höhere) partielle Ableitung von } u \end{array} \right) = f(x). \quad (12.16)$$

Im Fall $f \equiv 0$ *nennen wir eine solche PDG* homogen*, sonst* inhomogen*.*

Die oben genannten PDG, mit denen wir uns in dieser Vorlesung befassen werden, sind alle *linear*. Solche Gleichungen sind im Allgemeinen einfacher zu behandeln als nicht lineare PDG.

Beispiele. [(nicht-)lineare Differentialgleichungen]

- Die Transportgleichung (12.4), die (homogene) Laplace-Gleichung (12.8), die Wellengleichung (12.9) und die Wärmeleitungsgleichung (12.10) sind alle linear

[9] genau dann, wenn

[10] oder ein System partieller DG

und homogen. (Um das zu sehen, schreiben wir zum Beispiel die Wellengleichung um als $u_{tt} - c^2\Delta u = 0$.)

- Die Poisson-Gleichung (12.7) ist linear und inhomogen (falls $f \neq 0$).

Bemerkung. [homogene Linearität] Eine PDG ist linear und homogen g. d. w. ihre rechte Seite gleich null ist und ihre linke Seite linear von der gesuchten Funktion u abhängt[11]. D. h., wenn wir für die linke Seite $T(u)$ schreiben, dann gilt

$$T(au) = aT(u), \qquad T(u+v) = T(u) + T(v),$$

für jede reelle Zahl a und alle genügend differenzierbaren Funktionen u, v. Das rechtfertigt die Bezeichnung *lineare PDG*.

Aus dieser Bemerkung folgt das Superpositionsprinzip. Um dieses zu formulieren, erinnern wir uns an Folgendes aus der linearen Algebra: Eine (endliche reelle) Linearkombination der Funktionen $u_1, \ldots, u_\ell$ ist eine Funktion der Form $a_1u_1 + \ldots + a_\ell u_\ell$, wobei $a_1, \ldots, a_k$ reelle Zahlen sind.

Proposition 12.6 (Superpositionsprinzip)**.** *Jede (endliche) Linearkombination von Lösungen einer homogenen linearen PDG löst die PDG ebenfalls.*

Beispiele. [Superpositionsprinzip]

- Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung

$$u'' = u. \tag{12.17}$$

Diese Gleichung ist linear, da wir sie umschreiben können als

$$1 \cdot u'' + (-1) \cdot u = 0$$

und sie dann die Form (12.16) hat. (Die Koeffizienten 1 und -1 sind (konstante) Funktionen von x.) Die Funktionen

$$u_1(x) := e^x, \qquad u_2(x) := e^{-x}$$

lösen die GDG (12.17). Gemäss Proposition 12.6 (Superpositionsprinzip) löst daher für alle reellen Zahlen a_1, a_2 die Funktion

$$u := a_1u_1 + a_2u_2, \qquad u(x) = a_1e^x + a_2e^{-x},$$

[11] nachdem wir alle Terme, die (partielle Ableitungen von) u enthalten, nach links gebracht haben

ebenfalls die GDG (12.17). Wir können das auch direkt überprüfen. Es gilt

$$\begin{aligned} u'' &= \big(a_1u_1 + a_2u_2\big)'' \\ &= \big(a_1u_1' + a_2u_2'\big)' \qquad \text{(da Ableiten eine lineare Operation ist)} \\ &= a_1u_1'' + a_2u_2'' \qquad \text{(da Ableiten eine lineare Operation ist)} \\ &= a_1u_1 + a_2u_2 \qquad \text{(da } u_1 \text{ und } u_2 \text{ die GDG (12.17) lösen)} \\ &= u. \end{aligned}$$

Also löst u die GDG (12.17).

- Betrachte die (homogene) Laplacegleichung (12.8),

$$\Delta u = 0, \tag{12.18}$$

im Fall $n = 2$. Die Funktionen

$$u_1(x) := e^{x_1}\sin(x_2), \qquad u_2(x) := e^{x_1}\cos(x_2)$$

lösen diese PDG. (Rechnen Sie das nach!) Gemäss Proposition 12.6 (Superpositionsprinzip) löst daher für alle reellen Zahlen a_1, a_2 die Funktion

$$u := a_1u_1 + a_2u_2, \qquad u(x) = a_1e^{x_1}\sin(x_2) + a_2e^{x_1}\cos(x_2)$$

ebenfalls die PDG (12.18). (Rechnen Sie das direkt nach!)

Bemerkung. [Superpositionsprinzip] Für eine *nicht*lineare PDG gilt das Superpositionsprinzip im Allgemeinen nicht. Ein Beispiel dafür ist die GDG

$$u' = u^2. \tag{12.19}$$

Diese Gleichung ist nicht linear, da auf der rechten Seite u quadratisch vorkommt. Die Funktion

$$u(x) := -\frac{1}{x}$$

löst die Gleichung (12.19). (Rechnen Sie das nach!) Wenn a eine reelle Zahl ist, dann löst au die GDG (12.19) nur in den Fällen $a = 0$ und $a = 1$. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} (au)^2 &= a^2u^2 \\ &= a^2u' \qquad \text{(da } u \text{ die GDG (12.19) löst)} \\ &= a(au)'. \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist genau dann gleich $(au)'$, wenn $a = 0$ oder $a = 1$ ist. Das bedeutet, dass au die GDG (12.19) nur in diesen zwei Fällen löst. Daher gilt das Superpositionsprinzip für die GDG (12.19) nicht.

12.7 Typen linearer PDG zweiter Ordnung: elliptisch, hyperbolisch, parabolisch

Eine lineare PDG zweiter Ordnung heisst *elliptisch*, falls in jedem Punkt die Matrix der Koeffizienten der zweiten partiellen Ableitungen positiv definit ist. Der Prototyp einer elliptischen PDG ist die Laplacegleichung. Lösungen homogener elliptischer PDG erfüllen das Maximumprinzip, welches besagt, dass die Lösung ihr Maximum (und Minimum) auf dem Rand annimmt.

Um Elliptizität einer PDG zu erklären, erinnern wir uns an den Begriff der positiven Definitheit aus der linearen Algebra.[12] Sei $n \in \mathbb{N}$ und

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

eine reelle $n \times n$ Matrix.

Beispiel 12.7. Wenn $n = 2$ ist, dann hat so eine Matrix die Form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A heisst *positiv definit* g. d. w. gilt[13]:

$$v^T A v = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} v_i v_j > 0, \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \ ^{14}. \tag{12.20}$$

Beispiel 12.8. Sei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ positive reelle Zahlen. Dann ist die Diagonalmatrix

$$\operatorname{diag}\big(\lambda_1, \dots, \lambda_n\big) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

[12] Dieser Begriff spielte auch in Analysis 2 bei der Charakterisierung kritischer Punkte einer Funktion eine Rolle.

[13] Für eine Matrix M ist hierbei M^T die transponierte Matrix.

[14] Seien A und B Mengen. Wie Sie in Analysis 1 gelernt haben, ist das *(relative) Komplement von A in B* (oder die *mengentheoretische Differenz von A in B*) die Menge $B \setminus A := \big\{b \in B \,\big|\, b \notin A\big\}$, also die Menge aller Elemente b von B, die nicht in A liegen. In (12.20) stellen wir die Bedingung $v^T A v > 0$ also an jeden Vektor v in $\mathbb{R}^n$, der nicht in $\{0\}$ liegt, d. h., nicht gleich 0 ist.

positiv definit, da für jeden Vektor $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\begin{aligned} v^T \operatorname{diag}\big(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\big) v &= \sum_{i=1}^{n} v_i \lambda_i v_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i^2 > 0. \end{aligned}$$

Insbesondere ist die Einheitsmatrix

$$\mathbb{1} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

positiv definit. Andererseits ist die Diagonalmatrix $\operatorname{diag}\big(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\big)$ nicht positiv definit, falls eine (oder mehrere) der Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ negativ oder null ist. (Warum?)

Bemerkungen 12.9. [Positive Definitheit] Wir nehmen an, dass die Matrix A symmetrisch ist, d. h. $A^T = A$.

(i) Dann ist A genau dann positiv definit, wenn alle ihre Eigenwerte (strikt) positiv sind. Das folgt aus Beispiel 12.8 und dem Spektralsatz aus der linearen Algebra, der besagt, dass jede symmetrische Matrix diagonalisiert werden kann. (Im diagonalen Fall sind die diagonalen Einträge $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gerade die Eigenwerte der Matrix.)

(ii) Die Determinante einer quadratischen Matrix A ist das Produkt ihrer Eigenwerte, d. h.

$$\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n,$$

wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte der Matrix A sind (mit Vielfachheiten).

(iii) Wir betrachten den Fall $n = 2$. Gemäss (ii) gilt dann $\det A = \lambda_1 \lambda_2$. Die Determinante von A ist daher genau dann positiv, falls die Eigenwerte von A nicht null sind und dasselbe Vorzeichen haben. Wegen (i) ist das genau dann der Fall, wenn A oder $-A$ positiv definit ist.

Seien jetzt U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ (zum Beispiel $U = \mathbb{R}^n$) und

$$a_{ij}, b_i, c, f : U \to \mathbb{R}, \qquad i, j = 1, \ldots, n$$

stetige Funktionen. Wir betrachten die PDG

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu = f. \tag{12.21}$$

Definition 12.10 (elliptische PDG)**.** *Eine lineare PDG zweiter Ordnung heisst* elliptisch *g. d. w. sie durch Verschieben von Termen*[15] [16] *in die Form* (12.21) *gebracht werden kann, und dabei für jeden Punkt $x \in U$ die Matrix $\big(a_{ij}(x)\big)_{ij}$ symmetrisch und positiv definit ist.*

Beispiel. [elliptische PDG] Die (inhomogene) Laplacegleichung

$$\Delta u = f$$

ist elliptisch. Um das zu sehen, definieren wir

$$a_{ij}(x) := \delta_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j, \\ 0, & \text{falls } i \neq j \end{cases}{}^{17}. \quad , \qquad b_i(x) := 0, \qquad c(x) := 0.$$

Die Laplacegleichung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} f &= \Delta u \\ &= \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} \\ &= \sum_{i,j} \big(\delta_{ij} = a_{ij}\big) u_{x_i x_j} + \sum_i (0 = b_i) u_{x_i} + (0 = c) u. \end{aligned}$$

Sie hat also die Form (12.21). Wir haben

$$\big(a_{ij}(x) = \delta_{ij}\big)_{ij} = \mathbb{1},$$

die Einheitsmatrix. Diese Matrix ist symmetrisch und positiv definit, wie wir in Beispiel 12.8 gesehen haben. Daher ist die Laplacegleichung gemäss Definition 12.10 elliptisch, wie behauptet.

Um die Eigenschaften *hyperbolisch* und *parabolisch* zu definieren, betrachten wir nun eine offene Teilmenge U des $\mathbb{R}^{n+1}$. Wir schreiben die Standardkoordinaten in $\mathbb{R}^{n+1}$ als $t, x_1, \ldots, x_n$.[18] Seien

$$a_{ij}, b_i, c, f : U \to \mathbb{R}, \qquad i, j = 1, \ldots, n$$

[15] von der linken Seite auf die rechte Seite oder umgekehrt

[16] Wir erlauben auch, dass beide Seiten der Gleichung mit der gleichen Konstante ungleich 0 multipliziert werden.

[17] δ_{ij} heisst *Kronecker-Delta*.

[18] Wir schreiben also einen Punkt in $\mathbb{R}^{n+1}$ als $\big(t, x_1, \ldots, x_n\big) = (t, x)$. Die Standardkoordinaten sind kartesische Koordinaten.

stetige Funktionen. Wir definieren den Operator L durch

$$Lu := -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu. \tag{12.22}$$

Wir betrachten die partiellen Differentialgleichungen

$$u_{tt} + Lu = f, \tag{12.23}$$
$$u_t + Lu = f. \tag{12.24}$$

Definition 12.11 (hyperbolische, parabolische PDG)**.** *Eine lineare PDG zweiter Ordnung heisst* hyperbolisch *(respektive* parabolisch*) g. d. w. sie mittels Verschieben von Termen und einer lokalen*[19] *Koordinatentransformation in die Form* (12.23) *(respektive* (12.24)*) gebracht werden kann so, dass für jeden Punkt $(t, x) \in U$ die Matrix $\big(a_{ij}(t,x)\big)_{ij}$ symmetrisch und positiv definit ist. (Diese Matrix steckt gemäss* (12.22) *in Lu drin.)*

Beispiele. [hyperbolische, parabolische PDG]

(i) Die Wellengleichung

$$u_{tt} = c^2 \Delta u$$

(mit $c > 0$) ist hyperbolisch. Um das zu sehen, definieren wir

$$a_{ij}(t,x) := c^2 \delta_{ij}, \qquad b_i(t,x) := 0, \qquad C(t,x) := 0.^{20}$$

Die Wellengleichung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} 0 &= u_{tt} - c^2 \Delta u \\ &= u_{tt} - \sum_{i=1}^{n} c^2 u_{x_i x_i} \\ &= u_{tt} - \sum_{i,j} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_i (0 = b_i) u_{x_i} + (0 = C) u. \end{aligned}$$

Sie hat also die Form (12.23). Wir haben $\big(a_{ij}(x)\big) = c^2 \mathbb{1}$. Diese Matrix ist symmetrisch und positiv definit, wie wir in Beispiel 12.8 gesehen haben. Daher ist die Wellengleichung gemäss Definition 12.11 hyperbolisch, wie behauptet.

[19] Mit *lokal* meinen wir, dass die Koordinatentransformation nur in einer (möglicherweise kleinen) Umgebung eines gegebenen Punktes definiert ist.

[20] Wir verwenden hier ein grosses C um einen Notationskonflikt mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit c zu vermeiden.

(ii) Die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = a\Delta u$$

(mit $a > 0$) ist parabolisch. Das folgt aus einem zu (i) analogen Argument. (Überprüfen Sie das!)

Bemerkung. [hyperbolische, parabolische PDG im Fall $U \subseteq \mathbb{R}^2$] Wir betrachten den Fall $n = 1$. Dann ist U eine Teilmenge von $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^2$, und die Koordinaten sind t, x_1. In diesem Fall ist eine lineare PDG zweiter Ordnung genau dann hyperbolisch, wenn sie mittels Verschieben von Termen und einer lokalen Koordinatentransformation in die Form

$$u_{tt} - a_{11}u_{x_1x_1} + b_1u_{x_1} + cu = f$$

gebracht werden kann, wobei $a_{11} > 0$. (Warum?) Eine ähnliche Aussage gilt für Parabolizität.

Im Fall, indem U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist, können wir Elliptizität und Hyperbolizität wie folgt charakterisieren. Wir betrachten eine lineare PDG zweiter Ordnung und schreiben sie in der Form

$$a_{11}u_{x_1x_1} + 2a_{12}u_{x_1x_2} + a_{22}u_{x_2x_2} + b_1u_{x_1} + b_2u_{x_2} + cu = f. \tag{12.25}$$

Wir definieren die Diskriminante dieser PDG als

$$D := a_{11}a_{22} - a_{12}^2. \tag{12.26}$$

Proposition 12.12 (Elliptizität und Hyperbolizität im Fall $U \subseteq \mathbb{R}^2$)**.** *Wir nehmen an, dass U eine weg-zusammenhängende*[21] *offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist. Die PDG* (12.25) *ist*

(i) elliptisch genau dann, wenn $D > 0$,

(ii) hyperbolisch genau dann, wenn $D < 0$.

Bemerkungen 12.13. (i) Falls die PDG (12.25) *parabolisch* ist, dann ist $D = 0$. Falls $D = 0$ ist, dann ist die PDG (12.25) jedoch nicht unbedingt parabolisch (im Sinne der Definition 12.11). Ein Beispiel dafür ist die PDG

$$u_{x_1x_1} = 0.$$

Für diese PDG ist $D = 0$, aber wir können diese Gleichung nicht mittels Verschieben von Termen und einer lokalen Koordinatentransformation in die Form (12.24) bringen, wobei $(a_{11}(x))$ für jedes x positiv definit ist, d. h. $a_{11}(x) > 0$.

[21] Das bedeutet, dass alle Punkte in U miteinander durch einen stetigen Weg innerhalb von U verbunden werden können, d. h., dass U nicht aus mehreren unverbundenen Teilen besteht. Ein Beispiel ist $U = \mathbb{R}^2$.

(ii) Die in dieser Vorlesung gebrauchten Definitionen von Elliptizität, Hyperbolizität und Parabolizität sind in der reinen Mathematik gängig. Sie werden[22] zum Beispiel im Buch [Eva10] von L. C. Evans verwendet.[23] In der angewandten Mathematik werden diese Begriffe stattdessen oft nur im Fall definiert, dass U eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist. Die PDG wird dann elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch genannt, je nachdem, ob ihre Diskriminante D grösser 0, kleiner 0 oder gleich 0 ist. Siehe zum Beispiel das Buch von St. J. Farlow [Far93, Seite 6]. Für die Eigenschaften elliptisch und hyperbolisch stimmt diese Definition wegen Proposition 12.12 mit der hier gebrauchten Definition überein. Für die Eigenschaft parabolisch weicht sie jedoch von der hier gebrauchten Definition ab. (Siehe Bemerkung (i).) Der Vorteil der hier gebrauchten Definition ist, dass damit nur PDG parabolisch genannt werden, deren Lösungen gewisse Eigenschaften haben, die als charakteristisch für parabolische Gleichungen gelten.

Teil (i) von Proposition 12.12 folgt aus der Bemerkung 12.9(iii).

Beispiele. [elliptische und hyperbolische PDG im Fall von $U \subseteq \mathbb{R}^2$] Wir betrachten den Fall $U = \mathbb{R}^2$.

- Wir betrachten die PDG

$$(1 + x_1^2)u_{x_1x_1} + u_{x_1x_2} = -u_{x_2x_2} + 2u_{x_1} + 3u. \tag{12.27}$$

  Um zu überprüfen, welchen Typ diese PDG hat, verschieben wir die rechten Terme auf die linke Seite. Damit erhalten wir

$$(1 + x_1^2)u_{x_1x_1} + 2 \cdot \frac{1}{2}u_{x_1x_2} + u_{x_2x_2} - 2u_{x_1} - 3u = 0.$$

  Diese PDG hat die Form (12.25), wobei

$$a_{11}(x) = 1 + x_1^2, \quad a_{12} \equiv \frac{1}{2}, \quad a_{22} \equiv 1, \quad b_1 \equiv -2, \quad b_2 \equiv 0, \quad c \equiv -3.$$

  Die Diskriminante (12.26) der PDG ist daher gegeben durch

$$\begin{aligned} \text{Diskriminante}(x) &= a_{11}(x)a_{22}(x) - a_{12}^2(x) \\ &= (1 + x_1^2) \cdot 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{3}{4} + x_1^2 \\ &> 0, \qquad \forall x \in U. \end{aligned}$$

  Gemäss Proposition 12.12(i) ist die PDG (12.27) daher elliptisch.

[22] in leicht abgewandelter Form

[23] Siehe die Seiten 312, 399 und 372 in diesem Buch.

- Wir betrachten die PDG

$$u_{x_1x_1} + (4 + 2x_1^2)u_{x_1x_2} + u_{x_2x_2} = 2u_{x_1} + 3u. \tag{12.28}$$

Um zu überprüfen, welchen Typ diese PDG hat, verschieben wir die rechten Terme auf die linke Seite. Damit erhalten wir

$$u_{x_1x_1} + 2 \cdot (2 + x_1^2)u_{x_1x_2} + u_{x_2x_2} - 2u_{x_1} - 3u = 0.$$

Diese PDG hat die Form (12.25), wobei

$$a_{11} \equiv 1, \quad a_{12}(x) = 2 + x_1^2, \quad a_{22} \equiv 1, \quad b_1 \equiv -2, \quad b_2 \equiv 0, \quad c \equiv -3.$$

Die Diskriminante (12.26) der PDG ist daher gegeben durch

$$\begin{aligned} \text{Diskriminante}(x) &= a_{11}(x)a_{22}(x) - a_{12}^2(x) \\ &= 1 \cdot 1 - \left(2 + x_1^2\right)^2 \\ &\leq 1 - 4 \\ &< 0, \qquad \forall x \in U. \end{aligned}$$

Gemäss Proposition 12.12(ii) ist die PDG (12.28) daher hyperbolisch.

Bemerkungen. [Typen partieller DG]

- Die drei Typen *elliptisch, hyperbolisch* und *parabolisch* schliessen sich gegenseitig aus. D. h., falls eine PDG einen der drei Typen hat, dann hat sie keinen anderen der drei Typen.
- Nicht jede lineare PDG zweiter Ordnung hat einen der drei hier beschriebenen Typen. (Siehe die Beispiele unten.)

Beispiele. [PDG, die keinen der drei Typen haben] Folgende PDG sind linear und zweiter Ordnung, aber weder elliptisch noch hyperbolisch noch parabolisch. Sie können nämlich in keine der drei entsprechenden Formen gebracht werden.[24]

- $U = \mathbb{R}^2$,

$$u_{x_1x_1} = 0 \ ^{25}$$

[24] Für die elliptische Form ist das einfach zu sehen. Es ist auch einfach zu sehen, dass die Gleichungen weder die hyperbolische Form (12.23) noch die parabolische Form (12.24) haben. Sie können auch nicht durch eine Koordinatentransformation lokal auf eine dieser Formen gebracht werden. Das ist schwieriger zu beweisen.

[25] Vergleiche mit Bemerkung 12.13(i).

- $n = 4$, $U = \mathbb{R}^4$,
$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} - u_{x_3x_3} - u_{x_4x_4} = 0$$

Bemerkung. [Terminologie] Der Grund für die Terminologie *elliptisch* ist, dass eine Matrix $A = \big(a_{ij}\big)_{i,j=1}^{n}$ genau dann positiv definit ist, wenn die Gleichung

$$\sum_{ij} a_{ij} x_i x_j = 1$$

ein Ellipsoid in $\mathbb{R}^n$ beschreibt. (Im Fall $n = 2$ ist ein Ellipsoid dasselbe wie eine Ellipse.)

Der Grund für die Terminologie *hyperbolisch, parabolisch* ist analog.

12.8 Anfangs- und Randbedingungen anhand der Beispiele der Wärmeleitungs- und Wellengleichungen

In physikalischen und chemischen Anwendungen beschreiben partielle Differentialgleichungen alleine ein System meistens noch nicht vollständig. Das System wird jedoch oft vollständig beschrieben, wenn wir zusätzlich zur Differentialgleichung noch Anfangs- und Randbedingungen hinzunehmen. Diese Bedingungen werden oft durch den experimentellen Aufbau vorgegeben.

Betrachten wir zum Beispiel die Wärmeleitungsgleichung im Fall *einer* Raumdimension. Diese Gleichung beschreibt zum Beispiel die zeitliche Entwicklung der Temperaturverteilung in einem dünnen geraden Metallstab. Wir können eine bestimmte Temperaturverteilung zum Anfangszeitpunkt vorgeben, indem wir den Stab an verschiedenen Stellen erhitzen oder abkühlen. Diese Vorgabe entspricht einer *Anfangsbedingung*. Wir schreiben x_- und x_+ für den linken und rechten Endpunkt des Stabes. Der Stab wird dann durch das Intervall $[x_-, x_+]$ beschrieben. Wir schreiben

$u(t, x)$:= Temperatur des Stabes zum Zeitpunkt t am Ort x

t_0 := Anfangszeitpunkt

u_0 := vorgegebene anfängliche Temperaturverteilung

Die Anfangsbedingung ist dann

$$u(t_0, x) = u_0(x), \qquad \forall x \in [x_-, x_+]. \tag{12.29}$$

Wir können auch den Stab an beiden Enden zu jeder Zeit auf 0°C kühlen, indem wir diese Enden in Eiswasser legen. Diese Vorgabe entspricht einer *Randbedingung*. Sie wird

durch folgende Gleichungen ausgedrückt:

$$u(t, x_-) = 0, \qquad u(t, x_+) = 0, \qquad \forall t \geq 0. \tag{12.30}$$

Diese Gleichungen sind sogenannte *Dirichlet-Randbedingungen*. Allgemein sind Dirichlet-Randbedingungen Bedingungen von der Form

$$u = g \text{ auf dem Rand von } U \,^{26},$$

wobei U das Gebiet ist, worauf die gesuchte Funktion u definiert ist, und g eine vorgegebene Funktion ist. Im Falle einer linear PDG nennen wir Dirichlet-Randbedingungen *homogen*, falls $g \equiv 0$. Die Randbedingungen (12.31) sind also homogen. Die zeitliche Entwicklung der Temperaturverteilung wird durch die Anfangs- und Randbedingungen (12.29,12.31) eindeutig festgelegt. Das widerspiegelt sich in der Tatsache, dass es eine eindeutige Lösung der Wärmeleitungsgleichung gibt, welche diese Bedingungen löst. (Das werden wir später sehen.)

Statt die Enden des Stabs in Eiswasser zu legen, können wir sie (und den Rest des Stabs) nach aussen isolieren. Die Enden geben dann keine Wärme an die Aussenwelt ab, d. h., die Wärmestromdichte ist an den Enden gleich 0. Gemäss dem Fourierschen Gesetz ist die Wärmestromdichte proportional und entgegengerichtet zum Gradienten der Temperatur u, also zu u_x in unserem räumlich-eindimensionalen Fall. (Dieses Gesetz ist analog zum Gesetz von Fick für die Stoffmengenstromdichte einer chemischen Substanz.) Die Temperaturverteilung erfüllt daher die sogenannten *Neumann-Randbedingungen*

$$u_x(t, x_-) = 0, \qquad u_x(t, x_+) = 0, \qquad \forall t \geq 0. \tag{12.31}$$

Allgemein sind Neumann-Randbedingungen Bedingungen von der Form

$$\big(\text{Ableitung von } u \text{ in Richtung } \nu\big) = g \text{ auf dem Rand von } U \,^{27},$$

wobei $\nu(x)$ für jeden Punkt auf dem Rand des Gebiets U der nach aussen zeigende Einheitsvektor ist, der senkrecht auf dem Rand von U steht. (Im Fall (12.31) wird dieser Vektor durch $\nu(t, x_+) = (1, 0)$ und $\nu(t, x_-) = (-1, 0)$ gegeben.)

Welche Art von Anfangs- und Randbedingungen zu einer eindeutigen Lösung der gegebenen partiellen Differentialgleichung führt, hängt vom Typ der Gleichung ab. Zum Beispiel erhalten wir bei der Wellengleichung eine eindeutige Lösung, wenn wir sowohl die Funktion zum Anfangszeitpunkt als auch die Zeitableitung der Funktion zum Anfangszeitpunkt vorgeben. Die Funktion zum Anfangszeitpunkt alleine bestimmt die

[26] oder auf einem Teil des Randes von U

[27] oder auf einem Teil des Randes von U



Abbildung 12.5: Joseph Fourier, 1768–1830, französischer Mathematiker und Physiker.

zukünftige Zeitentwicklung in diesem Fall nicht. Das entspricht der Tatsache, dass es nicht reicht, ein Foto einer Welle zu sehen, um vorauszusagen, in welche Richtung die Welle sich bewegen wird. Im räumlich eindimensionalen Fall zum Beispiel ist unklar, ob sich die Welle nach links oder nach rechts bewegen wird.

Aus den hier genannten Gründen werden wir in den folgenden Abschnitten oft Anfangs- und Randbedingungen zu einem Problem vorgeben.

12.9 Lösungsmethode der Trennung der Variablen, Anwendung auf Wärmeleitungsgleichung

12.9.1 Trennung der Variablen

Trennung der Variablen, auch Fourier-Methode genannt, ist eine Methode zum Lösen einer partiellen Differentialgleichung der Form

$$\text{Summe von Termen} = 0,$$

wobei in jedem Term nur Ableitungen (auch höherer Ordnung) nach einer Variable vorkommen. Beispiele für solche Gleichungen sind die Laplacegleichung, Wellengleichung und Wärmeleitungsgleichung. (Überprüfen Sie das!) Die Methode ist nach Joseph Fourier benannt, siehe Abbildung 12.5. Sie beruht auf dem Ansatz, dass die gesuchte Funktion eine bestimmte Kombination von Funktionen einer einzelnen Variablen ist. Die Kombination kann zum Beispiel die Summe oder das Produkt sein. Der Produktansatz ist zum Beispiel gegeben durch

$$u\big(x_1, \dots, x_n\big) = u_1(x_1) \cdots u_n(x_n),$$

wobei $x_1, \ldots, x_n$ die Standardkoordinaten in $\mathbb{R}^n$ bezeichnen. Die Methode der Trennung der Variablen besteht aus den folgenden Schritten:

(i) Setze den Kombinationsansatz für die gesuchte Funktion u in die PDG ein. Dadurch erhalten wir gewöhnliche Differentialgleichungen für die Funktionen der einzelnen Variablen.

(ii) Löse diese GDG und fülle die gefundenen Lösungen der GDG in den Ansatz für u ein.

(iii) Prüfe nach, ob die gefundene Funktion u die PDG tatsächlich löst.

Im nächsten Unterabschnitt illustrieren wir diese Methode, indem wir damit eine von Parametern abhängige Lösung der räumlich eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung (WLG)

$$u_t = a u_{xx} \tag{12.32}$$

finden. (Diese PDG beschreibt die zeitliche Entwicklung der Temperaturverteilung in einem Stab.) Mittels dieser Lösung lösen wir anschliessend ein bestimmtes Anfangs- und Randwertproblem für die WLG. Zur Vereinfachung wählen wir unsere physikalischen Einheiten so, dass gilt:

$$a = 1.$$

12.9.2 Anwendung der Trennung der Variablen auf die Wärmeleitungsgleichung

Methode der Trennung der Variablen, Produktansatz:

Schritt (i), Einsetzen des Ansatzes: Wir nehmen an, dass u eine Lösung der WLG 12.32 (mit $a = 1$) ist, für die es zwei Funktionen $T : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ und $X : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ gibt[28]so, dass u durch das Produkt

$$u(t, x) = T(t)X(x) \tag{12.33}$$

gegeben ist. Wir setzen diesen Ansatz in die WLG (12.32) (mit $a = 1$) ein und erhalten

$$\dot{T}(t)X(x) = T(t)X''(x), \qquad \forall t \in [0, \infty[,\ x \in [0, \pi]. \tag{12.34}$$

Schritt (ii), entstandene GDG lösen:

[28]Wir nehmen an, dass die Funktion T stetig differenzierbar und die Funktion X zweimal stetig differenzierbar ist.

Fall $T \equiv 0$ oder $X \equiv 0$: Dann ist wegen (12.33) auch

$$u \equiv 0. \tag{12.35}$$

Fall $T \not\equiv 0$ und $X \not\equiv 0$: Wir wählen ein $x_0 \in [0, \pi]$ so, dass $X(x_0) \neq 0$, und definieren

$$\lambda := \frac{X''(x_0)}{X(x_0)} \in \mathbb{R}. \tag{12.36}$$

(Wir dürfen durch $X(x_0)$ teilen, da $X(x_0) \neq 0$.) Aus (12.34) mit $x = x_0$ folgt, dass

$$\dot{T}(t) = \lambda T(t), \qquad \forall t \in [0, \infty[.$$

Das ist eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung für T. Wie Sie in Analysis 2 gelernt haben, ist die allgemeine Lösung dieser Gleichung gegeben durch

$$T(t) = ce^{\lambda t} \quad \forall t, \tag{12.37}$$

wobei c eine Konstante ist. Da $T \not\equiv 0$, gibt es ein $t_0 \in [0, \infty[$ so, dass $T(t_0) \neq 0$. Aus (12.34,12.36) folgt, dass

$$\frac{\dot{T}(t_0)}{T(t_0)} = \frac{X''(x_0)}{X(x_0)} = \lambda.$$

(Wir dürfen auf der linken Seite durch $T(t_0)$ teilen, da $T(t_0) \neq 0$.) Aus (12.34) mit $t = t_0$ folgt daher, dass

$$X''(x) = \lambda X(x), \qquad \forall x. \tag{12.38}$$

Das ist eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für X.

Fall $\lambda \neq 0$: Wie Sie in Analysis 2 gelernt haben, ist die allgemeine Lösung der GDG (12.38) dann gegeben durch

$$X(x) = c_+ e^{\sqrt{\lambda}x} + c_- e^{-\sqrt{\lambda}x}, \qquad \forall x, \tag{12.39}$$

wobei $c_\pm \in \mathbb{C}$ [29] Konstanten sind. (Hierbei haben wir gebraucht, dass $\lambda \neq 0$.) Indem wir (12.37,12.39) in den Produktansatz (12.33) einsetzen, erhalten wir

$$u(t, x) = T(t)X(x) = e^{\lambda t}\left(C_+ e^{\sqrt{\lambda}x} + C_- e^{-\sqrt{\lambda}x}\right), \tag{12.40}$$

wobei $C_\pm := cc_\pm$.

Fall $\lambda > 0$: Da wir annehmen, dass T und X reelle Werte annehmen, nimmt u wegen (12.33) ebenfalls reelle Werte an. Indem wir diese Bedingung in (12.40) einsetzen, erhalten wir, dass

$$C_\pm \in \mathbb{R}.$$

[29] Wir bezeichnen mit $\mathbb{C}$ die Menge der komplexen Zahlen.

Fall $\lambda < 0$: Dann ist $\sqrt{\lambda}$ eine imaginäre Zahl. Da u reelle Werte annimmt, folgt aus (12.40), dass

$$C_- = \overline{C_+}.$$

Fall $\lambda = 0$: Dann folgt aus (12.38), dass

$$X'' \equiv 0.$$

Wie Sie in Analysis 2 gelernt haben, folgt hieraus, dass es Konstanten c_0, c_1 gibt so, dass $X(x) = c_1 x + c_0$. Indem wir das zusammen mit (12.37) in den Produktansatz (12.33) einsetzen, erhalten wir

$$u(t,x) = e^{0\cdot t}\big(C_1 x + C_0\big) = C_1 x + C_0, \qquad C_1 := cc_1,\ C_0 := cc_0. \tag{12.41}$$

Zusammenfassend erhalten wir: Wenn u die WLG (12.32) (mit $a = 1$) löst und ein Produkt der Form (12.33) ist, dann ist u gegeben durch (12.40) mit $\lambda \neq 0$, oder durch (12.41), wobei $C_\pm, C_1, C_0$ Konstanten sind.

Schritt (iii), nachprüfen, ob die gefundene Funktion u die WLG löst: (12.35)**:** Die Nullfunktion $u \equiv 0$ löst die WLG.

(12.40)**:** Wir haben

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt} e^{\lambda t} &= \lambda e^{\lambda t}, \\ \frac{d}{dx} e^{\sqrt{\lambda}x} &= \sqrt{\lambda} e^{\sqrt{\lambda}x}, \\ \text{darum} \quad \frac{d^2}{dx^2} e^{\sqrt{\lambda}x} &= (\sqrt{\lambda})^2 e^{\sqrt{\lambda}x}. \end{aligned}$$

Eine analoge Rechnung zeigt, dass

$$\frac{d^2}{dx^2} e^{-\sqrt{\lambda}x} = (-\sqrt{\lambda})^2 e^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Für die Funktion u, gegeben durch (12.40), folgt, dass

$$u_t = \lambda u = u_{xx},$$

d. h., u löst die WLG (12.32) (mit $a = 1$). Eine weitere Rechnung zeigt, dass die Funktion (12.41) die WLG ebenfalls löst. Also lösen alle gefundenen Funktionen tatsächlich die WLG. Zusammenfassend haben wir mittels der Methode der Trennung der Variablen Folgendes gezeigt.

Proposition 12.14 (Produktlösung der Wärmeleitungsgleichung)**.** *Die reellwertigen Lösungen u der räumlich eindimensionalen WLG*

$$u_t = u_{xx},$$

die als ein Produkt der Form

$$u(t,x) = T(t)X(x)$$

geschrieben werden können[30]*, sind genau die Funktionen*

$$u(t,x) = e^{\lambda t}\left(C_+ e^{\sqrt{\lambda}x} + C_- e^{-\sqrt{\lambda}x}\right), \tag{12.42}$$

wobei

$$\lambda \in]0,\infty[, C_\pm \in \mathbb{R} \text{ oder } \lambda \in]-\infty,0[, C_\pm \in \mathbb{C} \text{ so, dass } C_- = \overline{C_+},$$

sowie die Funktionen

$$u(t,x) = C_1 x + C_0, \qquad C_0, C_1 \in \mathbb{R}. \tag{12.43}$$

Bemerkungen. [Trennung der Variablen]

- Bei der Trennung der Variablen verwenden wir die heuristische Methode eines Ansatzes. Wir nehmen dabei an, dass die Lösung unseres Problems eine bestimmte Form hat. (In unserem Fall ist die Form ein Produkt.) Ein Grund, warum dieser Ansatz zum Ziel geführt hat, ist, dass wir dadurch die Möglichkeiten eingeschränkt haben. (Bei weniger Möglichkeiten ist es einfacher, die Lösung zu finden.) Ein anderer Grund ist, dass wir damit das Problem auf ein einfacheres Problem reduziert haben, nämlich von einer PDG auf eine GDG.

- Die mit Trennung der Variablen gefundene Lösung ist meistens nicht die allgemeine Lösung. Das ist im Beispiel der Wärmeleitungsgleichung der Fall, da wegen des Superpositionsprinzips auch lineare Kombinationen der gefundenen Lösungen die WLG lösen.

- Die Methode liefert nicht immer eine Lösung.

- In Analysis 1 haben Sie eine Methode zur Lösung einer *gewöhnlichen* DG kennengelernt, die ebenfalls den Namen *Trennung der Variablen* trägt. Damit können wir eine GDG der Form

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

[30] Hierbei nehmen wir an, dass T stetig differenzierbar und X zweimal stetig differenzierbar ist.

lösen, indem wir alle Terme, die x enthalten, nach rechts bringen und alle Terme, die y enthalten, nach links bringen und danach integrieren. Diese Methode ist der hier geschilderten Methode ähnlich, aber nicht identisch, da wir hier *unabhängige* Variablen voneinander trennen, um aus einer PDG eine GDG zu erhalten, während bei der Methode aus Analysis 1 eine GDG gelöst wird, indem die *unabhängige* von der *abhängigen* Variablen getrennt wird.

12.9.3 Lösen eines Anfangs- und Randwertproblems für die Wärmeleitungsgleichung

Wir betrachten nun folgendes Anfangs- und Randwertproblem für die WLG:

$$u_t = u_{xx}, \tag{12.44}$$

$$u(t,0) = 0, \quad u(t,\pi) = 0, \qquad \forall t \in [0,\infty[, \tag{12.45}$$

$$u\big(t=0,x\big) = u_0(x) := 3\sin(x) - \sin(2x), \qquad \forall x \in [0,\pi]. \tag{12.46}$$

Wie im Abschnitt 12.8 erklärt, beschreibt dieses Anfangs- und Randwertproblem die zeitliche Entwicklung der Temperaturverteilung u in einem Metallstab, dessen Endpunkte bei $x_- = 0$ und $x_+ = \pi$ liegen und durch Eiswasser konstant auf 0°C gekühlt werden, wobei der Stab durch punktuelles Erhitzen so präpariert wird, dass seine Temperaturverteilung zum Beginnzeitpunkt $t = 0$ durch die Funktion u_0 gegeben ist.

Zur Lösung des Problems machen wir den Ansatz, dass u durch eine lineare Kombination von (reellwertigen) Produktfunktionen ist, welche die WLG (12.44) und die Randbedingung (12.45) lösen. Sei nun u zunächst eine Produktlösung von (12.44,12.45). Gemäss Proposition 12.14 aus dem letzten Unterabschnitt ist u dann durch (12.42) oder (12.43) gegeben. (Die Funktion $u \equiv 0$ hat jede dieser beiden Formen.)

Fall (12.42) ($u(t,x) = e^{\lambda t}\left(C_+ e^{\sqrt{\lambda}x} + C_- e^{-\sqrt{\lambda}x}\right)$): Die Randbedingungen (12.45) implizieren, dass

$$C_+ + C_- = u(0,0) = 0, \tag{12.47}$$

$$C_+ e^{\sqrt{\lambda}\pi} + C_- e^{-\sqrt{\lambda}\pi} = u(0,\pi) = 0. \tag{12.48}$$

Bedingung (12.47) ergibt

$$C_- = -C_+. \tag{12.49}$$

Indem wir das in (12.48) einsetzen und mit $e^{\sqrt{\lambda}\pi}$ multiplizieren, erhalten wir

$$C_+\left(e^{2\pi\sqrt{\lambda}} - 1\right) = 0. \tag{12.50}$$

Wir nehmen an, dass $C_+ \neq 0$. (Der Fall $C_+ = 0$ führt zur trivialen Lösung $u \equiv 0$.) Aus (12.50) folgt dann, dass

$$e^{2\pi\sqrt{\lambda}} = 1.$$

Hieraus folgt, dass es eine ganze Zahl k gibt so, dass

$$\sqrt{\lambda} = ki.$$

(Wir haben daher $\lambda \leq 0$.) Wir erhalten

$$\begin{aligned} u(t,x) &= C_+ e^{-k^2 t}\left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right) \qquad \text{(wegen (12.42,12.49))} \\ &= C u^{(k)}(t,x), \\ u^{(k)}(t,x) &:= e^{-k^2 t}\sin(kx), \qquad C := 2iC_+ \end{aligned} \tag{12.51}$$

(wegen der Eulerschen Formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$).

Fall (12.43) ($u(t,x) = C_1 x + C_0$): Dann folgt aus den Randbedingungen (12.45), dass $C_0 = 0$ und $C_1 = 0$, also, dass $u \equiv 0$.

Die Funktion $u^{(k)}$ (gegeben durch (12.51)) löst tatsächlich die Randbedingungen (12.45). Für $t = 0$ ist sie gegeben durch

$$u^{(k)}(0,x) = \sin(kx).$$

Indem wir das mit der Funktion u_0 aus (12.46) vergleichen, sehen wir, dass die Funktion

$$u := 3u^{(1)} - u^{(2)}$$

die Anfangsbedingung (12.46) löst. Die WLG (12.44) ist linear und homogen, und u ist eine (endliche) Linearkombination der Lösungen $u^{(1)}, u^{(2)}$ der WLG. Wegen des Superpositionsprinzips (Proposition 12.6) löst daher u auch die WLG. Da u eine lineare Kombination von Lösungen der Randbedingungen (12.45) ist und diese Randbedingungen homogen sind, löst u diese Bedingungen ebenfalls. Zusammenfassend ist u also eine Lösung des Anfangs- und Randwertproblems für die Wärmeleitungsgleichung (12.44,12.45,12.46), wie gewünscht.

Bemerkung. Die obige Lösung unseres Anfangs- und Randwertproblems ist eine endliche Linearkombination der Funktionen $u^{(k)}$. In Analysis 3 werden Sie sehen, dass auch gewisse *unendliche* Linearkombinationen der Funktionen $u^{(k)}$ (gegeben durch (12.51)) sinnvoll sind. Mittels Fouriertheorie kann die allgemeine Lösung der WLG als eine solche unendliche Linearkombination geschrieben werden. Das kann man verwenden, um eine Lösung der WLG mit homogenen Randbedingungen und *beliebigen* Anfangsbedingungen zu finden.

Literaturverzeichnis

[BBD+25] Manuel Bronstein, William H. Burge, Timothy P. Daly, Patrizia Gianni, Johannes Grabmeier, Scott C. Morrison, Jonathan M. Steinbach, Robert S. Sutor, Barry M. Trager, Stephen M. Watt, Richard D. Jenks, Clifton J. Williamson, Martin Baker, Riccardo Guida, Waldek Hebisch, Ralf Hemmecke, and Qian Yun, *The fricas system for computer mathematics*, 2025.

[Beu97] Albrecht Beutelspacher, *"Das ist o. B. d. A. trivial!"*, fourth ed., Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1997, Eine Gebrauchsanleitung zur Formulierung mathematischer Gedanken mit vielen praktischen Tips für Studierende der Mathematik und Informatik. [A guide for formulating mathematical ideas, with many practical hints for students of mathematics and computer science]. MR 1652595

[Bla96a] Christian Blatter, *Ingenieur Analysis 1*, Springer, 1996.

[Bla96b] ———, *Ingenieur Analysis 2*, Springer, 1996.

[Bla03] ———, *Analysis eins, ethz, studiengänge mathematik und physik, wintersemester 2003/04*, 2003.

[Bro05] Manuel Bronstein, *Symbolic integration. I*, second ed., Algorithms and Computation in Mathematics, vol. 1, Springer-Verlag, Berlin, 2005, Transcendental functions, With a foreword by B. F. Caviness. MR 2106657

[Can84] G. Cantor, *De la puissance des ensembles parfaits de points*, Acta Math. **4** (1884), no. 1, 381–392, Extrait d'une lettre adressée à l'éditeur. MR 1554642

[Chu] R.C. Churchill, *Liouville's theorem on integration in terms of elementary functions.*

[Con] B. Conrad, *Impossibility theorems for elementary integration.*

[Cra04] J. A. Crawford, *Pendulums and elliptic integrals.*

[DH08] Peter Deuflhard and Andreas Hohmann, *Numerische Mathematik. 1*, fourth ed., de Gruyter Lehrbuch. [de Gruyter Textbook], Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2008, Eine algorithmisch orientierte Einführung. [An algorithmically oriented introduction]. MR 2488407

[DK04a] J. J. Duistermaat and J. A. C. Kolk, *Multidimensional real analysis. I. Differentiation*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 86, Cambridge University Press, Cambridge, 2004, Translated from the Dutch by J. P. van Braam Houckgeest. MR 2121976

[DK04b] ———, *Multidimensional real analysis. II. Integration*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 87, Cambridge University Press, Cambridge, 2004, Translated from the Dutch by J. P. van Braam Houckgeest. MR 2121977

[EHH+83] H.-D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Mainzer, A. Prestel, and R. Remmert, *Zahlen*, Grundwissen Mathematik [Basic Knowledge in Mathematics], vol. 1, Springer-Verlag, Berlin, 1983, Edited and with an introduction by K. Lamotke. MR 736150

[Eva10] Lawrence C. Evans, *Partial differential equations*, 2nd ed. ed., Grad. Stud. Math., vol. 19, Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2010 (English).

[Far93] Stanley J. Farlow, *Partial differential equations for scientists and engineers.*, rev. repr. of the 1982 orig. ed., New York, NY: Dover Publications, Inc., 1993 (English).

[For11] Otto Forster, *Analysis. 1*, expanded ed., Grundkurs Mathematik. [Foundational Course in Mathematics], Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2011, Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen. [Differential and integral calculus of one variable]. MR 2840783

[Goe] Johann Wolfgang von Goethe, *Faust, teil eins.*

[Goo98] Robert H. Good, *Classical electromagnetism*, Saunders College Publishing, 1998.

[Gro13] Andrey Grozin, *Introduction to mathematica® for physicists*, Springer, Cham, 2013.

[Hat02] Allen Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002. MR 1867354

[Hil30] David Hilbert, *Naturerkennen und Logik*, Ansprache am Kongress der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte in Königsberg, 1930, `https://www.swr.de/swrkultur/wissen/archivradio/david-hilbert-1930-radioansprache-102.html`.

[Kap57] Irving Kaplansky, *An introduction to differential algebra*, Publ. Inst. Math. Univ. Nancago, No. 5, Hermann, Paris, 1957. MR 0093654

[Pap15] Lothar Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. Band 2. Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium*, 14th revised and enlarged ed. ed., Wiesbaden: Springer Vieweg, 2015 (German).

[Sip12] Michael Sipser, *Introduction to the theory of computation*, 3 ed., Cengage Learning, Boston, MA, USA, 2012.

[Stra] Michael Struwe, *Analysis für informatik, skript, 2010, eth zürich.*

[Strb] ———, *Analysis i und ii, skript, herbstsemester 2011/frühlingssemester 2012, eth zürich.*

[Tes12] Gerald Teschl, *Ordinary differential equations and dynamical systems*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 140, American Mathematical Society, Providence, RI, 2012. MR 2961944

[Tka] Vladimir G. Tkachev, *Elliptic functions: Introduction course.*

[Wal97] Wolfgang Walter, *Analysis 1, vierte auflage*, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[Wei67] Karl Weierstrass, *Mathematische Werke. VI. Vorlesungen über Anwendung der elliptischen Funktionen*, Georg Olms Verlagsbuchhandlung, Hildesheim; Johnson Reprint Corp., New York, 1967. MR 218196